DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
I. kötet, 2013

A 3D, 7-paraméteres dátum transzformáció megoldása Gröbner-bázisban és a Bursa-Wolf modellben

Kalmár János - Závoti József
MTA CSFK GGI

A számítástechnika fejlődése hozta magával, hogy az alkalmazott matematika érdeklődésének középpontjába a számítógépes algebrai rendszerek (CAS) kutatása és alkalmazása került. Az előadásban a térbeli hasonlósági transzformáció nemlineáris feladatának megoldására mutatunk be két modellt.

Az első modell a 7 paraméteres, 3D transzformációs feladatot a Gauss-Jacobi féle kombinatorikus kiegyenlítéssel oldja meg Gröbner bázison alapuló algebrai technikával.

Az előadás második része a kvaterniók alkalmazását mutatja be a forgatás, az eltolás és a méretarány paraméterek meghatározására a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. Mindkét algoritmusnak előnye az, hogy nemcsak 0 közeli szögelfordulások esetén alkalmazható, továbbá nincs szükség linearizálásra és iterációra a transzformációs paraméterek számításához.

1. Bevezetés

A koordináta-rendszerek közötti áttérés során kiemelkedő jelentőségű a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció alkalmazása, ez a legelterjedtebb módszer a GPS rendszerek közötti átszámítások elvégzésében. A gyakorlatban használatos eljárások általában közelítő, iterációs megoldásokat használnak. A dátum transzformáció probléma újszerű tárgyalását *Awange* és *Grafarend (2002)* és *(2003)* cikkei vezették be. Ötletük alapján az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot egy ferdén szimmetrikus mátrix segítségével írták fel. *Závoti (2005)* tanulmánya javította a modellt, *Závoti* és *Jancsó (2006)* cikke pedig továbbfejlesztette a szakirodalomban ismert algoritmust. A *Závoti (1999* publikáció a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció L_1 normás megoldását tárgyalja. A számítógéppel támogatott algebrai rendszerek elterjedésével megjelentek egzakt, analitikus megoldást adó modellek. Ezeknek a modelleknek gyakorlati használatát az akadályozza, hogy az átszámításhoz használt közös pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, azaz a feladat a számítástechnika mai állása mellett sem oldható meg valós időben.

A feladat ezen tanulmányban ismertetett nemlineáris megoldása során az egyenleteket nem kell linearizálni, nem szükséges iterálni és a két koordináta-rendszer (lokális-globális referencia rendszer) kovariancia kapcsolatai automatikusan felhasználásra kerülnek. A tanulmány ismerteti a Gauss-Jacobi kombinatorikus algoritmus matematikai elméletét, a túlhatározott 3D, 7 paraméteres transzformáció megoldását.

2. Gauss-Jacobi kombinatorikus modell

A 3D, 7-paraméteres (Helmert) hasonlósági transzformáció a következő modellel adható meg: a transzformáció (X, Y, Z)-tárgyponti és az (x, y, z)-célponti koordináta-rendszer közötti

Euklidészi térben adott pontok között valósít meg leképezést az eltolási-, az elforgatási és a méretarány-tényező függvényében:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = sR\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{1}$$

ahol

- $\{a_i, b_i, c_i\}$ és $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ugyanazon a pont koordinátái a két koordináta rendszerben,
- s az ismeretlen méretarány tényező,
- X_0, Y_0 és Z_0 az ismeretlen eltolási értékek,
- R a forgatási mátrix.

Az R forgatási mátrix a három koordináta tengely körüli elforgatással, azaz ω, φ és κ, három független paraméterrel írható le:

$$R = R_1(\omega)R_2(\varphi)R_3(\kappa). \tag{2}$$

Az R forgatási mátrixot az S ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írjuk fel:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S), \tag{3}$$

ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és S mátrix az a, b és c paraméterekkel az alábbi formában adható meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

