Matematikai Közlemények
II. kötet, 2014

Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai

Péntek Kálmán
NymE TTK, Matematika és Fizikai Intézet
pentek@ttk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozat a szférikus csillagászattal foglalkozik és bemutat egy, a Nap égbolton történő mozgását szemléltető forgatható korongot (univerzális asztrolábiumot). A készülék első verzióját Philippe de la Hire (1640-1718) alkotta meg 1701-ben. A készülék modern és átdolgozott változatát e cikk szerzője készítette el. Azokat a legfontosabb csillagászati és földrajzi feladatokat érintjük, amelyek ezen eszközzel könnyen megoldhatóak.

ABSTRACT. In the paper, we present the spherical astronomy tool – called rotable daily arc plate (universal astrolabe) – which represents the moving of the Sun in the sky. The first version of this tool was made by Philippe de la Hire (1640-1718) in 1701. The modern and improved version was designed by the author of this paper. We present the most important astronomical and geographical processes, which we can easily solve by the using of this tool.

1. Bevezetés

Pergai Apollóniosz (Kr. e. 265-190) görög matematikus és csillagász Alexandriában tevékenykedett, megalkotta a Kónika (Kúpszeletek) c. 8 kötetes művét, s kortársaitól méltán érdemelte ki a Megasz Geometrosz, vagyis Nagy Geométer nevet. Kr. e. 200 körül konstruálta meg a klasszikus planiszférikus asztrolábium nevű csillagászati mérőeszközt. A műszert a középkorban arab matematikusok tökéletesítették és fejlesztették tovább.

Ez az asztrolábium rögzített földrajzi szélességen ábrázolja az égboltot sztereografikus vetületben. Segítségével – mint analóg számítógéppel – megoldhatók szférikus csillagászat klasszikus alapfeladatai. Ezek az eszközök fémből készültek művészi finomságú kivitelben, használatukkal eredményesen tájékozódtak a hajósok a tengeren, de mérnöki, építészeti feladatok megoldása során is eredményesen alkalmazták.

1. ábra. Planiszférikus asztrolábium

Az asztrolábium bármely földrajzi szélességen alkalmazható változatát – az univerzális asztrolábiumot – Gemma Frisius (1508-1588) dolgozta ki. A műszer vetületi rendszere itt is a sztereografikus projekció volt ekvatoriális nézetben. Az univerzális asztrolábium egy másik változatát fejlesztette ki 1551-ben Juan de Rojas y Sarmiento, ő ortografikus vetületi rendszerrel dolgozott szintén ekvatoriális nézetben.

a. b. c.

2. ábra. a. A Gemma Frisius-féle univerzális asztrolábium; b. A Juan de Rojas-féle univerzális asztrolábium; c. A Philippe de la Hire-féle univerzális asztrolábium

Mindkét univerzális asztrolábium két rétegben ábrázolja az éggömböt, azonban az égi egyenlítő mentén elhelyezkedő szögskála a sztereografikus projekciónál az asztrolábium korongjának pereme felé ritkul, míg az ortografikus projekciónál a perem felé haladva sűrűsödik. Az univerzális asztrolábiumok használata akkor lett volna lényegesen pontosabb és eredményesebb, ha skálázása a vetületi rendszerben jó közelítéssel lineáris lehetett volna.

A lineáris skálázás problémáját Philippe de la Hire (1640-1718) francia matematikus és csillagász oldotta meg, amikor 1701-ben publikálta a vertikális perspektív projekción alapuló univerzális asztrolábiumát, magát az eszközt pedig Nicholas Bion (1652-1733) műszertervező konstruálta meg. A csillagászati és navigációs számítások elterjedésével, a logaritmus használatával az asztrolábiumok kezdtek háttérbe szorulni, viszont la Hire vetületét több világtérképen is alkalmazták [3].

