# A sík- és hegyvidéki erdeifenyő főbb fizikai paramétereinek többváltozós regressziója

**Csanády Viktória**
NymE EMK Matematikai Intézet
csanady.viktoria@emk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A sík- és hegyvidéki erdeifenyő főbb fizikai paramétereinek többváltozós regresszióját egy egyváltozós regresszió előzi meg. Ez egyben az alkalmazott tangens hiperbolikusz függvény alkalmasságának tesztelése. Kimutatható segítségével a fő szöveti részek eltérése a sűrűség és nyomószilárdság kapcsolatában. Az ezt követő többváltozós regresszió a nyomószilárdság kapcsolatát elemezi a sűrűség és pásztaarány függvényében. A sík- és hegyvidéki erdeifenyő esetén kapott regressziós együtthatók jellemzik az anyagok eltéréseit. Leírják megfelelő szorossággal a vizsgált fizikai paraméterek kapcsolatát.

ABSTRACT. The multivariate regression has been preceded by the one variate regression. This has been at the same time a verification of the suitability of the applied hyperbolic tangent function. By means of that function the differences of the main anatomical parts can be revealed with respect to the relationship between density and compressive strength. The multivariate regression that follows analyses the compressive strength as a function of the density and the latewood-earlywood proportion. In the case of the Scotch pine on lowlands and highlands the received regression coefficients characterize the deviations of the materials. They describe at an adequate tightness the relationship of the examined physical coefficients.

## 1. Bevezetés

Mint ismeretes tény, az ország területének 19 százalékát borítja erdő, melynek további megoszlása: lombos erdő 85, fenyőerdő pedig 15 százalék [3]. Fafaj szerint a tölgy vezet a teljes erdőterület 21,9 százalékával, majd az akác következik 20,2 százalékkal, a harmadik helyen pedig a fenyő áll. A fenyőerdők egyharmada síkvidéken, az Alföldön található, állományalkotói 98 százalékában erdei- és feketefenyő. Mivel a síkvidéki fenyő mostoha körülmények között növekszik, szerkezetében, illetve fizikai- mechanikai tulajdonságaiban eltér a hegyvidéki termőhelyűtől. A nagy tömegben kitermelhető anyagmennyiség miatt feltétlenül szükséges, hogy ismert legyen az eltérések mértéke, valamint az anyag anizotrópiája miatt az egyes jellemzők kapcsolatának változása. Fontos továbbá, hogy jellemezhető legyen az egyes vizsgált tulajdonságok egymásra hatása megfelelő matematikai módszerrel.

## 2. Anyag és módszer

Első lépésként egy kismintás kísérletre került sor, melynek tárgya a síkvidéki erdeifenyő makroszkópos szerkezeti részeinek – geszt, szijács és juvenilis fa – sűrűség-nyomószilárdság függvénykapcsolata újszerű, nem lineáris meghatározása volt. Ezt követte egy 200-200 mintaelemű fővizsgálat a sík- és hegyvidéki erdeifenyőre, egy nem lineáris többváltozós regresszió alkalmazásával. Vizsgálati jellemzőként a sűrűség, mint univerzális anyagjellemző, a pásztaarány (korai/kései), mint az évgyűrű szerkezet fő jellemzője [6] és a nyomószilárdság, mint a faanyag legfontosabb szilárdsági tulajdonsága került kiválasztásra. A fizikai értelemben is alkalmas többváltozós függvény: $\sigma(\rho;K)$. A függvény illesztése mindkét különböző származású fenyő mintára megtörtént, az eredmények összevethetők, elemezhető a független változók hatása a függő változóra, illetve ezek domináns szerepe a függvénykapcsolatban.

