

A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció egy egyszerű megoldása

Závoti József
MTA CSFK GGI

A természetben fennálló összefüggések, törvények többségükben nemlineáris egyenletekre vezetnek, amelyeket általában linearizálva, iterációval szokás megoldani. A linearizálás eleve elhanyagolást, közelítést eredményez. Bizonyos esetekben lehetőség nyílik arra, hogy a nemlineáris problémákra egzakt, korrekt megoldást kapjunk. Az előadásban megadtunk egy levezetést a 3D hasonlósági transzformáció nemlineáris feladatának megoldására. A módszer sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. A méretarány paraméterének meghatározására másodfokú polinom-egyenlet adódik, a forgatási mátrix paraméterei a legkisebb négyzetek módszerének ez elvéből is levezethetők. Maga a végeredmény ismert a szakirodalomban, ez a megoldás az egyszerűségével mégis figyelmet érdemel.

1. Bevezetés

A dátum transzformációk számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b) években megjelent tanulmányai tekinthetők kiindulási alapnak. Magyar nyelven Závoti (2005) tanulmánya módosításokat javasolt a matematikai modellhez. A Závoti, Jancsó (2006) tanulmány a módosításokat pontosította. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya tartalmazta az elsők között.

A szakirodalomban eddig publikált eredmények azonban nem tekinthetők végleges megoldásnak, mert az alkalmazásuk nehézkes, a gyakorlati felhasználás során fellép az u.n. kombinatorikus robbanás problémája.

Ezen tanulmányban olyan matematikai megoldást adunk, amely kiküszöböli a kombinatorikus robbanás problémáját, és az egyéb numerikus nehézségek is elmaradnak.

2. A 3D, 7 paraméteres transzformáció megoldása

A 3-dimenziós, 7-paraméteres transzformáció gyakran használt eljárás a műszaki tudományokban, úgymint a geodéziában, a navigációs rendszerekben, a kartográfiában, az űrkutatásban és a számítógépes grafikában. Az egyik dátumban megadott pontokat torziómentesen a másik dátumba átvivő transzformáció matematikai összefüggése az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

ahol:

$[X_i, Y_i, Z_i]^T$ célpontok koordináta értékei,

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási értékek,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\mathbf{R}(\omega, \varphi, \kappa)$ a forgási mátrix,

$[x_i, y_i, z_i]^T$ tárgyponok koordináta értékei.

Az \mathbf{R} forgási mátrix a három tengely körüli elforgatással, három független, meghatározandó ω , φ és κ paraméterrel írható le:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1(\omega)\mathbf{R}_2(\varphi)\mathbf{R}_3(\kappa). \quad (2)$$

Feladat. A 7 ismeretlen paraméter becslése a két rendszerben ismert közös pontok ($n \geq 3$) alapján.

Az R forgatási mátrixot az S ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írhatjuk fel:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S), \quad (3)$$

ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és S mátrixot az a , b és c paraméterekkel az alábbi módon adjuk meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Az adott közös pontok alapján meghatározhatók a két rendszer súlypontjainak koordinátái:

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, & Y_s &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, & Z_s &= \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}, \\ x_s &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, & y_s &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, & z_s &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}. \end{aligned} \quad (5)$$

A súlypontok kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned} s_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_s - \lambda c y_s + \lambda b z_s - X_s - cY_s + bZ_s = 0 \\ s_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_s + \lambda y_s - \lambda a z_s + cX_s - Y_s - aZ_s = 0 \\ s_3 &:= bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_s + \lambda a y_s + \lambda z_s - bX_s + aY_s - Z_s = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Az (1) egyenleteket n pontra felírva, az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} f_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_1 - \lambda c y_1 + \lambda b z_1 - X_1 - cY_1 + bZ_1 = 0 \\ f_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_1 + \lambda y_1 - \lambda a z_1 + cX_1 - Y_1 - aZ_1 = 0 \\ f_3 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_1 + \lambda a y_1 + \lambda z_1 - bX_1 + aY_1 - Z_1 = 0 \\ f_4 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_2 - \lambda c y_2 + \lambda b z_2 - X_2 - cY_2 + bZ_2 = 0 \\ f_5 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_2 + \lambda y_2 - \lambda a z_2 + cX_2 - Y_2 - aZ_2 = 0 \\ f_6 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_2 + \lambda a y_2 + \lambda z_2 - bX_2 + aY_2 - Z_2 = 0 \\ &\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots \\ &\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots \\ &\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots &&\vdots \\ f_{3n-2} &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_n - \lambda c y_n + \lambda b z_n - X_n - cY_n + bZ_n = 0 \\ f_{3n-1} &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_n + \lambda y_n - \lambda a z_n + cX_n - Y_n - aZ_n = 0 \\ f_{3n} &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_n + \lambda a y_n + \lambda z_n - bX_n + aY_n - Z_n = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

