

## Trigonometrikus polinom-becslések a gyakorlatban

**Kalmár János**  
MTA CSFK GGI  
kalmar@ggki.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Intézetünkben gyakran előfordul, hogy változó időközönként mért adatsorokból a további adatfeldolgozás sűrűbb mintavételt igényel. Ennek kielégítésére több, ismert approximációs, illetve interpolációs módszert is kipróbáltunk. Tapasztalataink szerint a trigonometrikus polinomokkal történő approximáció jó hatékonysággal alkalmazható a geomágneses bázisvonal becslésére, a mérési hibák kimutatására, és akár egy Excel táblázatkezelővel is kivitelezhető megoldást kínál.

**ABSTRACT.** In our institute it often occurs, that at varying intervals measured data sets the data processing needs a denser sampling of the data. For that purpose we have tried more known approximation and interpolation methods. According to our experiences the trigonometric polynomial approximation can be used with good effectiveness for estimating geomagnetic base line measurements, for gross error detection, and is a feasible method even by applying an Excel spreadsheet.

### 1. Bevezetés

Intézetünk több obszervatóriumot üzemeltet, ahol különböző geodéziai és geofizikai mérések folynak, egyrészt nemzetközi és hazai adatbázisok feltöltésére, másrészt az intézeti kutatómunka támogatására. A vizsgált esetben az általában hetente egyszer mért geomágneses bázisvonal adatokból (1. ábra) a további adatfeldolgozáshoz napi értékeket kellett levezetnünk, mely célra több, ismert approximációs, illetve interpolációs módszert is kipróbáltunk: a Hermite és természetes köbös spline végeselem interpolációt, és a közönséges, illetve trigonometrikus polinomokkal történő approximációt.

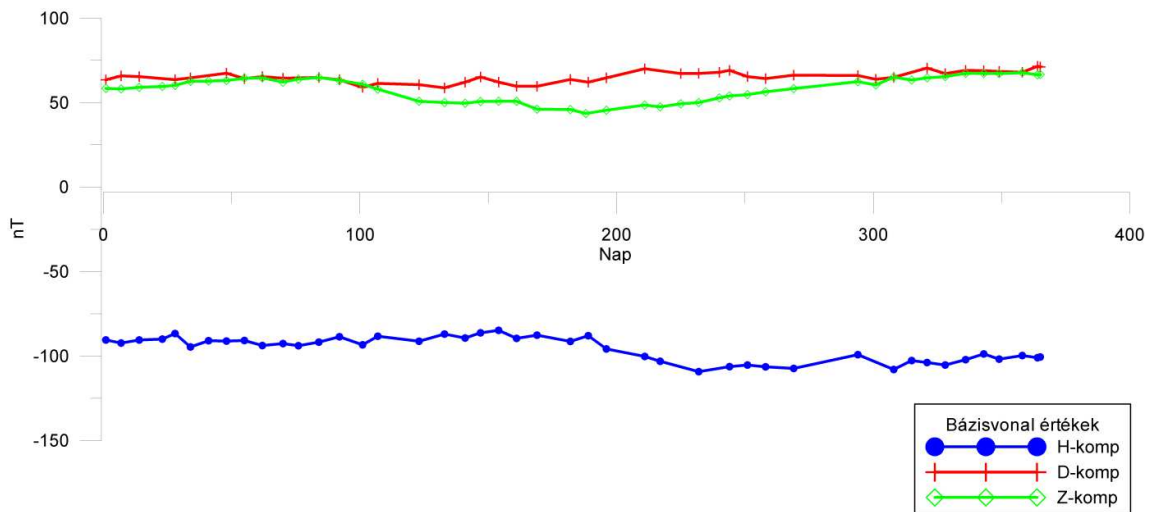
A matematikai analízis [2] garantálja, hogy a felsorolt módszerek határértékben képesek a (folytonosnak és differenciálhatónak feltételezett) keresett függvényt előállítani, azaz bármely hibafeltételt kielégíthetünk a fokszámot elég nagyra választva.

### 2. A kipróbált becslő eljárások sajátosságai

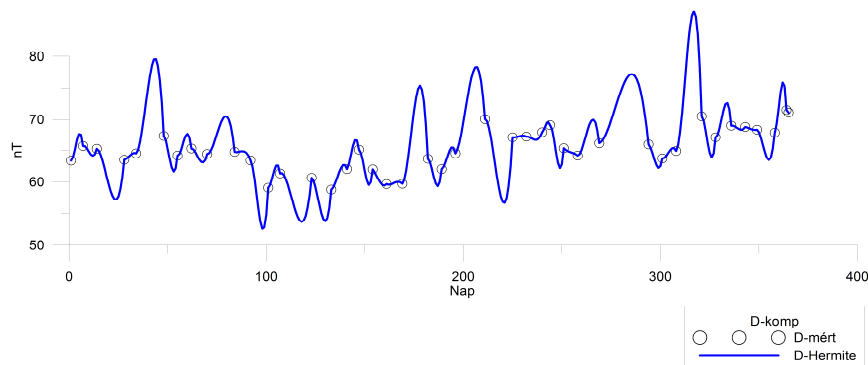
A Hermite típusú interpoláció szakaszonként harmadfokú polinomokkal becsli a keresett függvényt úgy, hogy előírja a polinom illeszkedését a mért adatokra, illetve a deriváltakra a szakaszok végpontjaiban (szakaszonként 4 feltétel a 4 paraméterre). Kivitelezéséhez az alappontokban a derivált értékét lineáris vagy másodfokú függvényillesztéssel szokták becsülni. Sajnos azt tapasztaltuk (2. ábra), hogy ez az interpoláció a szakaszokon belül abnormálisan nagy hullámokat (kilengéseket) okozhat.