## 3. Eredmények kiértékelése

### 3.1. A kismintás elővizsgálat

Mindhárom makroszkopikus részre vonatkozóan a sűrűség – nyomószilárdság kapcsolatának vizsgálatára egy alkalmas regressziós modell igénye merült fel. Egy olyané, melynek a lehetőségekhez mérten jól kell követnie a mérési adatok ponthalmazát. Jellemezze a függvényt aszimptotikusság, korlátosság, ami révén a függő változó értékei, jelen esetben a nyomószilárdság még fizikailag értelmezhető határok között marad. Rendelkezzen a függvény egy olyan jellegzetes ponttal, melynek koordinátái, mint speciális átlagértékek összevethetők az egyes illesztések során. A felsorolt igények miatt elutasítható a gyakorlatban eddig előforduló lineáris függvény illesztése [2], és a még ritkábban alkalmazott polinomiális függvényeké, melyek valójában fizikailag nem értelmezhetők, és nem jellemzik a két változó, nevezetesen a sűrűség és nyomószilárdság kapcsolatát helyesen, bár lehet, hogy csak tisztán statisztikai szemszögből nézve szoros korreláció mutatható ki velük a változók között. Mérlegelve ezen tényeket, keresni kellett egy olyan fizikailag is és statisztikailag is megfelelő függvényt, amely az említett feltételeknek eleget tesz. Kedvezőnek bizonyult az alábbi modell [1]:

$$\sigma = a \cdot th\left(d\left(\rho - b\right)\right) + c\,, \tag{1}$$

melynek inflexiós pontja $P(b;c)$.

Az eredményeket az 1. táblázat tartalmazza. (EF: erdeifenyő, síkvidék)

| | *a* | *b* | *c* | *d* | *r* |
|---|---|---|---|---|---|
| $EF_{geszt}$ | 8,793 | 477,5 | 36,199 | 0,0149 | **0,8056** |
| $EF_{szijács}$ | 12,687 | 546,6 | 53,457 | 0,0247 | **0,7486** |
| $EF_{juvenilis}$ | 12,397 | 494,4 | 46,283 | 0,0149 | **0,7571** |

**1. táblázat. Az elővizsgálat regressziós eredményei.**

A kismintás elővizsgálatok eredményeiből röviden a következőket lehet összefoglalni: Az illesztett függvény nemcsak hogy jól leírja, illetve követi a sűrűség függvényében változó nyomószilárdságot megfelelő illeszkedés mellett, hanem ugyanekkor inflexiós pontjával kimutatható a három anatómiai rész különbözősége. Az eltérések, illetve a szijács - juvenilis fánál mutatkozó labilitás azt indokolja, hogy mind a fővizsgálat során, mind pedig a felhasználás szempontjából célszerű a mintaanyag gesztből történő vétele a juvenilis rész kihagyásával.

### 3.2. A sík- és hegyvidéki erdeifenyő vizsgálata (nagymintás vizsgálat)

A regressziós függvény kiválasztása nehéz és időigényes feladat, mivel egy fizikai értelemben is alkalmas $(\rho;K)\mapsto\sigma(\rho;K)$ modell szükséges a változók kapcsolatának jellemzésére. Mind e mellett az illesztett függvénnyel szembeni követelmények a következők:

1.) Az illesztett függvény adjon meg egy speciális átlag adathármast a $\rho$, $K$ és $\sigma$ vonatkozásában mindkét anyagra.
2.) Az illesztett függvény adja meg az egységnyi $\rho$ változására eső $\sigma$ változás értékét (növekedési mérték) mindkét anyagra.
3.) Az illesztett függvény adja meg az egységnyi $K$ változásra eső $\sigma$ változás értékét (csökkenési mérték) mindkét anyagra.
4.) Az illesztett függvény adja meg a $\sigma$ technológiailag elfogadható legalsó és legfelső értékét, valamint az intervallum nagyságát mindkét anyagra nézve.
5.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével legyen meghatározható, hogy a növekedési mérték értékéhez milyen $\rho$ határértékek ($\rho_{\min}$ ; $\rho_{\max}$) tartoznak (technikailag értelmezhető $\rho$ intervallum).
6.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével legyen meghatározható, hogy a csökkenési mérték értékéhez milyen $K$ határértékek ($K_{\min}$ ; $K_{\max}$) tartoznak (technikailag értelmezhető $K$ intervallum).
7.) Az illesztett függvényben előforduló együtthatók fizikailag és technológiailag értelmezhetők és megfelelően dimenzionálhatók legyenek.
8.) Az illesztett függvény minél több olyan együtthatót tartalmazzon, melyek a kétféle faanyag vizsgálatánál eltérő értékeket mutatnak.
9.) Egymagában a magas korreláció nem elegendő, e mellett az illesztett modellnek eleget kell tennie a fent felsorolt nyolc feltételnek is együttesen.