A fenti egyenletekből az s_1 , s_2 és s_3 súlyponti egyenleteket rendre kivonva, eltávolíthatjuk az eltolási paramétereket és az egyenletekben egyúttal áttérünk a súlyponti koordinátákra:

$$\begin{aligned}
 f_{1s} &:= f_1 - s_1 = \lambda x_{1s} - \lambda c y_{1s} + \lambda b z_{1s} - X_{1s} - c Y_{1s} + b Z_{1s} = 0 \\
 f_{2s} &:= f_2 - s_2 = \lambda c x_{1s} + \lambda y_{1s} - \lambda a z_{1s} + c X_{1s} - Y_{1s} - a Z_{1s} = 0 \\
 f_{3s} &:= f_3 - s_3 = -\lambda b x_{1s} + \lambda a y_{1s} + \lambda z_{1s} - b X_{1s} + a Y_{1s} - Z_{1s} = 0 \\
 f_{4s} &:= f_4 - s_1 = \lambda x_{2s} - \lambda c y_{2s} + \lambda b z_{2s} - X_{2s} - c Y_{2s} + b Z_{2s} = 0 \\
 f_{5s} &:= f_5 - s_2 = \lambda c x_{2s} + \lambda y_{2s} - \lambda a z_{2s} + c X_{2s} - Y_{2s} - a Z_{2s} = 0 \\
 f_{6s} &:= f_6 - s_3 = -\lambda b x_{2s} + \lambda a y_{2s} + \lambda z_{2s} - b X_{2s} + a Y_{2s} - Z_{2s} = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_{3n-2s} &:= f_{3n-2} - s_1 = \lambda x_{ns} - \lambda c y_{ns} + \lambda b z_{ns} - X_{ns} - c Y_{ns} + b Z_{ns} = 0 \\
 f_{3n-1s} &:= f_{3n-1} - s_2 = \lambda c x_{ns} + \lambda y_{ns} - \lambda a z_{ns} + c X_{ns} - Y_{ns} - a Z_{ns} = 0 \\
 f_{3ns} &:= f_{3n} - s_3 = -\lambda b x_{ns} + \lambda a y_{ns} + \lambda z_{ns} - b X_{ns} + a Y_{ns} - Z_{ns} = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 X_{is} &= X_i - X_s, \quad Y_{is} = Y_i - Y_s, \quad Z_{is} = Z_i - Z_s \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \\
 x_{is} &= x_i - x_s, \quad y_{is} = y_i - y_s, \quad z_{is} = z_i - z_s \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Az f_{3i-2s} , f_{3i-1s} ($i=1, 2, 3, \dots, n$) egyenletekből a b paramétert, illetve az a paramétert kifejezve, kapjuk az alábbi formulákat:

$$\begin{aligned}
 b &= (-\lambda x_{is} + \lambda c y_{is} + X_{is} + c Y_{is}) / (Z_{is} + \lambda z_{is}) \\
 a &= (\lambda c x_{is} + \lambda y_{is} + c X_{is} - Y_{is}) / (Z_{is} + \lambda z_{is}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Az f_{3is} ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) egyenletek a következő módon is felírhatók:

$$(\lambda y_{is} + Y_{is})a - (\lambda x_{is} + X_{is})b = Z_{is} - \lambda z_{is}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{10}$$

A (9) összefüggéssel adott a és b paramétereket a (10) képletbe helyettesítve adódik az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned}
 (\lambda y_{is} + Y_{is})[\lambda y_{is} - Y_{is} + c(\lambda x_{is} + X_{is})] + (\lambda x_{is} + X_{is})[\lambda x_{is} - X_{is} - c(\lambda y_{is} + Y_{is})] &= Z_{is}^2 - \lambda^2 z_{is}^2, \\
 &(i = 1, 2, 3, \dots, n).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Néhány egyszerűsítés és összevonás után azt tapasztaljuk, hogy a c ismeretlen paraméter kiesik, és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő egy:

$$\lambda^2 (x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{12}$$

Az egyenletrendszer a következő alakban is felírható:

$$\left(\lambda \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2} \right) \left(\lambda \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{13}$$

Ezen túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényezőre - a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján - az alábbi, az Albertz-Kreiling (1975) kézikönyvben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggés, vagy a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}. \quad (14)$$

Tehát esetünkben a méretarány-tényező a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározható – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek kényszerű szétválasztási eljárásával ellentétben.