A 7 paraméter meghatározásához legalább 7 egyenlet felírására van szükség. Amennyiben 3 pontot tekintünk adottnak, az (1) formula felhasználásával 9 egyenletet tudunk felírni, így feladatunk túlhatározottá válik. A következő egyenletek a 3 pont koordinátáinak (1) összefüggésbe történő helyettesítésével adódnak:

$$\begin{array}{llllllllll}
f_1 := & sX_1 & -scY_1 & +sbZ_1 & +X_0 + cY_0 - bZ_0 & -a_1 & -cb_1 & +bc_1 & =0 \\
f_2 := & scX_1 & +sY_1 & -saZ_1 & -cX_0 + Y_0 + aZ_0 & +ca_1 & -b_1 & -ac_1 & =0 \\
f_3 := - & sbX_1 & +saY_1 & +sZ_1 & +bX_0 - aY_0 + Z_0 & -ba_1 & +ab_1 & -c_1 & =0 \\
f_4 := & sX_2 & -scY_2 & +sbZ_2 & +X_0 + cY_0 - bZ_0 & -a_2 & -cb_2 & +bc_2 & =0 \\
f_5 := & scX_2 & +sY_2 & -saZ_2 & -cX_0 + Y_0 + aZ_0 & +ca_2 & -b_2 & -ac_2 & =0 \\
f_6 := - & sbX_2 & +saY_2 & +sZ_2 & +bX_0 - aY_0 + Z_0 & -ba_2 & +ab_2 & -c_2 & =0 \\
f_7 := & sX_3 & -scY_3 & +sbZ_3 & +X_0 + cY_0 - bZ_0 & -a_3 & -cb_3 & +bc_3 & =0 \\
f_8 := & scX_3 & +sY_3 & -saZ_3 & -cX_0 + Y_0 + aZ_0 & +ca_3 & -b_3 & -ac_3 & =0 \\
f_9 := - & sbX_3 & +saY_3 & +sZ_3 & +bX_0 - aY_0 + Z_0 & -ba_3 & +ab_3 & -c_3 & =0
\end{array} \tag{5}$$

A fenti 9 egyenletből álló egyenletrendszer a 7 ismeretlen paraméterben nemlineáris és túlhatározott.

Az egyenletrendszer egyértelmű megoldásához az (5) egyenletekből kiválasztunk 7 egyenletet, például elhagyjuk a 7. és 8. egyenleteket:

$$
\begin{aligned}
f_1 &:= sX_1 - scY_1 + sbZ_1 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_1 - cb_1 + bc_1 = 0\\
f_2 &:= scX_1 + sY_1 - saZ_1 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_1 - b_1 - ac_1 = 0\\
f_3 &:= -sbX_1 + saY_1 + sZ_1 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_1 + ab_1 - c_1 = 0\\
f_4 &:= sX_2 - scY_2 + sbZ_2 + X_0 + cY_0 - bZ_0 - a_2 - cb_2 + bc_2 = 0\\
f_5 &:= scX_2 + sY_2 - saZ_2 - cX_0 + Y_0 + aZ_0 + ca_2 - b_2 - ac_2 = 0\\
f_6 &:= -sbX_2 + saY_2 + sZ_2 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_2 + ab_2 - c_2 = 0\\
f_9 &:= -sbX_3 + saY_3 + sZ_3 + bX_0 - aY_0 + Z_0 - ba_3 + ab_3 - c_3 = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Ha a megoldás előállítására az Awange és Grafarend (2002) által ajánlott Gröbner-bázis módszerét használjuk, akkor a bázis minden egyes kombinációjával számolnunk kell. A kiválasztást a kombinatorikus megoldás során minden lehetséges módon el kell végezni. Ezt a kiválasztást a sorrend fegyelmen kívül hagyásával $\binom{9}{7} = 36$ különböző kombinációban tudjuk megtenni. A 7 egyenletet mind a 36 esetben meg kell oldani mind a hét paraméterre, és rendre a megoldások súlyozott átlagát kell számolni.

Ha csak 3 közös pont van, nincs komoly akadálya annak, hogy kiszámítsuk a 36 különböző Gröbner-bázist, de ha 4 vagy több pont van, a feladat megoldása egyre nehézkesebbé válik. Például, ha 4 közös pont van, akkor a kombinációk száma 792. Ez azt jelenti, hogy 792 Gröbner-bázist kell meghatározni, és azokkal számolni. Ha 5 adott pont van, akkor a kombinációk száma 6435, a pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, a feladat megoldhatatlanná válik.

