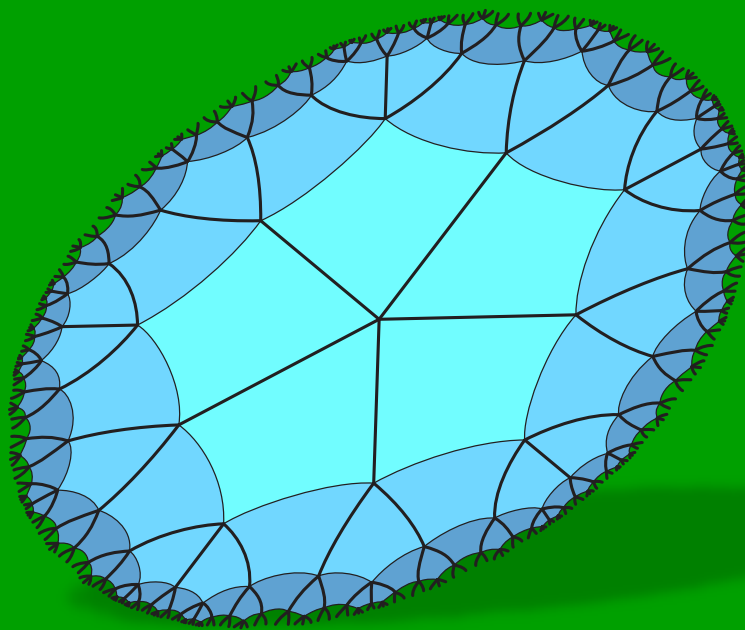


Dimenziók

Matematikai Közlemények

V. kötet



SOE EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2017

Dimenziók

Matematikai Közlemények

V. kötet

SOE EMK Matematikai Intézet

Soproni Tudós Társaság

2017

Szerkesztők:

Dr. Németh László
egyetemi docens

Dr. Szalay László
intézetigazgató egyetemi tanár

Dr. Závoti József
egyetemi tanár

Soproni Egyetem
Erdőmérnöki Kar
Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.



MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.



Kiadja: SOE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

Tartalomjegyzék

Hardy inequality for star-shaped domains (<i>Sándor Zsuppán</i>)	5
Négydimenziós konvex politóp ábrázolása GeoGebrával (<i>Talata István</i>)	11
A WRF oszlopmodell különböző felszínközeli réteg parametrizációinak validálása a PABLS mérésekkel (<i>Virág Szabolcsné Németh Rita, Breuer Hajnalka</i>).....	19
A vízterhelés, a vízgyűjtő és vízvásztó vonalak meghatározása az eső beszivárgásának és szétfolyásának modellezésével (<i>Kalmár János, Benedek Judit</i>) ...	25
A hiperbolikus Kepler-egyenlet geometriai szemléletű tárgyalása (<i>Péntek Kálmán</i>)	31
Gazdasági változások regressziós vizsgálata (<i>Csanády Viktória</i>)	39
A vakfolt-mentes sarokreflektorok anyagtakarékos kialakítása (<i>Kalmár János, Bányai László</i>).....	51
50 év biomatematika az agráriumban (<i>Bán István</i>)	57

„És íme, én veletek vagyok minden nap a világ végezetéig” (Máté 28,20)

Závoti József (1949-2017)



A Teremtő váratlanul magához ölelte a soproni matematika társadalom szellemi vezetőjét, Dr. Závoti József professzort, tanárunkat, barátunkat. Bizonyára szüksége volt egy új tanácsadóra a statisztika tudományában, bár Einstein még azt tartotta, hogy „Isten nem kockázik”.

Emlékezetembe villan, amikor felfelé kaptattunk a Schneebergre, és éppen a sakkozásról beszélgettünk. Emlékszem, amikor arról gondolkoztunk, hogy a magyar és osztrák fogadóirodák focimeccseire adott különböző odds-ait hogyan lehetne kihasználni. Ahogy megnyitotta a 2. Soproni Diofantikus és Kriptográfiai Napokat, ahogy támogatta tudományos előmenetelünket, a MOKUS konferenciákat. Emlékezem. Emlékezem, és ösztönösen érzem, sőt tudom, hogy hihetetlenül sokat tanultunk Tőle, de leginkább emberséget, mások tiszteletét, a szakma szeretetét.

Csak szellemisége élvezheti a nyugdíjas éveit a társaságunkban...

Szalay László

Hardy inequality for star-shaped domains

Sándor Zsuppán

Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Csillagszerű tartomány Hardy egyenlőtlenségben szereplő konstansának egy felső becslését adjuk a tartomány peremétől vett távolság-függvény segítségével. Amennyiben a szokásos euklidészi peremtávolság-függvény helyett a sugárirányú peremtávolságot alkalmazzuk a Hardy egyenlőtlenségben, akkor a minden csillagszerű tartomány konstansa egyenlő az egy dimenziós egyenlőtlenségben szereplő konstanssal.