Mint ismeretes az előző vizsgálatnál a sűrűség és nyomószilárdság vonzatában megfelelő modellnek bizonyult a tangens hiperbolikusz függvény, melynek kiválasztását aszimptotikus mivolta, valamint korlátossága indokolta. Ezt figyelembe véve a kétváltozós $(\rho;K)\mapsto\sigma(\rho;K)$ regressziós függvény parciális függvényekből, illetve azok összevonásából kialakítható, így a $\rho\mapsto\sigma(\rho;K_0)$ kapcsolatban használható ismét a tangens hiperbolikusz függvény, melynek alkalmazását a vetületi ponthalmaz is alátámasztotta. A $K\mapsto\sigma(\rho_0;K)$ parciális függvény meghatározásában is a korlátosság valamint az aszimptotikusság vezérelt. A vetületi ponthalmaz itt nem ad segítséget a jelentős szórtsága miatt, feltételezni kell tehát, hogy a $K$ értékének mérési pontossága kedvezőtlenebb volt. Ez nyilvánvalóan bizonytalanságot okozhat, amit a vetületi ponthalmazban több szélsőséges helyzetű mérés is alátámaszt. Mindezek ellenére a $K\mapsto\sigma(\rho_0;K)$ esetében is a már említett tangens hiperbolikusz bizonyult kedvezőnek a felsorolt tulajdonságai miatt. A fentiek figyelembevételével az illesztendő kétváltozós függvény két tangens hiperbolikusz függvényből lett kialakítva megfelelő transzformációk felhasználásával.

Az illesztésnél felhasznált regressziós függvény alakja:

$$\sigma = a_1\, th\left(0{,}00627\left(\rho - a_3\right)\right) - 2{,}565\, th\left(a_5\left(K - a_6\right)\right) + a_7 . \tag{2}$$

Az illesztés eredményeinek közlése előtt bizonyítható, hogy a modell eleget tesz a követelményrendszernek:

1.) Az illesztett függvény megad egy speciális átlag adathármast a $\rho$, $K$ és $\sigma$ vonatkozásában mindkét faanyagra:

$$\overline{\rho}^* = a_3 \; ; \; \overline{K}^* = a_6 \; ; \; \overline{\sigma}^* = a_7 \; .$$

2.) Az illesztett függvén megadja az egységnyi $\rho$ változására eső $\sigma$ változás értékét (növekedési mérték) a speciális átlag adathármashoz tartozó helyen mindkét faanyagra (a parciális deriváltak alapján):

$$N_m = \hat{\sigma}'_\rho\left(\overline{\rho}^*\right) = a_1 a_2 \, .$$

3.) Az illesztett függvény megadja az egységnyi K változásra eső $\sigma$ változás értékét (csökkenési mérték) a speciális átlag adathármashoz tartozó helyen mindkét faanyagra (a parciális deriváltak alapján):

$$C_m = \hat{\sigma}'_K\left(\overline{K}^*\right) = a_4 a_5 \, .$$

4.) Az illesztett függvény megadja a $\sigma$ technológiailag elfogadható legalsó és legfelső értékét, valamint az intervallum nagyságát mindkét anyagra nézve:

$$\sigma_{\min} = a_7 - a_1 - a_4 \; ; \; \sigma_{\max} = a_7 + a_1 + a_4 \; ; \; \sigma_{\text{int}} = 2\left(a_1 + a_4\right).$$

5.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével meghatározható, hogy a növekedési mérték értékéhez milyen $\rho$ határértékek ($\rho_{\min}$ ; $\rho_{\max}$) tartoznak (technikailag értelmezhető $\rho$ intervallum).