A természetes köbös spline interpoláció is szakaszonként harmadfokú polinom függvényt illeszt, az alappontokban biztosítja a mért értékekre illeszkedést, illetve az első és második

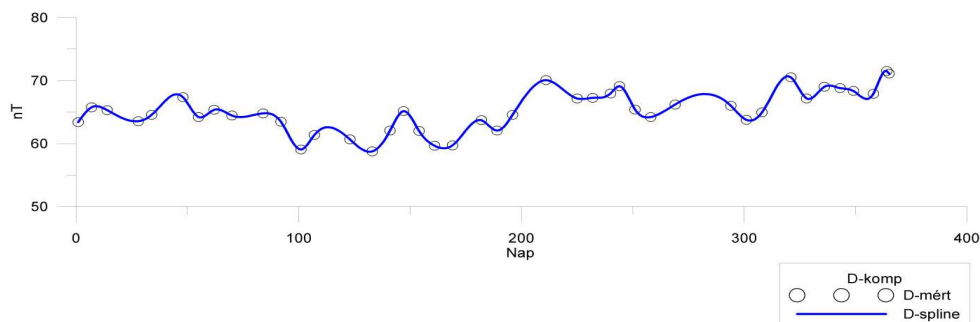
deriváltak folytonosságát a belső mérési pontokban. Nagyon kedvező illeszkedést biztosít (3. ábra), de hátránya, hogy olyan nagyméretű feltételi egyenletrendszerhez ( $m$  alappont esetén  $4 \cdot (m-1)$  változóhoz) vezet, melynek nincs lokális (kis műveletigényű) megoldása.



1. ábra. A három komponensű geomágneses bázisvonal mérések 2013. évi diagramja



2. ábra. A 2013. évi D komponens *Hermite*-féle végeselem becslésének diagramja



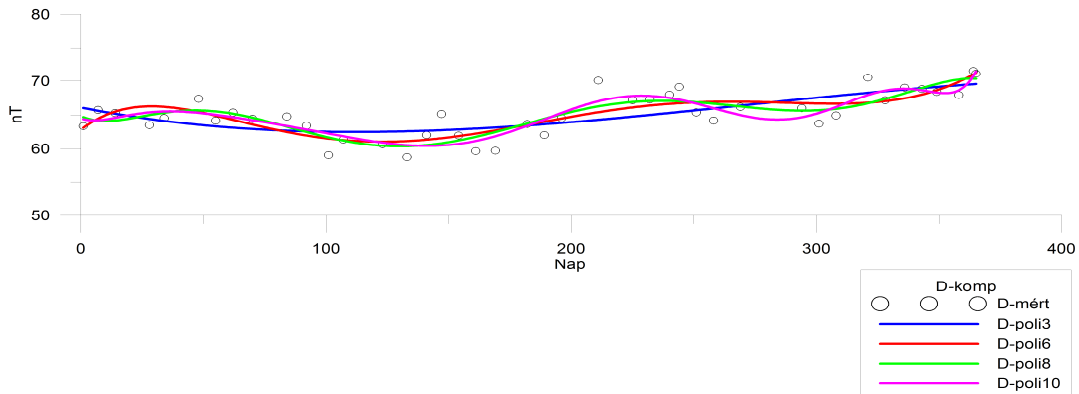
3. ábra. A 2013. évi D komponens köbös *spline* becslésének diagramja

A teljes adatsorra (1) képletű közönséges polinom-interpolációt alkalmazva az összes ( $m$ )