ABSTRACT. We investigate in this note the Hardy inequality on a star-shaped domain. We give an upper estimation for the Hardy constant figuring in the inequality in terms of the distance to the boundary function. Besides the Euclidean boundary distance function in the inequality we also consider the distance function in the radial direction for which the Hardy constant of the star-shaped domain turns out to be equal to the constant of an interval.

1. Introduction

The Hardy inequality [13] states that if $1 < p < \infty$ and $\alpha < p - 1$ then

$$\int_0^\infty \frac{|u(x)|^p}{x^{p-\alpha}} dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^\infty |u'(x)|^p x^\alpha dx \quad (1)$$

for any function u absolutely continuous on $[0; \infty[$, provided $u(0) = 0$. If $u \not\equiv 0$ then the inequality in (1) is strict but the constant $\left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p$ is sharp.

It was generalized in [17] for Lipschitz domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, i.e. there is a constant H depending on the domain Ω and on the values of n , p and α such that

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{d(x)^{p-\alpha}} dx \leq H \int_\Omega |u(x)|^p d(x)^\alpha dx \quad (2)$$

for every $u \in C_0^\infty(\Omega)$, where $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ denotes the distance to the boundary function. The least possible value of H in (2) is called the Hardy constant of Ω and it is denoted by $H_\Omega(n, p, \alpha)$ or simply by H_Ω by suppressing the other parameters in the notation. Conditions for the finiteness of H_Ω or extensions of (2) by some terms on the left-hand side or for other weight functions than the boundary distance d were investigated by many authors,

KULCSSZAVAK. Hardy egyenlőtlenség, Hardy konstans, csillagszerű tartomány, peremtávolság függvény.

KEYWORDS. Hardy inequality, Hardy constant, star-shaped domain, boundary distance function.

see [1–12, 14–19] and references given therein. For example one has $H_\Omega(n, p, 0) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ for convex domains in $\mathbb{R}^n$, especially $H_\Omega(n, 2, 0) = 4$ but there are other nonconvex domains with $H_\Omega(n, 2, 0) = 4$, see e.g. [4, 6, 9].

According to Ancona [1] we have $H_\Omega(n, 2, 0) \leq 16$ for simply connected planar domains, moreover, for arbitrary planar domains Avkhadiev [3] proved

$$\min\{2; p\} M_0(\Omega) \leq H_\Omega(2; p; p-2)^{\frac{1}{p}} \leq 2p \left(\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4\pi^2} \right)^2, \quad (3)$$

where $M_0(\Omega)$ denotes the maximal module of annuli centred on the boundary contained in Ω and separating its boundary, especially $M_0(\Omega) = 0$ for simply connected domains. Hence $H_\Omega(2; p; p-2)$ is finite iff the boundary of the domain is uniformly perfect. However, it is still an open question to determine the exact value of H_Ω in (2) for nonconvex domains in $\mathbb{R}^n$.

In this note the Hardy constant H_Ω in (2) of a star-shaped domain is estimated by elementary means.

2. Hardy constant of a star-shaped domain

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ be a star-shaped domain with respect to the origin the boundary of which is parametrized by the function $f(\theta) = f(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, i.e.

$$\Omega = \{(r, \theta) : r < f(\theta), \theta \in \mathbb{S}\}, \quad (4)$$

where $\mathbb{S}$ denotes the domain of the angles of the n -dimensional spherical coordinate system, that is $0 \leq \theta_j \leq \pi$ for $j = 1, \dots, n-2$ and $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$. According to Ch. 1.1.8 in [16] in this case f is a Lipschitz function on $\mathbb{S}$.

For any $u \in C_0^\infty(\Omega)$ we have $u(f(\theta), \theta) = 0$ and therefore

$$-u(r, \theta)^p = \int_r^{f(\theta)} p u(\rho, \theta)^{p-1} \partial_\rho u(\rho, \theta) d\rho. \quad (5)$$

We take the absolute value and estimate the integral

$$|u(r, \theta)|^p \leq \int_r^{f(\theta)} p |u(\rho, \theta)|^{p-1} |\partial_\rho u(\rho, \theta)| d\rho. \quad (6)$$

Let $\psi = \psi(r, \theta)$ denote a locally integrable nonnegative weight function on Ω . We multiply (6) by ψ and integrate on Ω . On the left-hand side of (6) we obtain

$$\int_\Omega |u|^p \psi = \int_\mathbb{S} \int_0^{f(\theta)} |u(r, \theta)|^p \psi(r, \theta) r^{n-1} J(\theta) dr d\theta, \quad (7)$$

where $J(\theta) = \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{n-1-j} \theta_j$ is the part of the Jacobian containing the angles. On the right-hand side of (6) we change the integrations with respect to the variables ρ and r :

$$\int_\mathbb{S} \int_0^{f(\theta)} \left[\frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho r^{n-1} \psi(r, \theta) dr \right] p |u(\rho, \theta)|^{p-1} |\partial_\rho u(\rho, \theta)| \rho^{n-1} J(\theta) d\rho d\theta. \quad (8)$$