3. A lineáris paraméterek meghatározása

A λ méretarány-tényező ismeretében valamennyi pontra a (8) összefüggés felhasználásával az alábbi formában írhatjuk fel a közvetítő egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} X_{1s} - \lambda x_{1s} \\ Y_{1s} - \lambda y_{1s} \\ Z_{1s} - \lambda z_{1s} \\ X_{2s} - \lambda x_{2s} \\ Y_{2s} - \lambda y_{2s} \\ Z_{2s} - \lambda z_{2s} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{ns} - \lambda x_{ns} \\ Y_{ns} - \lambda y_{ns} \\ Z_{ns} - \lambda z_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda z_{1s} + Z_{1s} & -(\lambda y_{1s} + Y_{1s}) \\ -(\lambda z_{1s} + Z_{1s}) & 0 & \lambda x_{1s} + X_{1s} \\ \lambda y_{1s} + Y_{1s} & -(\lambda x_{1s} + X_{1s}) & 0 \\ 0 & \lambda z_{2s} + Z_{2s} & -(\lambda y_{2s} + Y_{2s}) \\ -(\lambda z_{2s} + Z_{2s}) & 0 & \lambda x_{2s} + X_{2s} \\ \lambda y_{2s} + Y_{2s} & -(\lambda x_{2s} + X_{2s}) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda z_{ns} + Z_{ns} & -(\lambda y_{ns} + Y_{ns}) \\ -(\lambda z_{ns} + Z_{ns}) & 0 & \lambda x_{ns} + X_{ns} \\ \lambda y_{ns} + Y_{ns} & -(\lambda x_{ns} + X_{ns}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (15)$$

A Gauss-Helmert modell alapján keressük az alábbi szélsőérték feladat megoldását:

$$\sum_{i=1}^n v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \xrightarrow{\min} \quad (16)$$

Néhány mátrix-aritmetikai azonosság alkalmazásával a következő normál mátrix vezethető le:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [(\lambda y_{is} + Y_{is})^2 + (\lambda z_{is} + Z_{is})^2] & -\sum_{i=1}^n (\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda y_{is} + Y_{is}) & -\sum_{i=1}^n (\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^n [(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda z_{is} + Z_{is})^2] & -\sum_{i=1}^n (\lambda y_{is} + Y_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) & \\ \sum_{i=1}^n [(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda y_{is} + Y_{is})^2] & & \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Hasonló módon adódik a normálvektor:

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (y_{is} Z_{is} - z_{is} Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^n (z_{is} X_{is} - x_{is} Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^n (x_{is} Y_{is} - y_{is} X_{is}) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A 3x3 méretű normál egyenletrendszerből az a , b és c paraméterek számos eljárással meghatározhatók, mi a singular value decomposition módszert javasoljuk. A még ismeretlen

X_0 , Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket az (1) összefüggés alapján az alábbi egyenletből lehet meghatározni:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ahol a súlypontok a két koordináta-rendszerben adott közös pontok koordinátáiból számoltak.

4. Összefoglalás

A tudományos kutatásokat segítő technikai eszközök, eljárások fejlődésével a műszaki tudományok elmélete is fejlődik: új elméletek alakulnak ki, új modellek keletkeznek, új kiértékelési módszereket dolgoznak ki, amelyek pontosabbak, vagy egyszerűbbek, mint a korábbi eljárások. A műszaki tudományok egyik fontos feladatára, a 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldására egy olyan új levezetést mutattunk be, amely összhangban van az eddigi eredményekkel, de az ismert elméleteknél sokkal egyszerűbb és világosabb matematikai eszközöket használ fel.

A 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldásához az általunk megadott új matematikai levezetés a forgási mátrix alkalmas paraméterezésén alapul. Ez a módszer nem igényel iterációt és nem szükséges a megfigyelési egyenletek sorba fejtése, linearizálása sem. Nincs megkötés a tengelykörüli forgatások nagyságrendjére vonatkozóan sem. A modell levezetése során a 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció problémáját mi egy másodfokú polinom egyenlet megoldására vezettük vissza, a szakirodalomban ismert negyedfokú egyenlettel szemben. A kidolgozott matematikai modell nem a szakirodalomból ismert kvaterniókat, nem a Gröbner-bázist, nem a Dixon- vagy Sylvester rezultánst alkalmazza, hanem elemi matematikai eszközöket használ fel.

Hivatkozások

- Albertz, Kreiling (1975): Photogrammetric Guide, Herbert Wichmann Verl. Karlsruhe, 58-60.
- Awange J. L., Grafarend E. W. (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation c_7 (3) problem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.
- Awange J. L., Grafarend E. W. (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.
- Awange J. L., Grafarend E. W. (2003b): Journal of Geodesy, 77, 66-76.
- Horn B. K. P. (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. J. of the Optical Society of America, 4, 629-642.
- Závoti J. (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, VIII, 53-60.
- Závoti J., Jancsó T. (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.