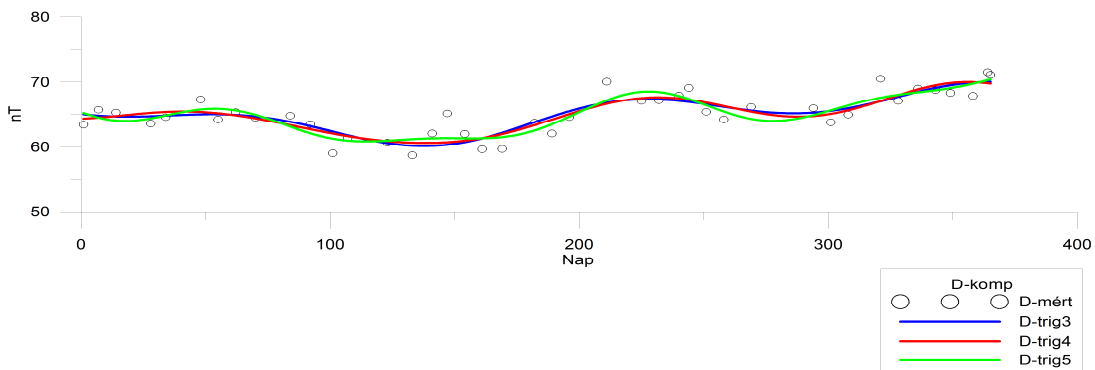
$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n \quad (1)$$

alapontra illeszkedés feltétele elfogadhatatlanul magas polinom-fokszámhoz ( $m-1$ ), és közel szinguláris mátrixhoz vezet, amit a Hermite interpolációnál látott kiszámíthatatlan kilengések

kísérnek. Viszont ha ötnél kisebb a becslő polinom fokszáma, akkor nagyon leegyszerűsített, az alappontokra rosszul illeszkedő becslést (és görbét) kapunk (4. ábra).



4. ábra. A 2013. évi D komponens 3-6-8-10 fokú polinomos becsléseinek diagramja



5. ábra. A 2013. évi D komponens 3-4-5 fokú trigonometrikus polinom-becsléseinek diagramja

Ha a teljes adatsorra a (2) trigonometrikus polinom-approximációt alkalmazzuk, akkor a trigonometrikus sor fontos (abszolút-értékben legnagyobb  $a_n, b_n$  együtthatójú) tagjait kiválasztva kevés bázisfüggvénnyel is jó becslést kapunk (5. ábra).

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n \geq 1} \{ a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) \} \tag{2}$$

Sajnos az  $a_n, b_n$  amplitúdókat tulajdonképpen a Fourier transzformációból ismert képletek szerint kellene számolni:

$$a_0 = \int_{[-\pi; \pi]} f(t) dt / (2\pi); \quad a_n = \int_{[-\pi; \pi]} f(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt / \pi; \quad b_n = \int_{[-\pi; \pi]} f(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt / \pi.$$

Ezen képletek diszkrét pontokban ismert függvényekre módosított FFT (Fast Fourier Transform) alakjai sem sokkal egyszerűbbek, bár az FFT már több igényes programcsomag (pl. MatLab, Maple V) beépített szolgáltatása. A szokásos eljárás az  $a_n, b_n$  amplitúdók FFT meghatározása után az, hogy kiválasztjuk a legnagyobb  $|a_n|, |b_n|$  együtthatókat, és a becslő függvényben csak az ezekhez tartozó bázisfüggvényeket szerepeltetjük, mert a többi tagnak már nincs lényeges befolyása az illesztés pontosságára (a  $\sin$  és  $\cos$  bázisfüggvények mindenütt  $[-1; 1]$  korlátosak, ami nem igaz a közönséges polinomokra!).

Az FFT elkerülése végett lazítottunk az elméleti szigoron, és feltételeztük, hogy ismert a becslő trigonometrikus polinom legfontosabb hullámhossza (vagy alapfrekvenciája), és a bázisfüggvényként csak öt, illetve néhány felharmonikusát használjuk. A harmadfokú trigonometrikus polinom-approximációnál pl. a következőképpen néznek ki az illesztési feltételek:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot \cos(x_i) + b_1 \cdot \sin(x_i) + a_2 \cdot \cos(2x_i) + b_2 \cdot \sin(2x_i) + a_3 \cdot \cos(3x_i) + b_3 \cdot \sin(3x_i), \quad i=1, \dots, m. \quad (3)$$

A (3) feltételek alapján a trigonometrikus sor  $a_n$ ,  $b_n$  amplitúdói már FFT nélkül is meghatározhatók ([1], illetve ld. a következő fejezetet), pl. a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva. Érdekes még bevezetni a (3) approximáció hibavektorának  $dt_3$  euklideszi normáját:

$$dt_3 = [\sum_{[1..m]} \{y_i - (a_0 + a_1 \cdot \cos(x_i) + b_1 \cdot \sin(x_i) + a_2 \cdot \cos(2x_i) + b_2 \cdot \sin(2x_i) + a_3 \cdot \cos(3x_i) + b_3 \cdot \sin(3x_i))\}^2]^{1/2}, \quad i=1, \dots, m. \quad (4)$$

A hibavektor  $dt_3$  hossza tájékoztat arról, adott alaphullámhossz és (3) illesztési feltételek mellett milyen pontos a becslés a mérési pontokban. Megfelelő skálázás (alaphullámhossz) hiányában a trigonometrikus becslő-polinom egyrészt rosszul illeszkedik a mérési pontokra, másrészt indokolatlanul sok hullámot tartalmazhat. A geomágneses bázisvonal fizikai természete és az adatsor hossza (1 év) alapján úgy gondoltuk, hogy az  $a_1$ ,  $b_1$  paraméterű bázisfüggvények alaphullámhossza kb. 365 nap lesz, és a becslés finomítását majd a felharmonikusok biztosítják az  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$ ,  $b_3$  paraméterekkel. Mindenesetre az alaphullám hosszát átírható paraméternek választottuk, és azt változtatva figyeltük  $dt_3$  viselkedését, hogy a polinom fokszámának emelése nélkül határozzuk meg a legjobb becslést, vagyis  $dt_3$  minimumát kerestük az alaphullámhossz függvényében.