Using also $|\partial_\rho u(\rho, \theta)| \leq |\nabla u(\rho, \theta)|$ we obtain the following inequality

$$\int_{\Omega} |u|^p \psi \leq \int_{\Omega} p |u|^{p-1} |\nabla u| \Psi, \quad (9)$$

where

$$\Psi(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho r^{n-1} \psi(r, \theta) dr. \quad (10)$$

This definition of the function Ψ by (10) makes also sense when $\rho \rightarrow 0$ because

$$\Psi(\rho, \theta) \leq \int_0^\rho \psi(r, \theta) dr \quad (11)$$

and hence $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Psi(\rho, \theta) = 0$. Expand the right-hand side of (9) by the factor $\psi^{\frac{1}{q}}$ and estimate by Hölder's inequality:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p |u|^{p-1} \psi^{\frac{1}{q}} |\nabla u| \psi^{-\frac{1}{q}} \Psi &\leq p \left(\int_{\Omega} |u|^{(p-1)q} \psi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi^{-\frac{p}{q}} \Psi^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p \left(\int_{\Omega} |u|^p \psi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi^{1-p} \Psi^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

where we have also used $(p-1)q = p$ as a consequence of $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Substituting this into (9) implies

$$\int_{\Omega} |u|^p \psi \leq p \left(\int_{\Omega} |u|^p \psi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi^{1-p} \Psi^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (12)$$

Dividing both sides by $\left(\int_{\Omega} |u|^p \psi \right)^{\frac{1}{q}}$ and using again $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ implies

$$\int_{\Omega} |u|^p \psi \leq p^p \int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi^{1-p} \Psi^p. \quad (13)$$

In order to obtain (2) we substitute the weight function

$$\psi = \frac{1}{d^{p-\alpha}}, \quad (14)$$

compute Ψ and estimate the right-hand side of (13). There follows

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^{p-\alpha}} \leq p^p \max_{(\rho, \theta) \in \Omega} \left(\frac{d(\rho, \theta)^{p-\alpha-1}}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{r^{n-1}}{d(r, \theta)^{p-\alpha}} dr \right)^p \int_{\Omega} |\nabla u|^p d^\alpha, \quad (15)$$

which gives the upper estimation for the Hardy constant of the star-shaped domain Ω in case $1 < p < \infty$ and $\alpha < p-1$:

$$H_{\Omega} \leq p^p \max_{(\rho, \theta) \in \Omega} \left(\frac{d(\rho, \theta)^{p-\alpha-1}}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{r^{n-1}}{d(r, \theta)^{p-\alpha}} dr \right)^p. \quad (16)$$

The maximum in (16) is finite since

$$\frac{d(\rho, \theta)^{p-\alpha-1}}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{r^{n-1}}{d(r, \theta)^{p-\alpha}} dr \leq d(\rho, \theta)^{p-\alpha-1} \int_0^\rho \frac{1}{d(r, \theta)^{p-\alpha}} dr \quad (17)$$

and by the L'Hospital rule we have

$$\lim_{\rho \rightarrow f(\theta)} d(\rho, \theta)^{p-\alpha-1} \int_0^\rho \frac{1}{d(r, \theta)^{p-\alpha}} dr = \frac{-1}{(p-\alpha-1)\partial_\rho d(f(\theta), \theta)}. \quad (18)$$

and $\partial_\rho d(f(\theta), \theta) = -\cos \angle(x, n)$ for almost every $\theta \in \mathbb{S}$, where $\angle(x, n)$ denotes the angle between the position vector $x = (f(\theta), \theta)$ and the outer unit normal vector to the boundary of Ω at x .

Theorem 2.1 If Ω is a star-shaped domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ with respect to the origin, then we have (16) for the Hardy constant in (2). ■

Remark 2.2 The upper estimation (16) for the Hardy constant is computable only if one knows the distance to the boundary function d of the domain. In order to obtain a more geometrical version we denote by $F(\rho, \theta)$ the right hand side of (17) and compute its partial derivative with respect to the variable ρ

$$\partial_\rho F(\rho, \theta) = \frac{1}{d(\rho, \theta)} + (p - \alpha - 1) \frac{\partial_\rho d(\rho, \theta)}{d(\rho, \theta)} F(\rho, \theta) \quad (19)$$

Hence if $\partial_\rho F(\rho, \theta) = 0$ then $F(\rho, \theta) = \frac{-1}{(p-\alpha-1)\partial_\rho d(\rho, \theta)}$ and there follows

$$\max_{\rho \in [0; f(\theta)]} F(\rho, \theta) \leq \max_{\rho \in [0; f(\theta)]} \frac{1}{(p-\alpha-1)|\partial_\rho d(\rho, \theta)|} \quad (20)$$

which implies

$$H_\Omega \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \left(\max_{\theta \in \mathbb{S}} \max_{\rho \in [0; f(\theta)]} \frac{1}{|\partial_\rho d(\rho, \theta)|} \right)^p \quad (21)$$

Here $|\partial_\rho d(\rho, \theta)|$ is the cosine of the angle between the position vector $x = (\rho, \theta)$ and the outer normal vector on the boundary at x of that subdomain which is enclosed by a level curve $d = \text{constant}$. ■

