

## A (4,5,4,5) mozaikhoz tartozó kristálynövekedési hányados

Németh László

NymE EMK Matematikai Intézet

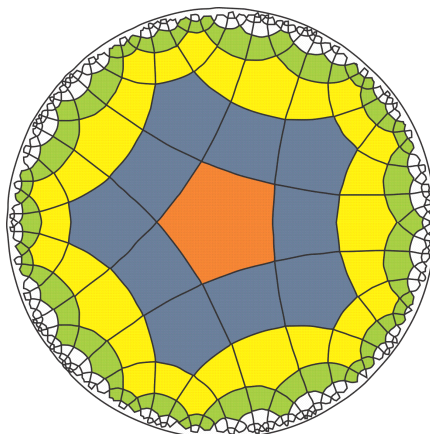
ABSZTRAKT. Ebben a cikkben egy hiperbolikus félig szabályos mozaik, a (4,5,4,5) mozaik kristálynövekedési hányadosát határozzuk meg, amely egy cella köré létrehozott, egymás utáni övezetek elemszámai hányadosainak határértéke.

### 1. Bevezetés

Tekintsünk egy mozaikot. A mozaik egy tetszőleges elemét (vagy egy pontját) tekintsük 0. övezetnek. Az 1. övezet tartalmazza azokat a mozaikelemeket, melyeknek van közös pontja a 0. övezettel. Ezen övezetek köré hozzunk létre további övezeteket a következő rekurzív módon. Az  $(i + 1)$ . övezet álljon azokból a mozaikelemekből, melyeknek van legalább egy közös csúcspontjuk az  $i$ . övezettel, de nincs egyetlen közös pontjuk sem az  $(i - 1)$ . övezettel  $(i > 1)$ . Jelentse  $r_i$  az  $i$ . övezetben levő mozaikelemek (vagy cellák) számát, ekkor a  $\lim_{i \rightarrow \infty} (r_{i+1}/r_i)$  határértéket, Vermes I. javaslatára, a mozaikhoz tartozó kristálynövekedési hányadosnak nevezzük. A hiperbolikus szabályos mozaikok esetében nem csak a síkban ([1], [2], [6]), hanem több dimenziós terekben is kiszámolták már e határérték ([3], [4], [5], [7]). A továbbiakban egy félig szabályos esetre, a hiperbolikus síkbeli (4,5,4,5) mozaikra vizsgáljuk meg a kristálynövekedési hányadost.

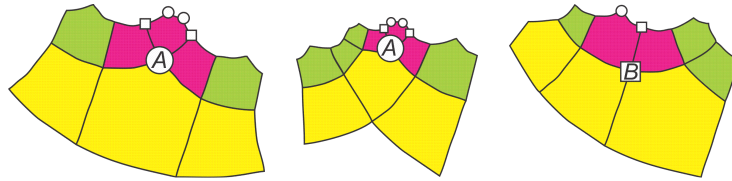
### 2. A 0. övezet egy szabályos ötszög

Tekintsük a (4,5,4,5) félig szabályos hiperbolikus mozaikot. A mozaik minden csúcspontjában kettő szabályos négyszög és kettő szabályos ötszög váltakozva érintkezik. Legyen a 0. övezet a mozaik egy szabályos ötszöge (1. ábra). Az ábrán az első néhány övezet elemei azonos színekkel (azonos árnyalattal) vannak jelölve.



1. ábra

A 0. övezet ötszögének csúcsait nevezzük  $A$  típusú pontoknak. Továbbá az egyes övezeteken lévő minden olyan ötszög pontot  $A$  típusúnak hívunk, melyekhez csak egy  $i$ . övezetbeli mozaikelem tartozik. A másik három elem a következő övezetben van. Legyen az  $i$ . övezeten levő csúcspont  $B$  típusú, ha két  $i$ . és két  $(i + 1)$ . övezetbeli elem közös csúcspontja (2. ábra). Jelölje  $a_i$  az  $i$ . övezetbeli  $A$  típusú pontok számát,  $b_i$  az  $i$ . övezetbeli  $B$  típusú pontok számát. Ekkor az 1. ábra alapján  $a_0 = 5$ ,  $b_0 = 0$  és  $r_0 = 5$ , valamint  $a_1 = 10$ ,  $b_1 = 10$  és  $r_1 = 10$ , továbbá  $a_2 = 25$ ,  $b_2 = 30$  és  $r_2 = 30$ .