A XIX. században a közép- és felsőfokú oktatásban megjelentek az asztrolábiumok szerkesztési elvein alapuló, általában kartonból készült csillagászati taneszközök. Francia és német mintára hazánkban a de Rojas-féle asztrolábiumon alapuló forgatható napi ív korongot fejlesztett ki Lóskay Miklós 1904-ben. A Magyar Földrajzi Intézet által kiadott taneszközéhez az útmutató füzetet Kövesligethy Radó (1862-1934) csillagász készítette el 1903-ban. A Lóskay-féle korong modern változatát e dolgozat szerzője készítette el, azonban a la Hire-projekció ismeretében szükségesnek tűnik az eszköz finomítása, átdolgozása [1], [2], [4], [5].

2. A vertikális perspektív projekció

A fejezet címében szereplő eljárás egy olyan leképezés család, amelynek alapfelülete egy egységnyi sugarú gömbfelület (Földgömb, éggömb) egyik félgömbje (Földgömb keleti félgömbje, keleti éggömb), képfelülete a félgömb peremkörének síkja (Földgömb kezdő meridiánjának síkja, éggömb égi merediánjának síkja). A vetítés centruma pedig az alapfelület félgömbjének szimmetria középpontjából induló, a képfelület körlemezének középpontján áthaladó félegyenesen fekvő, a kiindulási gömbfelület tetszőleges, de rögzített külső, pontosabban nem belső pontja.

Speciálisan, ha a vetítés centruma az alapfelület szimmetria középpontjának éppen átellenes gömbi pontja, akkor a leképezés a közismert sztereografikus projekció. Ha viszont a vetítés centruma a fentiekben szereplő félegyenes mentén minden határon túl eltávolodik a kiindulási gömbfelülettől, akkor jutunk az ortografikus projekcióhoz [6], [7].

A vertikális perspektív projekció vetítési egyenleteinek tárgyalásánál az alapfelület pontjait a Földgömb esetében (λ, φ) földrajzi koordinátákat alkalmazva a

$$P(x,y,z) = P(\cos\varphi \cdot \cos\lambda, \cos\varphi \cdot \sin\lambda, \sin\varphi), \qquad (1)$$
$$0° < \lambda < 180°, -90° < \varphi < 90°$$

módon jellemezhetjük.

Ekkor a képfelület (x, z) síkját az $y = 0$ egyenlettel írhatjuk le, a vetítés centrumát pedig a $C(0,-d,0), d \geq 1$ koordináták jellemzik. Ekkor az alapfelület (1) összefüggésben szereplő P pontjának P' képét úgy határozhatjuk meg, mint a PC vetítősugár és az $y = 0$ képsík metszéspontját.

Számításaink eredményeként a

$$P'(x',0,z') = P'\left(\frac{\cos\varphi\cdot\cos\lambda}{\frac{\cos\varphi\cdot\sin\lambda}{d}+1}, 0, \frac{\sin\varphi}{\frac{\cos\varphi\cdot\sin\lambda}{d}+1}\right), \qquad (2)$$
$$0° < \lambda < 180°, -90° < \varphi < 90°$$

összefüggések adódnak, tehát esetünkben a vertikális perspektív projekció leképezési egyenletei az

$$x' = \frac{\cos\varphi\cdot\cos\lambda}{\frac{\cos\varphi\cdot\sin\lambda}{d}+1}, \quad z' = \frac{\sin\varphi}{\frac{\cos\varphi\cdot\sin\lambda}{d}+1} \qquad (3)$$

alakban írhatók fel.

Speciálisan a sztereografikus projekció leképezési egyenletei $d \to 1, d \geq 1$ esetben

$$x' = \frac{\cos\varphi\cdot\cos\lambda}{\cos\varphi\cdot\sin\lambda+1}, \quad z' = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cdot\sin\lambda+1}, \qquad (4)$$

az ortografikus projekció leképezési egyenletei $d \to \infty$, $d \geq 1$ esetben pedig az

$$x' = \cos\varphi \cdot \cos\lambda\,, \quad z' = \sin\varphi \tag{5}$$

alakot öltik.