Az (1) összefüggésben szereplő eltolási paraméterek kiküszöböléséhez képezzük a következő különbségeket:

$$
\begin{aligned}
f_{14} &:= f_1 - f_4 = sX_{12} - scY_{12} + sbZ_{12} - a_{12} - cb_{12} + bc_{12} = 0\\
f_{25} &:= f_2 - f_5 = scX_{12} + sY_{12} - saZ_{12} + ca_{12} - b_{12} - ac_{12} = 0\\
f_{39} &:= f_3 - f_9 = -sbX_{13} + saY_{13} + sZ_{13} - ba_{13} + ab_{13} - c_{13} = 0\\
f_{69} &:= f_6 - f_9 = -sbX_{23} + saY_{23} + sZ_{23} - ba_{23} + ab_{23} - c_{23} = 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ahol

$X_{ij} = X_i - X_j$, $Y_{ij} = Y_i - Y_j$, $Z_{ij} = Z_i - Z_j$, $\quad i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j,$

$a_{ij} = a_i - a_j$, $b_{ij} = b_i - b_j$, $c_{ij} = c_i - c_j$.

3. A 7 paraméteres 3D transzformáció megoldása

A (7) összefüggésben adott nemlineáris egyenletrendszer megoldásához valamilyen külső programot kell használnunk, mint például a MATLAB vagy a Mathematica.

A fenti nemlineáris egyenletrendszer megoldását az *Awange és Grafarend (2002)* tanulmány a Gröbner bázis felhasználásával hajtotta végre. A méretarány-tényező meghatározására egy negyed-fokú polinom-egyenletet kaptak. A negyed-fokú polinom gyökeit a MATLAB programcsomag segítségével is megkaphatjuk. Az alábbi negyed-fokú polinom legkisebb pozitív gyöke szolgáltatja a méretarány-tényezőt:

$$d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s^1 + d_0 = 0, \tag{8}$$

ahol a polinom együtthatói a két koordináta-rendszerben adott pontok koordinátái által meghatározott bonyolult függvényei a Gröbner bázisban. Megjegyzendő, hogy a negyedfokú egyenlet megoldása után még külön probléma a gyökök szétválasztása, a négy gyök közül a megfelelő méretarány-tényező kiválasztása.

A rekonstruálhatóság érdekében megadjuk a negyed-fokú polinom együtthatóit:

$$\begin{aligned} d_4 = {} & X13*Y12*Y12*Y23+X12*X12*X13*Y23-X12*X12*X23*Y13-X12*Y13*Z12*Z23 \\ & -X23*Y12*Y12*Y13+X13*Y12*Z12*Z23-X23*Y12*Z12*Z13+X12*Y23*Z12*Z13 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} d_3 = {} & c12*X13*Y12*Z23-b13*X12*Z12*Z23-c13*X12*Y23*Z12+b23*X13*Y12*Y12 \\ & -a23*X12*X12*Y13+c23*X12*Y13*Z12+c12*X12*Y23*Z13+a13*Y12*Y12*Y23 \\ & -b12*X23*Z12*Z13-a23*Y12*Y12*Y13+b12*X13*Z12*Z23-c12*X12*Y13*Z23 \\ & +a13*X12*X12*Y23-c23*X13*Y12*Z12-a23*Y12*Z12*Z13+c13*X23*Y12*Z12 \\ & -b13*X23*Y12*Y12-b13*X12*X12*X23+b23*X12*Z12*Z13+a13*Y12*Z12*Z23 \\ & +b23*X12*X12*X13+a12*Y23*Z12*Z13-a12*Y13*Z12*Z23-c12*X23*Y12*Z13 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d_2 = {} & a13*b23*X12*X12+b12*b12*X23*Y13+b12*c13*X23*Z12-c12*c23*X13*Y12 \\ & +b13*c23*X12*Z12-a23*b12*Z12*Z13+a12*a12*X23*Y13-b12*b12*X13*Y23 \\ & -a12*a12*X13*Y23-a23*b13*X12*X12+a13*b23*Y12*Y12-a23*b13*Y12*Y12 \\ & +a12*b23*Z12*Z13+a23*c13*Y12*Z12+a12*c12*Y23*Z13-b12*c12*X23*Z13 \\ & -b23*c13*X12*Z12-a12*b13*Z12*Z23-a23*c12*Y12*Z13+a12*c23*Y13*Z12 \\ & +b12*c12*X13*Z23-a12*c12*Y13*Z23-a13*c23*Y12*Z12-c12*c13*X12*Y23 \\ & +c12*c13*X23*Y12+c12*c23*X12*Y13-b13*c12*X12*Z23+b23*c12*X12*Z13 \\ & +a13*b12*Z12*Z23-a12*c13*Y23*Z12+a13*c12*Y12*Z23-b12*c23*X13*Z12 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} d_1 = {} & -a12*b13*c12*Z23+b12*c12*c13*X23+b12*b12*b13*X23-a13*b12*b12*Y23 \\ & -a12*a12*b23*X13+a23*c12*c13*Y12-a13*c12*c23*Y12+a12*b13*c23*Z12 \\ & -a12*a12*a13*Y23-b23*c12*c13*X12+a12*b23*c12*Z13-a23*b12*c12*Z13 \\ & -b12*b12*b23*X13+a23*b12*c13*Z12-a12*c12*c13*Y23+a12*a12*b13*X23 \\ & +a12*a12*a23*Y13-a12*b23*c13*Z12-a13*b12*c23*Z12-b12*c12*c23*X13 \\ & +b13*c12*c23*X12+a12*c12*c23*Y13+a23*b12*b12*Y13+a13*b12*c12*Z23 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} d_0 = {} & a12*b13*c12*c23-a13*b12*b12*b23+a12*a12*a23*b13-a12*a12*a13*b23 \\ & -a12*b23*c12*c13+a23*b12*b12*b13+a23*b12*c12*c13-a13*b12*c12*c23 \end{aligned} \tag{13}$$