### 3. Az approximáció megvalósítása Excel táblázatkezelővel

Adatsorainkat legkényelmesebben táblázatkezelővel (pl. *Excel*) dolgozhatjuk fel, de nincs minden feladatra közvetlen megoldás, beépített függvény. Az *Excel* program alaphelyzetben csak lineáris regresszió (egyenes illesztés) alapú becslésre képes, de több dimenzióban is (síkillesztés a hipertérben), ezért kicsit trükközni kell már a polinomos approximációnál is:

|       | A     | B     | C       | D       | E       | F       | G       | H     |
|-------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 1     | $y_1$ | $x_1$ | $x_1^2$ | $x_1^3$ | $x_1^4$ | $x_1^5$ | $x_1^6$ | $d_1$ |
| 2     | $y_2$ | $x_2$ | $x_2^2$ | $x_2^3$ | $x_2^4$ | $x_2^5$ | $x_2^6$ | $d_2$ |
| ...   | ...   | ...   | ...     | ...     | ...     | ...     | ...     | ...   |
| $m$   | $y_m$ | $x_m$ | $x_m^2$ | $x_m^3$ | $x_m^4$ | $x_m^5$ | $x_m^6$ | $d_m$ |
| $m+1$ | $y$   | $x$   | $x^2$   | $x^3$   | $x^4$   | $x^5$   | $x^6$   |       |

Látható, hogy az  $y_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) mérési eredményeket az A oszlopba, a mérések  $x_i$  időpontjait a B oszlopba, ezek hatványait pedig a C...G oszlopokba írtuk. Írjuk ezután a becslés  $x$  idejét és hatványait az  $m+1$ -dik sorba B-től G-ig, akkor az  $A_{m+1}$  cellában az alábbi képlettel határozhatjuk meg a keresett  $y$  függvény  $x$ -beli értékét:

$$=\text{TREND}(A1:Am;B1:Gm;B_{m+1}:G_{m+1}).$$

Érdekes kiszámolni a H oszlopban a  $d_i$  hibavektor-komponenseket is:

$$=\text{TREND}(A1:Am;B1:Gm;Bi:Gi)-Ai.$$

A  $H$ -beli hibavektor hossza egyrészt lehetővé teszi a becslés pontosságának minősítését, másrészt az ott esetleg előforduló (abszolút értékben) kiugróan magas egyedi értékek a mérések durva hibáira utalnak, mert az approximáció közönséges hibái a normális eloszlást követik.

Most pedig áttérünk a trigonometrikus approximáció *exceles* kivitelezésére. Az  $y_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) mérési eredményeket most is az  $A$  oszlopba, a mérések  $x_i$  időpontjait a  $B$  oszlopba, ezek trigonometrikus bázisfüggvényeit pedig a  $C \dots H$  oszlopokba írtuk. Írjuk ezután a becslés  $x$  idejét és trigonometrikus függvényeit az  $m+1$ -dik sorba  $B$ -től  $H$ -ig, akkor az  $A_{m+1}$  cellában az alábbi képlettel adhatunk trigonometrikus polinom bázisú becslést a keresett  $y$  függvény  $x$ -beli értékére:

$$=TREND(A1:Am;C1:Hm;Cm+1:Hm+1).$$

Érdeemes most is kiszámolni az  $I$  oszlopban a  $d_i$  hibavektor-komponenseket:

$$=TREND(A1:Am;C1:Hm;Ci:Hi)-Ai.$$

|       | A     | B     | C           | D           | E            | F            | G            | H            |
|-------|-------|-------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1     | $y_1$ | $x_1$ | $\cos(x_1)$ | $\sin(x_1)$ | $\cos(2x_1)$ | $\sin(2x_1)$ | $\cos(3x_1)$ | $\sin(3x_1)$ |
| 2     | $y_2$ | $x_2$ | $\cos(x_2)$ | $\sin(x_2)$ | $\cos(2x_2)$ | $\sin(2x_2)$ | $\cos(3x_2)$ | $\sin(3x_2)$ |
| ...   | ...   | ...   | ...         | ...         | ...          | ...          | ...          | ...          |
| $m$   | $y_m$ | $x_m$ | $\cos(x_m)$ | $\sin(x_m)$ | $\cos(2x_m)$ | $\sin(2x_m)$ | $\cos(3x_m)$ | $\sin(3x_m)$ |
| $m+1$ | $y$   | $x$   | $\cos(x)$   | $\sin(x)$   | $\cos(2x)$   | $\sin(2x)$   | $\cos(3x)$   | $\sin(3x)$   |