Az $\frac{N_m}{10}$ értékhez az alábbi összefüggéssel számíthatók az értékek:

$$10 = ch^2\left(a_2\left(\rho - a_3\right)\right).$$

6.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével meghatározható, hogy a csökkenési mérték értékéhez milyen $K$ határértékek ($K_{\min}$ ; $K_{\max}$) tartoznak (technikailag értelmezhető K intervallum).

A $\frac{C_m}{10}$ értékhez az alábbi összefüggéssel számíthatók az értékek:

$$10 = ch^2\left(a_5\left(K - a_6\right)\right).$$

7.) Az illesztett függvényben előforduló együtthatók fizikailag és technológiailag értelmezhetők és megfelelően dimenzionálhatók.

8.) Az illesztett függvény elegendő olyan együtthatót tartalmaz, melyek a kétféle faanyag vizsgálatánál eltérő értékeket mutatnak.

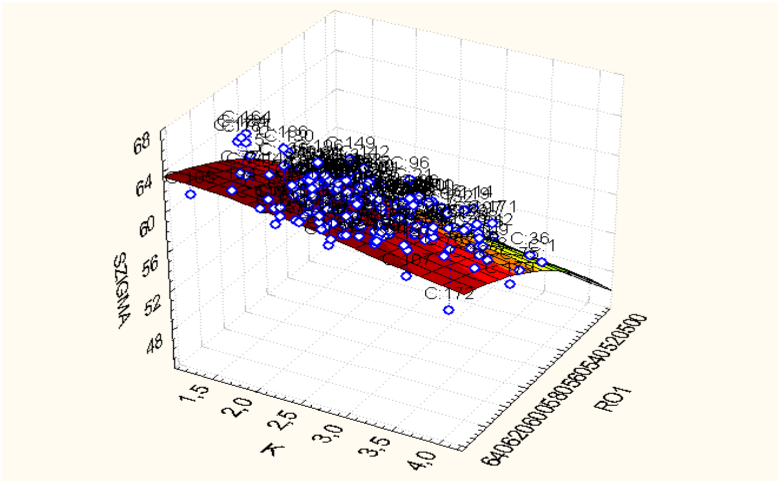
9.) A magas korreláció mellett az illesztett modell eleget tesz a felsorolt nyolc feltételnek.

Mind a síkvidéki, mind pedig a hegyvidéki erdeifenyő vizsgálata során az előzőekben felírt modell került alkalmazásra. Az eredményeket a 2. táblázat tartalmazza. A felületeket a ponthalmazokkal a síkvidéki fenyőnél az 1. ábra a hegyvidékinél a 2. ábra demonstrálja.

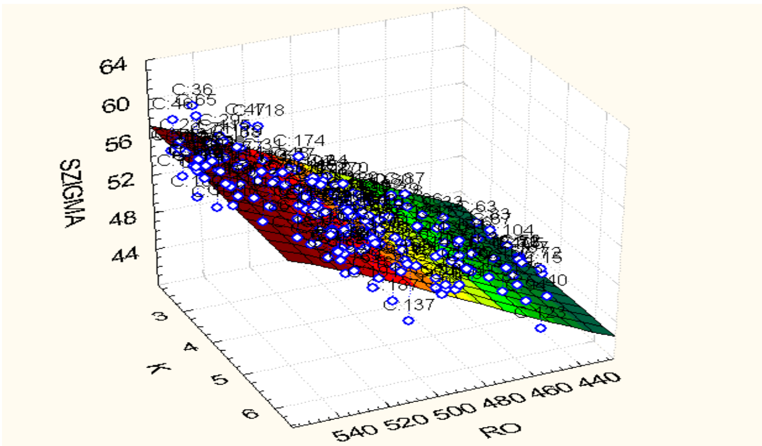
| | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Síkvidéki erdeifenyő | 29,7093 | 419,4039* | 0,65208 | 3,1328* | 34,969* | 0,8449 |
| Hegyvidéki erdeifenyő | 18,9087 | 483,9016* | 2,24991 | 17,451* | 46,443* | 0,8906 |

**2. táblázat. A sík és hegyvidéki erdeifenyő regressziós eredményei**

Megjegyzés: A jelölt értékek (*) egyúttal a felület úgynevezett síkpontjának koordinátái $S(\rho\,;K;\sigma(\rho;K))$.