2. ábra

**Tétel.** Minden  $i$ -re teljesül, hogy  $a_{i+1} = 2a_i + \frac{1}{2}b_i$ ,  $b_{i+1} = 2a_i + b_i$  és  $r_{i+1} = 2a_i + b_i$ .

**BIZONYÍTÁS.** A fentiek alapján láthatjuk, hogy az állítás  $i = 0$  és  $i = 1$  esetén teljesül. Most tegyük fel, hogy tetszőleges  $i$ -re is igaz a tétel. Az  $i$ . övezet külső határán lévő egyes  $A$  és  $B$  típusú pontokhoz rendeljük hozzá azokat az  $(i + 1)$ . övezet külső határán levő csúcspontokat, melyek mozaik élek számát tekintve a legközelebb vannak az adott ponthoz. Kör, illetve négyzet jelöli ezeket az új  $A$ , illetve  $B$  típusú pontokat (2. ábra). A hozzárendelés az  $A$  pontok esetén egyértelmű, de egy  $B$  ponthoz hozzárendelt új  $A$  típusú pont egy másik  $i$ . övezetbeli ponttól is két „élhossz” távolságra van. Az ilyen pontok számát, a többszöri beszámolás miatt, csak  $\frac{1}{2}$ -es szorzóval vesszük figyelembe az adott  $B$  pontnál. Így adódik, hogy az  $A$  pontok esetén az új  $A$ , illetve  $B$  pontok száma is  $2 \cdot i$ . övezetbeli  $B$  pontok esetén pedig  $1$  és  $\frac{1}{2}$ .

Hasonlóan minden csúcsponthoz csatlakozik a következő övezetből három vagy kettő mozaik elem. Egy tetszőleges  $A$  pont esetén egy mozaik cella (szabályos ötszög) csatlakozik kizárólag a tekintett ponthoz, a másik kettő cella mindegyike egy-egy további  $i$ . övezetbeli ponthoz is csatlakozik. Hasonlóan az előzőekhez, a multiplicitás elkerülése végett, csak a számuk felét vesszük figyelembe a tekintett  $A$  ponthoz, azaz számuk összesen  $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$ . Hasonlóan számolva egy tetszőleges  $B$  pont esetén  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  új cellát kapunk. A 2. ábrán látható eseteken kívül több eset nincs. ■

Az 0. tételben szereplő  $a_i$  és  $b_i$  rekurzív sorozatok közötti összefüggést írjuk fel mátrixos formában. Ekkor

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},$$

ahol

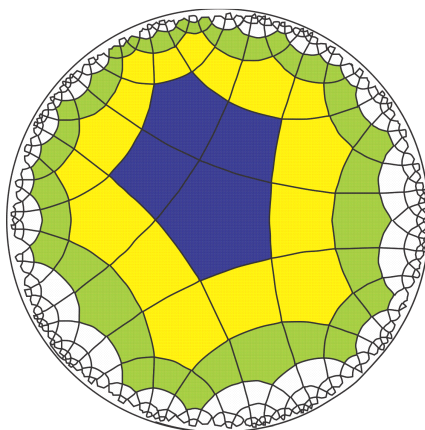
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ismert, hogy a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$  határérték megegyezik az  $\mathbf{M}$  mátrix legnagyobb valós sajátértékével [3] [4] [5]. Ezek a sajátértékek a  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  és a  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , ami bizonyítja a következő tételt.

**1. Tétel.** A (4,5,4,5) hiperbolikus félig szabályos mozaik kristálynövekedési hányadosa  $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6180$ .

## 2. A 0. övezet egy csúcspont

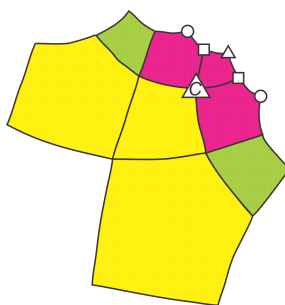
Vizsgáljuk meg a mozaikot arra az esetre, ha a 0. övezetnek egy csúcspontot tekintünk (3. ábra). Ekkor definiálnunk kell egy  $C$  típusú pontot is. Legyen egy  $i$ . övezet külső határán lévő csúcspont  $C$  típusú, ha csak egy  $i$ . övezetbeli négyszögnek csúcspontja. Ekkor a 3. ábra alapján  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $c_0 = 0$  és  $r_0 = 0$ , valamint  $a_1 = 4$ ,  $b_1 = 4$ ,  $c_1 = 2$  és  $r_1 = 4$ , továbbá  $a_2 = 12$ ,  $b_2 = 16$ ,  $c_2 = 2$  és  $r_2 = 16$ .