Az  $I$  oszlopbeli hibavektor hossza egyrészt lehetővé teszi a becslés pontosságának minősítését, másrészt az ott esetleg előforduló (abszolút értékben) kiugróan magas egyedi értékek a mérések durva hibáira utalnak, mert az approximáció közönséges hibái a normális eloszlást követik. A hibavektor hosszát a (4) képlet alapján az  $I_{m+1}$  cellába számoltuk ki, mert az  $x$ -ek skálázásához (az alaphullámhossz meghatározásához) szükség van a hibavektor minimalizálendő hosszképletére. Az alaphullámhossz kezdő értékét ( $2\pi$ ) beírtuk a  $J_{m+1}$  cellába, és  $x$  vektor ( $B$  oszlop) skálázásához olyan lineáris transzformáló képletet használunk, amely  $B_1$ -be 0-t,  $B_m$ -be pedig  $J_{m+1}$  értékét tölti:

$$Bi = J_{m+1} * (x_i - x_1) / (x_m - x_1). \tag{5}$$

Első kísérleteinket az  $I_{m+1}$  cella (hibavektor hossz) minimalizálására a  $J_{m+1}$  cella (alaphullámhossz) kézi átírásával végeztük, amit kényelmetlennek találtuk, és megvizsgáltuk, kiváltható-e valamely beépített *Excel* funkcióval. Egy függvény szélsőértékét az *Excel* közvetlenül nem képes meghatározni, viszont rendelkezik iteratív, egyparaméteres egyenletmegoldó képességgel, az ún. *Célértékkereséssel*, ami az *Adatok/Lehetőségelemzés* blokkban található. Ezen funkciónak 3 paramétere van: hol van a megoldandó képlet ( $I_{m+1}$ )? mi legyen ennek az értéke (0)? és hol van az a változtatható paraméter, amitől a képlet (akárcsak közvetetten) függ ( $J_{m+1}$ )? Természetesen tisztában voltunk vele, hogy ez az egyenlet tulajdonképpen nem megoldható, mert a hibavektor sose lesz nullvektor, de bízunk benne, hogy az *Excel* ott fejezi majd be az iterációt, ahol a képlet értéke legjobban

megközelíti a nullát, vagyis a minimumban – ez a hullámhossz jól megválasztott kezdőértékénél többnyire teljesült is.

#### 4. A becslések pontosságvizsgálata

Az approximációs módszerek összehasonlításánál arra törekedtünk, hogy azonos paraméterszámú eljárásokat használjunk. A harmadfokú trigonometrikus polinomnak a (2) képlet szerint 7 paramétere van:  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ . Ezért a hatodfokú közönséges polinom-becsléssel {(1) képlet} hasonlítandó össze, mert az is 7 paraméteres:  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ . Hasonlóképpen a negyedfokú trigonometrikus polinom-approximációt a nyolcadfokú polinom-becsléssel vetettük össze, mert mindegyik 9 paraméteres, ezért a  $dp_6$  és  $dt_3$ , illetve  $dp_8$  és  $dt_4$  hibavektor normákat hasonlítottuk össze a becslések relatív pontosságának meghatározásakor.

Legrészletesebben a 2013. évi D komponensen vizsgáltuk az approximációk pontosságát. Azt tapasztaltuk, hogy a becsülő közönséges polinom fokszámát emelve a hibavektor hossza lépésenként eleinte 10%-ot csökkent, de ez a javulás később 3% alá esett.

A 7, 9 és 11 paraméteres ( $n=3, 4, 5$  fokú) trigonometrikus polinomokat is illesztettünk a D komponensre a *TREND* függvényvel és alaphullámhossz optimalizálással, és rendre rövidebb hibavektort kaptunk, mint a nekik megfeleltetett,  $n=6, 8, 10$  fokú közönséges polinomoknál. A különbség közel 5%-nak adódott, ami úgy is értelmezhető, hogy a közönséges polinom- becslés kettővel több paraméter használata esetén éri el a trigonometrikus polinom-becslés pontosságát. Mindezek mellett az alaphullámhossz meghatározása (és meghatározottsága) elméleti jelentést is hordozhat, hiszen a geomágneses bázisvonal ciklikus tulajdonságának alapfrekvenciáját szolgáltatja. Ezután a 2013. évi H és Z komponenseket is bevontuk a vizsgálatba, és az adódott, hogy az alaphullámhossz a (407; 475) napos intervallumba esik, azon belül is az alacsonyabb értékek minden komponensben a magasabb fokszámú trigonometrikus becsléseknél adódtak. Kiderült, hogy a hibavektorok hossza nem haladja meg a 16 egységet. A *D* adatsornál kapott becslési hibákat az 2. táblázat foglalja össze.