**1. ábra. A síkvidéki erdeifenyőre illesztett felület**




**2. ábra. A hegyvidéki erdeifenyőre illesztett felület**

Az illesztésnél adódó korrelációs együtthatók $R_{síkvidéki} = 0{,}8449$, $R_{hegyvidéki} = 0{,}8906$ kielégítők, annál is inkább, hiszen itt már egy felületről van szó. A parciális korrelációs együtthatók vizsgálatából (4), (5) egyértelműen kimutatható mindkét faanyagra, hogy a kapcsolatban a sűrűség a domináló tulajdonság, a pásztaarány befolyása kisebb, de a síkvidéki anyagnál jelentős mértékű, így nem hagyható figyelmen kívül a szerepe. A felületek különbözősége arra utal, hogy jelentős az eltérés a két származáshelyi anyag között. Ezt alátámasztják az úgynevezett síkpont koordináták, melyek fizikailag értelmezhető jellemző adatát adják a sűrűségnek valamint a nyomószilárdságnak. A pásztaarány a hegyvidéki erdeifenyő esetén túl magas értéket mutat, ami egyben azt jelzi, hogy itt rendkívül jelentős az eltérés a síkvidéki anyaghoz képest. Különbség mutatkozik a sűrűség és a nyomószilárdság vonatkozásában is, ami természetesen a hegyvidéki erdeifenyő javára írható. Az egységnyi $\rho$ változásra eső $\sigma$ változás értéke (növekedési mérték) a síkpontban arra utal, hogy a hegyvidéki erdeifenyő szilárdsági szempontból kedvezőbb, a változás mértéke kisebb. Az egységnyi $K$ változásra eső $\sigma$ változás mértéke (csökkenési mérték) a síkpontban vizsgálva ismét csak a jelentős különbségre utal a két faanyag között, de ez nem mértékadó érték. A követelményekben felsoroltaknak megfelelően számíthatók az intervallumok, a vizsgált jellemzők határértékei, ennek módja a leírtaknak megfelelően történhet.

## 4. Következtetés

A kapott eredményeket figyelembe véve javasolható, szemben az eddigi irodalmakban előforduló regressziós modellek helyett, az összetettebb modell használata. A nyomószilárdság-sűrűség kapcsolatából nem célszerű eliminálni a pásztaarányt, és így szükséges a kétváltozós tangens hiperbolikusz függvény alkalmazása. Segítségével megadhatók a különböző technológiai intervallumok a sűrűség és nyomószilárdság esetében, valamint. az illesztett felület síkpont koordinátái egy újszerű, nem aritmetikai átlaggal jellemzik a vizsgált anyagi tulajdonságokat. Ezen kívül ismeretet kapunk az adott pontban az egységre jutó fizikai jellemző változási sebességéről, ami felhasználás szempontjából fontos tényező lehet.

## Irodalomjegyzék

[1] **Csanády, V.,** Számítógépekre konvertált nem hagyományos regressziós eljárások faipari – erdészeti kutatási és műszaki problémákhoz. Műszaki doktori értekezés, Sopron, EFE (1993).
[2] **Kolmann, F.,** Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe**.** Springer Verlag, Berlin (1951).
[3] **Molnár, S.,** Faanyag-ismerettan. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest (1999).
[4] **Orbay, L.,** A többváltozós regressziószámítások alapja és fagazdasági alkalmazása**.,** EFE, Sopron (1990).
[5] **Pelz, D. R.,** Einführung in die biologische Statistik für Forststudenten. Teil II.Freiburg,(1989).
[6] **Wimmer, R.,** Beziehungen zwischen Jahrringparametern und Rohdichte von Kiefernholz. Holzforschung und Holzverwertung, Nr.4 (1991).