A méretarány-tényező ismeretében az egyenletrendszerek lineárisak lesznek, amelyeknek a megoldása már nem jelent problémát (Awange és Grafarend (2002)). A ferdén szimmetrikus *S* mátrix *a*, *b* és *c* elemeit az alábbi lineáris egyenletekből nyerhetjük:

$$p_1*a+p_0=0, \tag{14}$$

ahol

$$\begin{aligned} p_1 = {} & -s*s*s*X13*Y12*Z12-b12*s*s*X13*Z12-a13*b12*c12-a13*s*s*Y12*Z12 \\ & +b13*s*s*X12*Z12+c12*s*s*X12*Y13-a13*c12*s*Y12+a12*b13*c12 \\ & +a12*b13*s*Z12-a13*b12*s*Z12-b12*c12*s*X13+a12*s*s*Y13*Z12 \\ & +s*s*s*X12*Y13*Z12+a12*c12*s*Y13-c12*s*s*X13*Y12+b13*c12*s*X12 \end{aligned}$$

$$p_0 = \text{-a12*a12*a13-a12*c13*s*Z12+a12*s*s*Z12*Z13+a12*c12*s*Z13}$$
$$\text{-c12*c13*s*X12-a12*c12*c13+s*s*s*X13*Y12*Y12-c13*s*s*X12*Z12}$$
$$\text{+s*s*s*X12*X12*X13+s*s*s*X12*Z12*Z13-a12*a12*s*X13-b12*b12*s*X13}$$
$$\text{-a13*b12*b12+a13*s*s*X12*X12+a13*s*s*Y12*Y12+c12*s*s*X12*Z13}$$

$$q_1 \text{*b+ } q_0 \text{=0,} \qquad (15)$$

ahol

$$q_1 = \text{b12*c12*s*X13+b13*c12*s*X12-a13*b12*s*Z12-s*s*s*X13*Y12*Z12}$$
$$\text{-a13*c12*s*Y12+a12*b13*c12+a12*s*s*Y13*Z12-a13*s*s*Y12*Z12}$$
$$\text{+a12*b13*s*Z12+s*s*s*X12*Y13*Z12-a13*b12*c12+c12*s*s*X12*Y13}$$
$$\text{+a12*c12*s*Y13-b12*s*s*X13*Z12-c12*s*s*X13*Y12+b13*s*s*X12*Z12}$$

$$q_0 = \text{-a12*a12*b13-c12*c13*s*Y12+b13*s*s*Y12*Y12+c12*s*s*Y12*Z13}$$
$$\text{+s*s*s*Y12*Z12*Z13+s*s*s*X12*X12*Y13-b12*c13*s*Z12+b12*s*s*Z12*Z13}$$
$$\text{-b12*b12*b13-a12*a12*s*Y13+b13*s*s*X12*X12-c13*s*s*Y12*Z12}$$
$$\text{+b12*c12*s*Z13+s*s*s*Y12*Y12*Y13-b12*b12*s*Y13-b12*c12*c13}$$