Miután a 2013 évi adatokat így feldolgoztuk, a rendelkezésre álló további 2009-2014 évi adatokat már csak a tizedfokú polinom-becsléssel, illetve a harmad és negyedfokú trigonometrikus polinom-becsléssel vizsgáltuk meg 3 szempont szerint:

- a. Az alaphullámhossz hogyan változik az évek során?
- b. A hibavektor hossza hogyan változik az évek során?
- c. Lehet-e következtetni a hibavektorból a hibás mérésekre?

A vizsgálatok eredményeit az 1. táblázatban foglaltuk össze. Jól látszik, hogy 2012-ben a *D* komponens, 2014-ben pedig a *H* és *D* komponensek hibavektora feltűnően hosszú a többi komponenshez képest.

Ebből arra következtettünk, hogy ezen években a kiugró komponensek durva mérési hibákat tartalmaznak, melyek pozícióját a hibavektorban látható kiugrások révén találtuk meg. Ezután ellenőriztük a mérések eredeti dokumentációját, vajon igaz-e a sejtésünk a durva hibák előfordulását illetően? A kézi egyeztetések révén a 13 gyanús alappontból 11 bizonyult ténylegesen hibásnak, melyek közül tízet töröltünk és egyet javítottunk Szendrői J. munkatársunk segítségével.

A javított mérésekre alkalmazott becslések ezután már jobban illeszkedtek (csökkent a hibavektorok hossza), a *Z* komponens viszont alig változott, mert ott csak egy adatot kellett törölni (részletekért ld. az 1. táblázat).

Nem csak évenként külön, hanem a teljes időtartamra nézve is elvégeztük a komponensek becslését, melynek eredményét az 1. táblázat Össz rovata mutatja be. Kiderült, hogy az alap

hullámhossznál nem egy évből, hanem a teljes mérési adatsorból (6 év) célszerű kiindulni, illetve az összesített  $Z$  komponens hibavektorának hossza több mint duplája az éves hibavektorok összhosszának, ami felettébb különös, és arra gondolunk, hogy az évek egymáshoz illesztésekor történt eltolódás okozza a rosszabb illeszkedést.

| ÉV   |   | EREDETI MÉRÉSEK |        |              |              |              | JAVÍTOTT MÉRÉSEK |        |        |        |        |
|------|---|-----------------|--------|--------------|--------------|--------------|------------------|--------|--------|--------|--------|
|      |   | trig3h          | trig4h | trig3e       | trig4e       | poli10       | trig3h           | trig4h | trig3e | trig4e | poli10 |
| 2009 | H | 465             | 410    | 6,8          | 6,56         | 6,56         | 465              | 410    | 6,8    | 6,56   | 6,56   |
|      | D | 2480            | 2480   | 5,2          | 4,3          | 4,26         | 2480             | 2480   | 5,2    | 4,3    | 4,26   |
|      | Z | 380             | 390    | 7            | 6,87         | 6,98         | 380              | 390    | 7      | 6,87   | 6,98   |
| 2010 | H | 350             | 349    | 9,09         | 8,6          | 8,66         | 350              | 349    | 9,09   | 8,6    | 8,66   |
|      | D | 353             | 355    | 4,4          | 4,26         | 4,47         | 353              | 355    | 4,4    | 4,26   | 4,47   |
|      | Z | 402             | 412    | 9,21         | 8,69         | 8,92         | 402              | 412    | 9,21   | 8,69   | 8,92   |
| 2011 | H | 402             | 455    | 7,63         | 7,56         | 7,56         | 402              | 455    | 7,63   | 7,56   | 7,56   |
|      | D | 5000            | 1467   | 4,33         | 4,29         | 4,27         | 5000             | 1467   | 4,33   | 4,29   | 4,27   |
|      | Z | 600             | 425    | 8,9          | 8,69         | 8,76         | 600              | 425    | 8,9    | 8,69   | 8,76   |
| 2012 | H | 428             | 2434   | 9,56         | 9,09         | 9,03         | 428              | 2434   | 9,56   | 9,09   | 9,03   |
|      | D | 7211            | 7211   | <u>17,96</u> | <u>17,96</u> | <u>17,95</u> | 9958             | 14091  | 12,9   | 12,9   | 12,9   |
|      | Z | 856             | 402    | 12,18        | 11,64        | 11,35        | 856              | 446    | 10,13  | 9,6    | 8,81   |
| 2013 | H | 416             | 412    | 15,95        | 15,71        | 15,5         | 416              | 401    | 14,32  | 13,55  | 13,55  |
|      | D | 462             | 419    | 10,8         | 10,6         | 10,2         | 462              | 419    | 10,8   | 10,6   | 10,2   |
|      | Z | 475             | 407    | 9,04         | 8,08         | 8,55         | 475              | 407    | 9,04   | 8,08   | 8,55   |
| 2014 | H | 4,22            | 4,22   | <u>13,22</u> | <u>11,51</u> | <u>16,65</u> | 3,47             | 3,47   | 10,98  | 6,73   | 10,04  |
|      | D | 98              | 98     | <b>32,22</b> | <b>26,63</b> | <b>32,09</b> | 94               | 94     | 7,85   | 7,77   | 9,03   |
|      | Z | 279             | 246    | 3,68         | 3,6          | 3,67         | 279              | 246    | 3,68   | 3,6    | 3,67   |
| Össz | H | 2603            | 2700   | 66,95        | 65,27        | 64,71        | 2590             | 2700   | 66,01  | 64,11  | 63,6   |
|      | D | 71311           | 5300   | 49,3         | 48,36        | 49,3         | 46856            | 5300   | 31,59  | 30,57  | 30,45  |
|      | Z | 2226            | 2100   | 108,92       | 102,16       | 101,26       | 2226             | 2052   | 108,45 | 101,5  | 100,8  |