Example 2.3 Let $\Omega = B_R(0)$ be an n -dimensional ball with radius R centered in the origin. We can directly compute the upper estimation (15) by substituting $d(\rho, \theta) = R - \rho$ or we can use (21) and we obtain

$$H_{B_R(0)} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \quad (22)$$

for $1 < p < \infty$ and $\alpha < p - 1$ just as in the case of an interval. ■

Remark 2.4 If Ω is a convex domain then using $|\partial_\rho d(x)| \leq 1$ for $x \in \Omega$ the upper estimator in (21) is at least $\left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p$ which is known to be the sharp upper estimator of the Hardy constant for convex domains. ■

Remark 2.5 Instead of the weight (14) we can substitute another weight

$$\psi(\rho, \theta) = \frac{1}{(f(\theta) - \rho)^{p-\alpha}}. \quad (23)$$

In [11] a partially similar weight was considered with an additional singularity at the origin. Using (23) direct computation gives

$$\Psi(\rho, \theta) \leq \frac{1}{p-\alpha-1} \left(\frac{1}{(f(\theta)-\rho)^{p-\alpha-1}} - \frac{1}{f(\theta)^{p-\alpha-1}} \right). \quad (24)$$

This can be substituted into the inequality (13):

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{(f(\theta)-\rho)^{p-\alpha}} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_{\Omega} |\nabla u|^p (f(\theta) - \rho)^{\alpha}. \quad (25)$$

Hence if we use the weight (23) instead of (14) then every star-shaped domain behaves like an interval concerning the Hardy inequality, c.f. (1) and (25). Moreover, if the radial distance $f(\theta) - \rho$ of the point $(\rho, \theta) \in \Omega$ is comparable to its ordinary distance $d(\rho, \theta)$ to the boundary, that is

$$\varepsilon(f(\theta) - \rho) \leq d(\rho, \theta) \leq f(\theta) - \rho \quad (26)$$

for some fixed $0 < \varepsilon \leq 1$ then there follows by (25)

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{d^{p-\alpha}} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p d^{\alpha}, \quad (27)$$

which gives

$$H_{\Omega} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \left(\max_{\theta \in \mathbb{S}} \max_{\rho \in [0; f(\theta)]} \frac{f(\theta) - \rho}{d(\rho, \theta)} \right)^p \quad (28)$$

for the Hardy constant. ■

Remark 2.6 The estimations (16), (21) and (28) depend not only on the domain and on the parameters p and α but also on the choice of the center of polar coordinates. For example if one chooses the centre of polar coordinates in a distance of $0 \leq \delta < 1$ from the centre of the unit ball and calculates the parametrization of the unit ball then one has $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$ in (26) and the estimation (28) gives

$$H_{\Omega} \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \sqrt{1 + \delta^2}^p,$$

which is bigger than the exact value in (22) if $0 < \delta < 1$. ■

Conclusion The upper estimations for the Hardy constant of a star-shaped domain considered in this note are novel to the authors best knowledge, however, they are difficult to calculate explicitly in terms of simple shape characteristics of the domain. In the case of the unit ball the estimate gives the value of the known sharp constant. If one chooses the distance to the boundary in the radial direction instead of the ordinary distance in the Hardy inequality then the Hardy constant of any star-shaped domain is the same as that of an interval.