Tetszőleges $d \geq 1$ esetén az alapfelület félegyenlítőjének egyik felét azon (λ, φ) földrajzi koordináták jellemzik, amelyekre $0° < \lambda \leq 90°$ és $\varphi = 0°$. Ezen negyedkör vetülete

$$x' = \frac{\cos\lambda}{\frac{\sin\lambda}{d}+1}\,, \quad z' = 0, \tag{6}$$

amely a képfelület körlemezének egy sugara és teljesül a $0 \leq x' \leq 1$ egyenlőtlenség is. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora d érték esetén képződik le ezen egyenlítő negyedkörének $\lambda = 45°$ értékhez tartozó középpontja a képszakasz felezőpontjára; vagyis milyen d esetén áll fenn a

$$\frac{\cos 45°}{\frac{\sin 45°}{d}+1} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

összefüggés. Egyenletünk megoldásaként könnyen adódik a

$$d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}7071 \tag{8}$$

érték.

Teljesen hasonlóan tetszőleges $d \geq 1$ estén az alapfelület centrálmeridiánjának egyik felét azon (λ, φ) földrajzi koordináták jellemzik, ahol $\lambda = 90°$ és $0° \leq \varphi < 90°$. Ezen negyedkör vetülete

$$x' = 0\,,\ z' = \frac{\sin\varphi}{\frac{\cos\varphi}{d}+1}\,, \tag{9}$$

amely mentén a képfelület körlemezének egy, az előző (6) összefüggésen szereplő sugarára merőleges másik sugár, teljesül továbbá a $0 \leq z' \leq 1$ egyenlőtlenség is. Vizsgáljuk meg most is, hogy mekkora d érték estén képződik le ezen centrálmeridián félkörének $\varphi = 45°$ értékhez tartozó középpontja a képszakasz felezőpontjára, tehát milyen d esetén áll fenn a

$$\frac{\sin 45°}{\frac{\cos 45°}{d}+1} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

összefüggés. Egyenletünk megoldásaként a (7) összefüggéssel analóg módon egyszerűen adódik szintén a

$$d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}7071 \tag{11}$$

érték.

Mindkét esetben tehát azt nyertük, hogy közelítőleg 1,7071 sugárnyi távolságból vetítve teljesül mindkét kirótt feltétel.

Figyeljük meg, hogy a (6) és (9) összevetésével érvényes tetszőleges $0° \leq \alpha \leq 90°$ esetén a

$$z'(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\frac{\cos(90° - \alpha)}{d}+1} = \frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{d}+1} = x'(\alpha) \tag{12}$$

összefüggés. Most 10°-os sűrűséggel kiszámítva ezek értékeit az 1. táblázatot nyerjük.

Megvizsgálva az értékeket megállapíthatjuk, hogy gyakorlatilag 2 tizedes jegy pontossággal a skála mindkét „tengely" mentén a képsíkon lineáris.

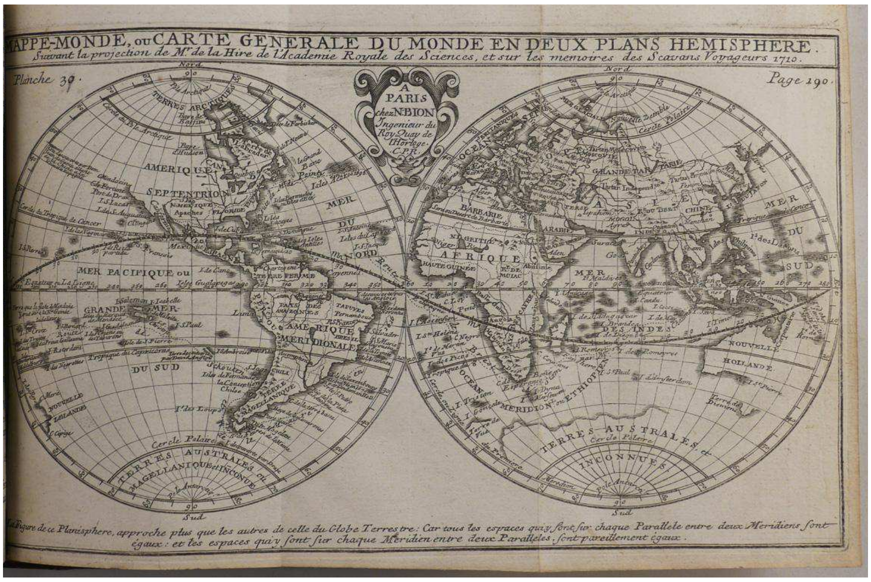
$\alpha[°]$	$z'(90° - \alpha) = x'(\alpha)$
0°	1
10°	0,8939
20°	0,7829
30°	0,6698
40°	0,5565
50°	0,4437
60°	0,3317
70°	0,2206
80°	0,1101
90°	0