1. táblázat. A trigonometrikus becslések alaphullám hosszai (trig3h, trig4h), és a hibavektorok (trig3e, trig4e, poli10) nagysága évenként és komponensenként

## 5. Összefoglalás

Intézetünkben az általában hetente egyszer mért (meghatározott) geomágneses bázisvonal adatokból a további adatfeldolgozáshoz napi becsléseket kell meghatározni, mely célra több, ismert approximációs, illetve interpolációs módszert is kipróbáltunk: a Hermite és a köbös spline végeselem interpolációt, illetve az approximációt közönséges és trigonometrikus polinomokkal.

A köbös (harmadfokú), Hermite féle végeselem interpolációt elvetettük, mert a valóságtól idegen kilengéseket produkált. A hasonlóan harmadfokú spline interpoláció túl sok (szakaszonként 4) paramétert igényel, és a hozzátartozó lineáris egyenletrendszer megoldása nagy műveletigényű, bár kedvező megoldást adott. A közönséges polinom-approximáció csak legalább nyolcadfokú (9 paraméteres) polinom használata esetén tudta visszaadni a adatsorok finomszerkezetét. A trigonometrikus polinomok már harmadfokon (7 paraméterrel) is jó becslést biztosítottak, ha sikerült jól meghatározni az alaphullám hosszát, ami elkerülhetővé tette a Fourier transzformáció elvégzését az amplitúdók számításánál.

Megmutattuk, hogy a becsülő függvények az *Excel* táblázatkezelő eszköztárával is meghatározhatók, és a hibavektorok elemzésével kiszűrhetők a durva mérési hibák is.