References

- [1] **Ancona A.**, On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc. (2) 37 (1986), 274–290, [doi:10.1112/jlms/s2-34.2.274](https://doi.org/10.1112/jlms/s2-34.2.274).
- [2] **Babuška I., Aziz A. K.**, Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972), Academic Press, New York, 1972, pp. 1–359, [doi:10.1016/B978-0-12-068650-6.50007-1](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-068650-6.50007-1).
- [3] **Avkhadiyev F.G.**, Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants, Lobachevskii J. Math. 21 (2006), 3–31.
- [4] **Avkhadiyev F. G.**, A geometric description of domains whose Hardy constant is equal to $1/4$, Izvestiya: Mathematics 78(5) (2014), 855–876.
- [5] **Avkhadiyev F., Laptev A.**, Hardy inequalities for nonconvex domains, International Mathematical Series. Around Research of Vladimir Maz'ya, I, vol. 11, Springer, New York (2010), 1–12, [doi:10.1007/978-1-4419-1341-8_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1341-8_1).
- [6] **Barbatis G., Filippas S., Tertikas A.**, A unified approach to improved L_p Hardy inequalities with best constants, Trans. Amer. Math. Soc. 356(6) (2004), 2169–2196 (electronic).
- [7] **Boas H. B., Straube E. J.**, Integral inequalities of Hardy and Poincare type, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 172–176, [doi:10.2307/2047547](https://doi.org/10.2307/2047547).
- [8] **Davies E. B.**, Some norm bounds and quadratic form inequalities for Schrödinger operators, II. J. Operator Theory 12 (1984) 177–196.
- [9] **Davies E.B.**, The Hardy constant, Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 417–431, [doi:10.1093/qmath/46.4.417](https://doi.org/10.1093/qmath/46.4.417).
- [10] **Davies E. B.**, A review of Hardy inequalities, in: The Maz'ya Anniversary Collection, vol. 2, Oper. Theory Adv. Appl., vol 110 (Birkhäuser, Basel, 1999), 55–67, [doi:10.1007/978-3-0348-8672-7_5](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8672-7_5).
- [11] **Fabricant A., Kutev N., Rangelov T.**, Sharp Hardy Inequalities in Star-shaped Domains with Double Singular Kernels, Mediterr. J. Math. (2017) 14: 21, [doi:10.1007/s00009-016-0831-4](https://doi.org/10.1007/s00009-016-0831-4).
- [12] **Franck R.L., Loss M.**, Hardy-Sobolev-Maz'ya inequalities for arbitrary domains, J. Math. Pures Appl. 97 (2012), 39–54, [doi:10.1016/j.matpur.2011.04.004](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2011.04.004).
- [13] **Hardy G. H.**, An inequality between integrals. Messenger Math. 54 (1925), 150–156.
- [14] **Kufner A.**, Weighted Sobolev Spaces, Wiley, New York (1985).
- [15] **Laptev A., Sobolev A. V.**, Hardy inequalities for simply connected planar domains, Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Adv. Math. Sci., 225, (2008), 133–140, [doi:10.1090/trans2/225](https://doi.org/10.1090/trans2/225).
- [16] **Maz'ya V.G.**, Sobolev spaces, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985. Translated from the Russian by T.O. Shaposhnikova, [doi:10.1007/978-3-642-15564-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15564-2).
- [17] **Nečas J.**, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), 305–326.
- [18] **Tidblom J.**, A Geometrical Version of Hardy's Inequality for $W_0^{1,p}(\Omega)$, Proc. Amer. Math. Soc. 132(8) (2004), 2265–2271, [doi:10.1090/S0002-9939-04-07526-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07526-4).
- [19] **Wannebo A.**, Hardy inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), 85–95, [doi:10.2307/2048366](https://doi.org/10.2307/2048366).

Négydimenziós konvex politóp ábrázolása GeoGebrával

Talata István

Szent István Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,
és Dunaújvárosi Egyetem, Dunaújváros
talata.istvan@ybl.szie.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Bemutatjuk, hogy a GeoGebra dinamikus geometriai szoftverrel hogyan lehet ábrázolni egy 4-dimenziós konvex politópot a 3-dimenziós euklideszi térben centrális vetületként, majd összegezzük a szerzőnek a témakörrel kapcsolatos oktatási tapasztalatait.

ABSTRACT. We demonstrate how one can visualize a 4-dimensional convex polytope with GeoGebra, represented by its central projection in the 3-dimensional Euclidean space. Then we sum up the educational experiences of the author in this subject.

1. Bevezetés

Megmutatjuk, hogyan tudunk szemléltetni egy adott 4-dimenziós konvex politópot annak 3-dimenziós térre történő centrális vetületeivel, melyek 3-dimenziós poliédercellákból állnak. A politóp modellezéséhez és a 3-dimenziós vetületének az ábrázolásához a GeoGebra dinamikus geometriai szoftvert használjuk (ld. [3]).

A 3-dimenzióban centrális vetületként történő ábrázolás azért kézenfekvő, mert az emberi látásnak megfelelő centrális projekció (amely a 3-dimenziós térben egy síkra történő középpontos vetítéssel biztosít perspektív nézetet) 4-dimenziós térbeli analogonja egy 3-dimenziós affín altérre (vetítőhipersíkra) történő centrális projekció, és ez az altér azonosítható a 3-dimenziós euklideszi térrel (ld. [1], [4], [5] hivatkozásokat a 4D alakzatok 3D-ben történő szemléltetése témakörben).

Mivel a dimenziócsökkenéssel információvesztés jár együtt, ezért az alkalmazott centrális vetítést többféle nézőpontból, a centrum és vetítőhipersík együttes megváltoztatásával is célszerű elvégezni (akár folytonos keringést végezve), amely művelet felfogható úgy is, hogy a centrum és a vetítőhipersík (valamint egy hozzájuk tartozó koordináta-rendszer) fix, és a 4-dimenziós konvex politóp mozog, ill. változtatja méretét (eltolás, forgatás és középpontos nyújtás alkalmazásainak hatására).

A SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon a „Matematika és geometria az építészetben” választható tárgy keretein belül foglalkoztunk ezzel a problémával, mert ezen izgalmas, emberi fantáziát megmozgató témakör kapcsán a geometriai transzformációk matematikai elméletébe is mélyebb betekintést tudunk nyújtani a hallgatóknak. (Így a síkbeli és háromdimenziós térbeli számításokkal teljesen analóg módon lehetett megadni a forgatás és

KULCSSZAVAK. Szabályos test, konvex politóp, transzformáció mátrix, láthatóság, dinamikus geometria, GeoGebra.

KEYWORDS. Regular solid, convex polytope, transformation matrix, visibility, dynamic geometry, GeoGebra.

vetítés eredményét a 4-dimenziós térben, ahol már a szokásos ábrázolási módszerek nem lehetségesek.) Továbbá a transzformációk hatását vetületek segítségével is tudtuk láttatni a hallgatók számára úgy, hogy érdekes háromdimenziós alakzatok ábrázolására vezetett ez a feladat.