3. ábra

**3. Tétel.** Minden  $i \geq 1$ -re teljesül, hogy  $a_{i+1} = 2a_i + \frac{1}{2}b_i + c_i$ ,  $b_{i+1} = 2a_i + b_i + 2c_i$ ,  $c_{i+1} = c_i$  és  $r_{i+1} = 2a_i + b_i + 2c_i$ .

**BIZONYÍTÁS.** A tétel bizonyítása teljesen hasonló az 0. tétel bizonyításához. A  $C$  ponthoz hozzá rendelt új csúcspontok számát a 4. ábráról le lehet olvasni. Az ábrán a  $C$  pontokat háromszöggel jelöljük.

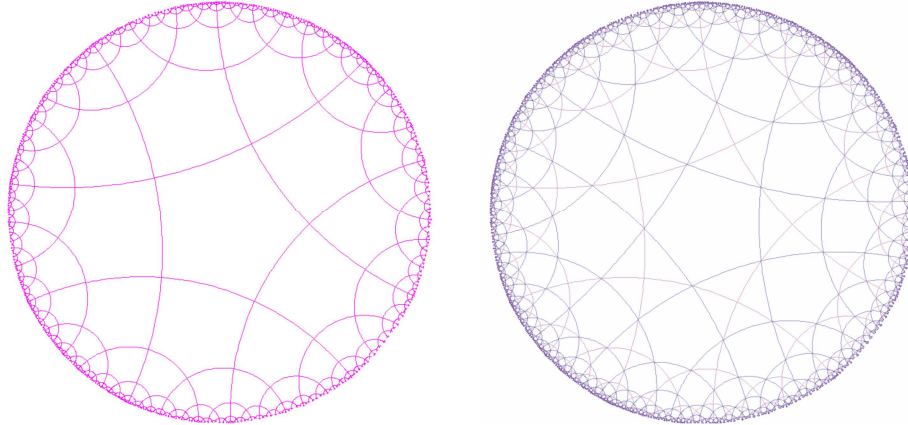


4. ábra

Ebben az esetben kapott  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékei nyilvánvalóan megegyeznek az előző esethez tartozó rekurzió mátrixának sajátértékeivel, tehát a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$  határérték sem adhat más eredményt.

### 3. Az {5,4} szabályos és a (4,5,4,5) félig szabályos hiperbolikus mozaikok összehasonlítása

A (4,5,4,5) félig szabályos mozaik az {5,4} szabályos hiperbolikus mozaikból csonkolással származtatható. Ha az {5,4} mozaik minden ötszögét a szomszédos oldalfelező pontok által meghatározott egyenesek mentén levágjuk és a kapcsolódó levágott részeket egyesítjük a négyszögekből és ötszögekből álló mozaikot kapjuk. Ez az 5. ábrán jól látható.



5. ábra

Ha a (4,5,4,5) mozaik minden négyzetét az átlóik mentén felvágjuk háromszögekre és a szomszédos ötszögekkel egyesítjük, akkor az {5,4} mozaikot kapjuk. Felmerülhet a kérdés, hogy mivel a két mozaik egymásból származtatható, a szerkezetük nagyon hasonló, esetleg a kristálynövekedési hányadosuk is megegyezik. Mégis, [1] és [5] alapján az {5,4} mozaik kristálynövekedési hányadosa  $2 + \sqrt{3}$ , ami nem egyezik meg a fent kiszámolttal.

### Irodalomjegyzék

- [1] Horváth, J., Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene, Annales Univ. Sci., Budapest, Sectio Math. 7 (1964), 49-53.
- [2] Kárteszi, F., Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene, Publ. Math., Debrecen, 5 (1957), 142-146.
- [3] Németh, L., Combinatorial examination of mosaics with asymptotic pyramids and their reciprocals in 3-dimensional hyperbolic space, Studia Sci. Math., 43 (2), Budapest, (2006), 247-265.
- [4] Németh, L., On the 4-dimensional hyperbolic hypercube mosaic, Publ. Math., Debrecen, Publ. Math. 70/3-4, (2007), 291-305.
- [5] Németh, L., Crystal-growing ration of the hyperbolic honeycombs with bounded cells, (közlésre leadva).
- [6] Vermes, I., Über die Parkettierungsmöglichkeit der hyperbolischen Ebene durch nicht-total asymptotische Vielecke. Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle, 1 (1971), 9-13.
- [7] Zeitler, H., Über eine Parkettierung des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes, Annales Univ. Sci., Budapest, Sectio Math. XII (1969), 3-10.