1. táblázat

A képsíkban az egyenlítő és centrálmeridián merőleges átmérőpárját megvizsgálva könnyen megállapíthatjuk az alábbi szimmetriákat is:

$$x'(180° - \lambda) = -x'(\lambda),\ \ 0° < \lambda \leq 90° \ \text{ és } \ z'(-\varphi) = -z'(\varphi),\ \ 0° \leq \varphi < 90°. \quad (13)$$

A $d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ értékhez tartozó vertikális perspektív projekciót Philippe de la Hire alkotta meg és írta le 1701-ben. A vetület alapján szerkeszthető asztrolábium és világtérkép is. A földrajzi fokhálózatot megvizsgálva könnyen megállapíthatjuk, hogy az egyenlítő és a centrálmeridián képe egy merőleges átmérőpárként jelenik meg a vetületen, a paralelkörök, valamint a meridiánok képei is ellipszis ívek lesznek.



3. ábra. A Philippe de la Hire-féle világtérkép

A Philippe de la Hire-féle vetület alapján megszerkesztett forgatható napi-ív korong megkonstruálása és a vele való csillagászati oktatás tapasztalatainak megállapítása a közeljövő feladata lesz.

A Philippe de la Hire-féle vetület alapján megépített forgatható csillagászati koronggal számos csillagászati földrajzi feladatot oldhatunk meg könnyedén. Ilyenek például a Nap delelési magasságának és éjféli mélységének meghatározása az év egy tetszőleges napján, a Nap delelési és nyugvási időpontjának meghatározása az év egy tetszőleges napján, a nappal, a szürkület és az éjszaka időtartamának meghatározása az év egy adott napján. Mindezek és még számos feladat is bármely földrajzi szélességű helyen könnyedén megoldható. E problémák részletes tárgyalása azonban messze meghaladja e dolgozat kereteit. Ezek részletes bemutatásával a jövőben kívánunk foglalkozni.

Irodalomjegyzék

[1] **Kövesligethy, R.,** Használati utasítás Lóskay Miklósnak a Nap és a csillagok járását a Föld tetszőleges helyén feltüntető napi-ív-korongjához, Magyar Földrajzi Intézet Rt., Budapest (1903) 15.

[2] **Lóskay, M.,** A Nap és a csillagok járása a Föld tetszőleges helyén, Magyar Földrajzi Intézet Rt., Budapest (1904) 2.

[3] **Morrison, J. E.,** The Astrolabe, Ed. Janus (2010) 437.

[4] **Péntek, K.,** Ábrázoló geometriai módszerek alkalmazása a szférikus csillagászatban: az ortografikus meridián projekció, *NymE SEK Tudományos Közleményei XVII. Természettudományok 12* (2010) 27-49.

[5] **Péntek, K.,** Az ortografikus meridionális vetületi rendszeren alapuló csillagászati készülék: a Nap évi mozgását bemutató forgatható korong, *NymE SEK Tudományos Közleményei XVIII. Természettudományok 13* (2012) 37-64.

[6] **Snyder, J. P. – Voxland, Ph. M.,** An Album of Map Projections, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, Denver (1989) 249.

[7] **Stegena, L.,** Vetülettan, Tankönyvkiadó, Budapest (2010) 231.