2. Konvex politópok

Egy d -dimenziós konvex politópon (ahol $d \geq 1$ egész szám) a d -dimenziós euklideszi tér véges sok zárt félterének a metszetét értjük, ha az egy nemüres belsejű korlátos részhalmaza a térnek. Megmutatható, hogy ezzel ekvivalens véges sok, nem egy közös hipersíkban elhelyezkedő pont konvex burkaként definiálni a konvex politópot. Egy d -dimenziós konvex politóp beágyazható egy d -nél magasabb dimenziós euklideszi térbe, ha annak egy d -dimenziós affin alterének a részhalmazaként van megadva. A politóp határán k -dimenziós lapok helyezkednek el ($0 \leq k \leq d-1$), és $k = 0, 1, 2, 3, d-1$ esetén ezeket csúcsoknak, éleknek, 2D-lapoknak, 3D-lapoknak, ill. hiperlapoknak nevezzük (tehát $d = 4$ esetén a hiperlapok a 3D-lapok). A csúcsok konvex burka kiadja a konvex politópot, a hiperlapok uniója kiadja a politóp határát, a hiperlapok egy cellarendszert ($(d-1)$ -dimenziós konvex politópokat) határoznak meg, egymáshoz $(d-2)$ -dimenziós lapjaikkal csatlakozó elemekkel (ld. [6]).

A 3-dimenziós euklideszi térben a konvex politópot konvex poliédernek hívjuk. A d -dimenziós konvex politópokat röviden konvex d -politópoknak is nevezzük.

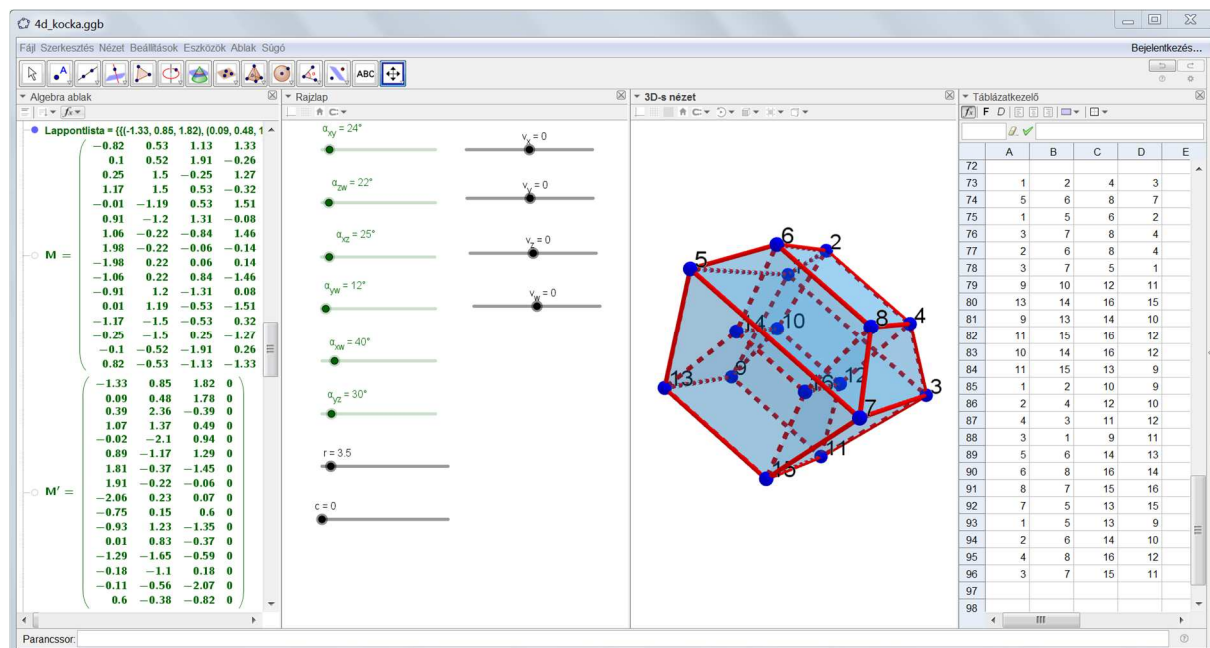
A 4-dimenziós konvex politópok közül az egyik legnevezetesebb osztály a szabályos konvex 4-politópoké. Ezt az a 6 politóp alkotja, amely a 3-dimenziós szabályos poliéderekkel analóg módon szabályos hiperlapokkal rendelkezik, és a csúcsalakzata is szabályos, azaz bármely csúcsához közel elmerszhető egy olyan hipersíkkal a politóp, mellyel a metszete egy szabályos 3-dimenziós poliéder, és az annak a középpontján átmenő és a hipersíkra merőleges egyenes áthalad a csúcson is. (Ezzel a metszet szimmetriái a csúcsalakzat és egyben az egész politóp szimmetriáivá is kiterjeszthetők.)