| Nap                  | D-mért | poli3    | poli6    | poli8    | poli10   | trig3    | trig4    | trig5    |
|----------------------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1                    | 63,4   | -2,62736 | 0,262854 | -1,31144 | -0,99766 | -1,6107  | -0,92179 | -1,83322 |
| 7                    | 65,75  | 0,123026 | 1,278287 | 1,537756 | 1,497195 | 0,956291 | 1,275655 | 1,27093  |
| 14                   | 65,3   | 0,105396 | -0,20125 | 1,079931 | 0,696843 | 0,6402   | 0,574281 | 1,279636 |
| 28                   | 63,55  | -0,88831 | -2,70628 | -1,4485  | -1,83881 | -1,14953 | -1,68986 | -0,8047  |
| 34                   | 64,55  | 0,393104 | -1,6394  | -0,78589 | -0,96825 | -0,24106 | -0,83251 | -0,26339 |
| 48                   | 67,35  | 3,754655 | 1,882802 | 1,683148 | 2,031698 | 2,359762 | 1,97345  | 1,57743  |
| 55                   | 64,2   | 0,837415 | -0,72551 | -1,33021 | -0,83868 | -0,8042  | -0,97486 | -1,68279 |
| 62                   | 65,35  | 2,189482 | 1,020002 | 0,150372 | 0,656027 | 0,433262 | 0,49909  | -0,28306 |
| 70                   | 64,45  | 1,4841   | 0,815487 | -0,17551 | 0,19705  | -0,21685 | 0,090065 | -0,48175 |
| 84                   | 64,8   | 2,085756 | 2,287374 | 1,485735 | 1,393303 | 0,966857 | 1,479333 | 1,699324 |
| 92                   | 63,45  | 0,831279 | 1,466361 | 0,931375 | 0,561551 | 0,278392 | 0,746958 | 1,362363 |
| 101                  | 59,05  | -3,50095 | -2,47013 | -2,64327 | -3,23491 | -3,29442 | -2,99922 | -2,21591 |
| 107                  | 61,35  | -1,17813 | 0,052917 | 0,125228 | -0,53222 | -0,4405  | -0,30849 | 0,3876   |
| 123                  | 60,65  | -1,89947 | -0,40394 | 0,200279 | -0,2758  | 0,077926 | -0,22756 | -0,30132 |
| 133                  | 58,75  | -3,86952 | -2,40391 | -1,62926 | -1,79053 | -1,43779 | -1,88717 | -2,43534 |
| 141                  | 62,05  | -0,65464 | 0,690215 | 1,491606 | 1,620299 | 1,881914 | 1,435876 | 0,743302 |
| 147                  | 65,15  | 2,365542 | 3,570891 | 4,329135 | 4,660527 | 4,815145 | 4,441314 | 3,820385 |
| 154                  | 62     | -0,89399 | 0,104338 | 0,750262 | 1,269127 | 1,277275 | 1,049429 | 0,688369 |
| 161                  | 59,65  | -3,37024 | -2,61661 | -2,13865 | -1,51212 | -1,65    | -1,69013 | -1,67122 |
| 169                  | 59,7   | -3,48373 | -3,0415  | -2,80411 | -2,17458 | -2,44761 | -2,26373 | -1,79947 |
| 182                  | 63,7   | 0,210546 | 0,11776  | -0,07979 | 0,27946  | -0,07264 | 0,377026 | 1,202315 |
| 189                  | 62,05  | -1,62272 | -1,9965  | -2,41508 | -2,31059 | -2,61718 | -2,12028 | -1,40267 |
| 196                  | 64,55  | 0,682226 | 0,046574 | -0,56094 | -0,74705 | -0,95155 | -0,48671 | -0,0774  |
| 211                  | 70,05  | 5,729166 | 4,642158 | 3,804144 | 3,068639 | 3,188507 | 3,36707  | 2,841515 |
| 225                  | 67,15  | 2,370154 | 1,053216 | 0,274676 | -0,60249 | -0,24307 | -0,41408 | -1,35696 |
| 232                  | 67,25  | 2,230096 | 0,881863 | 0,235922 | -0,51254 | -0,12653 | -0,42139 | -1,22062 |
| 240                  | 67,95  | 2,648802 | 1,337829 | 0,91623  | 0,477985 | 0,789928 | 0,436389 | 0,065542 |
| 244                  | 69,1   | 3,655816 | 2,392874 | 2,107042 | 1,878817 | 2,111152 | 1,766558 | 1,678536 |
| 251                  | 65,4   | -0,29746 | -1,4303  | -1,45252 | -1,25486 | -1,22091 | -1,48928 | -1,05749 |
| 258                  | 64,2   | -1,75377 | -2,70104 | -2,44384 | -1,79542 | -2,01087 | -2,13788 | -1,26576 |
| 269                  | 66,2   | -0,16031 | -0,71861 | -0,04548 | 1,196689 | 0,588589 | 0,754036 | 1,906871 |
| 294                  | 66     | -1,28277 | -0,71205 | 0,359253 | 1,311722 | 0,716276 | 1,266375 | 1,114646 |
| 301                  | 63,75  | -3,78606 | -2,90839 | -1,94806 | -1,5542  | -1,80911 | -1,32474 | -1,89412 |
| 308                  | 64,95  | -2,83533 | -1,69092 | -0,95097 | -1,20961 | -1,03863 | -0,69594 | -1,48187 |
| 321                  | 70,5   | 2,265761 | 3,716808 | 3,808922 | 2,60558  | 3,410763 | 3,378675 | 2,872983 |
| 328                  | 67,15  | -1,31659 | 0,14845  | -0,1711  | -1,41359 | -0,61357 | -0,8386  | -0,91135 |
| 336                  | 69     | 0,277518 | 1,580433 | 0,837697 | 0,168579 | 0,480609 | 0,10858  | 0,563264 |
| 343                  | 68,8   | -0,13684 | 0,832009 | -0,13479 | 0,193071 | -0,30851 | -0,70746 | 0,048525 |
| 349                  | 68,35  | -0,7627  | -0,25031 | -1,20286 | 0,080598 | -1,17167 | -1,50162 | -0,72874 |
| 358                  | 67,9   | -1,46143 | -1,98047 | -2,32633 | -0,70216 | -2,0276  | -2,09048 | -1,8451  |
| 364                  | 71,5   | 1,983698 | 0,511122 | 1,138855 | 0,730304 | 1,467713 | 1,678008 | 1,195111 |
| 365                  | 71,1   | 1,558791 | -0,09551 | 0,751041 | -0,30899 | 1,063938 | 1,325603 | 0,69561  |
| Hibavektor<br>hossza |        | 14,40    | 12,00    | 11,05    | 10,20    | 10,80    | 10,60    | 9,83     |

2. táblázat. A polinomos és trigonometrikus becslések hibái a 2013. évi D komponensben

## Irodalomjegyzék

- [1] Reichel, L., Ammar, G.S. and Gragg, W.B., Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials, *Math. Comp.* 57 (1991) 273-289.
- [2] Newbery, A.C.R., Trigonometric interpolation and curve-fitting, *Math. Comp.* 24 (1970) 869-876.
- [3] Newbery, A.C.R., Interpolation by algebraic and trigonometric polynomials, *Math. Comp.* 20 (1966) 597-599.