$$r_1 \text{*c+ } r_0 \text{=0,} \qquad (16)$$

ahol

$$r_1 = \text{-b12*s*X13-a13*s*Y12-s*s*X13*Y12-a13*b12}$$
$$\text{+s*s*X12*Y13+a12*b13+a12*s*Y13+b13*s*X12}$$

$$r_0 = \text{-a12*a13-b12*b13+s*s*Z12*Z13+s*s*Y12*Y13}$$
$$\text{-c12*c13+a13*s*X12+b13*s*Y12-a12*s*X13}$$
$$\text{+s*s*X12*X13+c12*s*Z13-b12*s*Y13-c13*s*Z12}.$$

Az R forgatási mátrix felhasználásával az *s*, *a*, *b*, és *c* értékek ismeretében a még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paraméterek értékeket a (1) képletből kifejezve az alábbi összefüggéssel nyerhetjük:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} - \frac{s}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \qquad (17)$$

4. A dátum-transzformáció Bursa-Wolf modellje

Az (1) transzformációt új jelölésekkel írjuk fel Shen Y. Z., Chen Y., Zheng D. H. (2006) tanulmánya alapján:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{t} + k \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (18)$$

ahol **t** az eltolás-vektor, *k* a méretarány-tényező, **R** a forgatási mátrix, és $\mathbf{s}_i$ illetve $\mathbf{p}_i$ ugyanazon a pont ismert koordinátái a két koordináta rendszerben. Térjünk át súlyponti koordinátákra (a súlypont koordinátái **s** ill. **p**):

$$\Delta \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i - \bar{\mathbf{s}} \Rightarrow \mathbf{s}_i = \Delta \mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{s}},$$
$$\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}} \Rightarrow \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{p}} \tag{19}$$

Visszaírva a transzformáció képletébe kapjuk:

$$\Delta \mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{t} + k \cdot \mathbf{R} \cdot (\Delta \mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{p}}), i = 1,2,...,n. \tag{20}$$

Átrendezés után adódik:

$$\Delta \mathbf{s}_i + \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{t} + k \cdot \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{p}} + k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i, i = 1,2,...,n. \tag{21}$$

A transzformáció képlete a súlypontra is igaz, ezért a képlet közepe elhagyható, és marad:

$$\Delta \mathbf{s}_i = k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i, i = 1,2,...,n. \tag{22}$$

Az ismeretlen **t** eltolás-vektortól így megszabadultunk, marad még k és **R**.

5. Az ismeretlenek meghatározása szélsőérték feladatból

Határozzuk meg a maradékvektort:

$$\Delta v_i = \Delta \mathbf{s}_i - k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i, i = 1,2,...,n. \tag{23}$$

Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\min_{k,\mathbf{R}} \sum_i \Delta v_i^T \cdot \Delta v_i = \min_{k,\mathbf{R}} \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i - k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i)^T \cdot (\Delta \mathbf{s}_i - k \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i). \tag{24}$$

Mivel **R** ortogonális mátrix ($\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{E}$), az egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\min_{k,\mathbf{R}} \{\sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \Delta \mathbf{s}_i) - 2k \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i) + k^2 \sum_i (\Delta \mathbf{p}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i)\}. \tag{25}$$

A célfüggvény szélsőértékét a k szerinti parciális derivált eltűnése esetén veszi fel, így kapjuk, hogy

$$k = \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i) / \sum_i (\Delta \mathbf{p}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i). \tag{26}$$

Visszahelyettesítjük a k-ra kapott értéket a szélsőérték-feladatba:

$$\min_{\mathbf{R}} \{\sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \Delta \mathbf{s}_i) - \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i)^2 / \sum_i (\Delta \mathbf{p}_i^T \cdot \Delta \mathbf{p}_i)\}. \tag{27}$$

Mivel k-t már kiküszöböltük, a szélsőérték már csak az **R** forgatási mátrix függvénye, így (27) első tagja elhagyható, a másodikból viszont az előjel miatt maximum számítandó (a nevezőt is elhagyhatjuk, mert nem tartalmaz ismeretlent):

$$\max_{\mathbf{R}} \sum_i (\Delta \mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{p}_i). \tag{28}$$