A szabályos konvex 4-politópok: 4-szimplex (5-cella, a tetraéder analogonja), 4-keresztpolitóp (8-cella, az oktaéder analogonja), 4-kocka (16-cella, a kocka analogonja), 24-cella (nem analogonja egyik háromdimenziós szabályos poliédernek sem, azonban a rombikus dodekaéder analogonja, amely 3-dimenzióban nem szabályos test), 120-cella (a dodekaéder analogonja), és a 600-cella (az ikozaéder analogonja), ld. [2]. A cellák száma az elnevezésekben a hiperlapok számát adja meg. A 120-cellának már 600 csúcsa és 1200 éle van, a 600 cellának pedig 720 éle és 1200 2D-lapja van, ezért ezeknek elég nehézkes a szemléltetése. Emiatt ez utóbbi politópoknak gyakran csupán a hiperlapjaik egyes csoportjait (melyek bizonyos értelemben összetartozó elemekből állnak) szokás egyszerre ábrázolni (3-dimenziós vetületeikkel szemléltetve azokat), hogy még felismerhetők legyenek az egyes ábrázolt alakzatok.

3. Modellezés és szemléltetés GeoGebrával

A következőkben leírjuk a 4-dimenziós politópok GeoGebrában történő modellezésének és ábrázolásának a lépéseit, ahogy azt megvalósítottuk a SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon a „Matematika és geometria az építészetben” választható tárgy keretein belül.

Az adott kurzuson a 4-dimenziós kockát készítettük el ilyen módon, a hallgatók házi feladatként hasonló módon elkészítettek egy-egy másik szabályos konvex 4-politópot (a 4-keresztpolitópot, ill. a 24-cellát).



1. ábra. A modellezés GeoGebra munkalapja

Az itt leírt módszer tetszőleges konvex 4-politóp ábrázolására használható, ennek csupán az lehet a gátja, ha a politóp olyan sok elemből áll, hogy azt már a szoftver (jelen esetben a GeoGebra) nem tudja kezelni.

3.1. Csúcsok megadása

Először felvisszük a csúcsok koordinátáit, n csúcs esetén egy $n \times 4$ -es mátrixba, amelyben az egyes sorok tartalmazzák egy-egy csúcs koordinátáit a 4-dimenziós térben. Azért nem a szokásos oszlopvektor megadást választottuk az egyes csúcsokra, mert sorvektorok esetén jobban látható a mátrix a bal oldalon elhelyezkedő Algebra ablakban.

Ha a Táblázatkezelő celláiba gépeljük be a 4-kocka csúcsait, pl. az összes ± 1 értékű koordinátát tartalmazó koordináta-négyesekként, akkor a 16 csúcs miatt 16×4 -es tömböt kapunk. Ezután kijelölve a cellákat, jobb egérgombbal klikkelve, kiválasztható a Létrehozás $\rightarrow$ Mátrix opció, végül az elkészült mátrix átnevezhető egy kívánt (pl. M_0) névre.

3.2. Csúcstranzformáció

Eltolás és forgatás együttes alkalmazásával valósítjuk meg a csúcspontok tetszőleges mozgását.

A 4-dimenziós térben 2-dimenziós affin alterek körül lehet forgatni. Az összes 2-dimenziós koordinátasíkra elkészítünk egy-egy forgatási mátrixot (a rájuk merőleges 2-dimenziós koordinátasíkok pontjai a forgatás fixpontjai): (x, y, z, w) változókat használva az egyes koordinátákra, az $F_{xy}, F_{zw}, F_{xz}, F_{yw}, F_{xw}, F_{yz}$ forgatási mátrixok F szorzatmátrixa az alkalmazott forgatások együttes hatására keletkező forgatás mátrixa. Például az F_{xy} így adható meg (az α_{xy} szöveget úgy adjuk meg, hogy értéke egy csúszkán állítható legyen):

$$F_{xy} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{xy}) & -\sin(\alpha_{xy}) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_{xy}) & \cos(\alpha_{xy}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A többi forgatási mátrix is hasonlóan adható meg, csak esetükben értelemszerűen nem az első két koordinátában történik a forgatás, hanem másik koordinátapár alkalmazásával. Így összesen 6 forgatási szög állítható be csúszkán. Kevesebb forgatási szög is elégséges lenne ahhoz, hogy egy tetszőleges forgatást létrehozzunk, de előnyös az összes 2D-koordinátasíkon történő forgatás lehetőségét meghagyni a szemléltetéshez.

Egy v eltolásvektor alkalmazásával (melynek koordinátái mind állíthatók csúszkán) az M_0 mátrix minden sorára az $x_1 = x + v$ képlettel kiszámítjuk az eltoltját (így keletkezik az M_1 mátrix), majd az $M = M_1 \cdot F^T$ tranzponált mátrixot tartalmazó mátrixszorzás után megkapjuk az eltolt, majd forgatott csúcsok M mátrixát.

Nyújtást nem alkalmazunk (amely a zoomolásnak felelne volna meg), ennek hatását a vetítőhipersík helyzetének a megváltoztatásával (párhuzamos eltolásával) tudjuk majd imitálni (ld. a modellezés következő lépését).