6. A szélsőérték számítás megoldása kvaternió-algebrával

Kvaterniókra (4 dimenziós $\mathbf{S}=(0, \Delta\, \mathbf{s}^{\mathbf{T}})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{P}=(0, \Delta\, \mathbf{p}^{\mathbf{T}})^{\mathrm{T}}$ vektorokra) áttérve a (28) bilineáris alak az ismeretlen **R** forgatási mátrix helyett az ismeretlen $\mathbf{Q}=(q_0,\mathbf{q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ kvaternióval is felírható, ahol a keresett **R** forgatási mátrix és a számított **Q** kvaternió között az alábbi összefüggés van:

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{E} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T + q_0 \cdot C(\mathbf{q})) \ . \tag{29}$$

A kvaterniókra vonatkozó legfontosabb összefüggések:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q} = q_0 + q_1 \cdot \mathbf{i} + q_2 \cdot \mathbf{j} + q_3 \cdot \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q} \\
&\mathbf{Q}^* = q_0 - \mathbf{q} = (q_0, -\mathbf{q}^T)^T, \|\mathbf{Q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\
&C(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\mathbf{Q}^+ = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \cdot \mathbf{E} + C(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^- = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \cdot \mathbf{E} - C(\mathbf{q}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

Most már minden adott (28) összefüggés átírásához:

$$\max_{\mathbf{R}} \sum_i (\Delta\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{p}_i) = \max_{\mathbf{Q}} \sum_i (\mathbf{S}_i^T \cdot \mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{P}_i^+ \cdot \mathbf{Q}^*) = \max_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}\,, \tag{31}$$

ahol **N** (4×4) mátrix a következő alakú :

$$\mathbf{N} = \sum_i \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{s}_i^T \cdot \Delta\mathbf{p}_i & \Delta\mathbf{s}_i^T \cdot C(\Delta\mathbf{p}_i) \\ -C(\Delta\mathbf{s}_i) \cdot \Delta\mathbf{p}_i & \Delta\mathbf{s}_i \cdot \Delta\mathbf{p}_i^T + C(\Delta\mathbf{s}_i) \cdot C(\Delta\mathbf{p}_i) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

A (31) kvadratikus alak akkor éri el maximumát, ha **Q** sajátvektora **N**-nek, ekkor értéke megegyezik **N** sajátértékével – tehát a maximalizálási feladat **N** mátrix maximális λ sajátértékének, illetve a hozzá tartozó egységnyi **Q** sajátvektornak (a keresett kvaterniónak) a meghatározására vezet.

A **Q** kvaternió ismeretében (29) alapján az $\mathbf{R}(r_{ij})$ forgatási mátrix már felírható, ezért a forgásszögek kiszámíthatók:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left({r_{23}}/{r_{33}} \right), \beta = \arcsin(-r_{13}), \gamma = \operatorname{arctg}\left({r_{12}}/{r_{11}} \right), \tag{33}$$

ahol α az x tengely, β az y tengely, és γ a z tengely körüli forgatási szöget jelöli. A k méretarány-tényezőt ezután (26) összefüggés alapján számítjuk, a **t** eltolás-vektort pedig (18) alapján átlagolással határozhatjuk meg.

Összefoglalás

A tanulmányban megadtunk egy módszert a 3D, 7 paraméteres transzformáció nemlineáris egyenletrendszerének megoldására a forgatási mátrix parametrizálásával. Az eljárás sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását és tetszőleges koordinátatengely-menti elforgatások esetén érvényes. A 3D, 7 paraméteres dátum transzformációs probléma tárgyalása során a Gröbner-bázisra való áttéréssel a dátum transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározásához negyed-fokú polinom-egyenletet kell megoldani.

A második, Bursa-Wolf modellben a kiegyenlítés iteráció nélkül, közvetlenül oldható meg kvaternió-algebra segítségével, ami jelentős számítási igény csökkenéssel jár.

Hivatkozások

Awange J. L., Grafarend E. W. (2002): Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.
Awange J. L., Grafarend E.W. (2003): Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.
Závoti J. (1999): Publications in Geomatics, 2, 1-149.
Závoti J. (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása, Geomatikai Közlemények, 8, 53-60.
Závoti J., Jancsó T. (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis, Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.
Shen Y. Z., Chen Y., Zheng D. H. (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm, J. Geod. 80: 233–239.