3.3. Centrális projekció

Egy paramétertől függő vetítési centrumot hozunk létre a $K(0,0,0,r) \in \mathbf{R}^4$ pontban, a vetítési hipersíknak pedig a $w = -c$ egyenlethez tartozó hipersíkot vesszük fel ($r > 0, c \geq 0$ csúszkán állítható paraméterek).

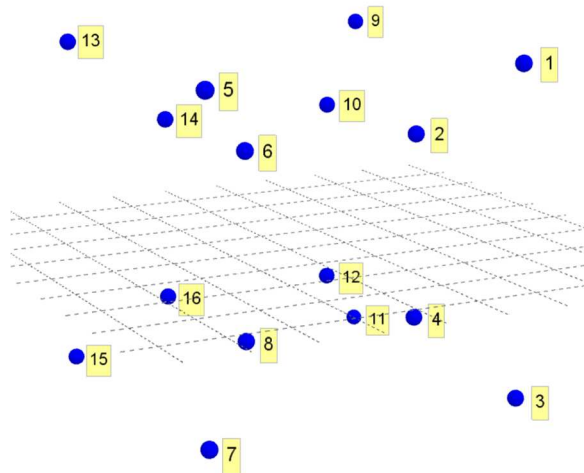
A vetítőhipersíkra történő centrális projekció képlete egyszerűen kiszámítható. Ha egy $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ helyvektorú pont vetülete az $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^4$ helyvektorú pont, melyre így az $\langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle = a$ egyenlet teljesül (amely azt fejezi ki, hogy $\mathbf{y}$ végpontja a vetítőhipersík egy pontja), ahol $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^4$ a vetítési hipersík normálvektora, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzatot jelöl, $a \in \mathbf{R}$, és $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^4$ a centrális projekció középpontjának helyvektora, akkor azt keressük, hogy hol található $\mathbf{y}$ végpontja az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{k}$ helyvektorú pontok által meghatározott egyenesen, azaz felírható $\mathbf{y} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{k}$ alakban, és keressük az ebben szereplő $t \in \mathbf{R}$ paraméter értékét. Ez a következőképp tehető meg:

$$\mathbf{y} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{k} = \mathbf{k} + t(\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle = a,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} + t(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \rangle = a,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{k} \rangle = a,$$

$$t = \frac{a - \langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle}.$$



2. ábra. A csúcsok vetülete az indexfelirataikkal

Jelen esetben $\mathbf{n} = (0,0,0,1)$, $\mathbf{k} = (0,0,0,r)$, $a = -c$, ezért

$$t = \frac{-c - r}{\mathbf{x}_4 - r},$$

ahol $\mathbf{x}_4$ a 4-edik, w koordinátája az $\mathbf{x}$ vektornak. Az így kiszámított vetítést alkalmazzuk az összes transzformált csúcsra, azaz az M mátrix minden sorára. A vetítés után kapott M' mátrix soraiban a 4-edik koordináták mind $-c$ -vel egyenlők, azokat elhagyva egy $n \times 3$ -as N mátrix készíthető, amelyből a

Pontlista=Sorozat(Pont(Elem(N, i)), i, 1, n)

paranccsal egy pontlista készíthető, ez ábrázolásra kerül a GeoGebra 3D-s nézet ablakában.

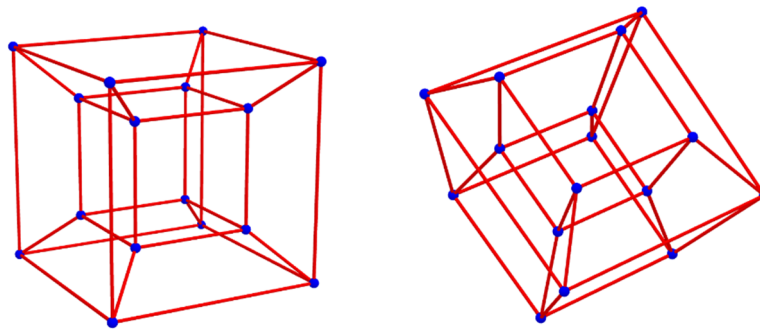
Az élek, majd később a lapok vetületének az elkészítéséhez segítséget nyújthat, ha látjuk az egyes csúcsok sorszámait (indexeit). Ehhez létrehozunk egy feliratlistát:

Feliratlista=Sorozat(Szöveg(i, Elem(Pontlista, i) + (0.1, 0, 0)), i, 1, n)

Azért szerepel a fenti parancsban egy $(0.1,0,0)$ vektorral történő eltolás, hogy a felirat ne lógjon bele a csúcsot reprezentáló kis gömbbe.

3.4. Élek vetülete

A Táblázatkezelőben felvisszük az élek indexeinek listáját, ez egy $n_1 \times 2$ -es tömb azon (i, j) indexpárokkal ($1 \leq i < j \leq n$), melyekre az i -edik és a j -edik csúcs (azaz az M i -edik és j -edik sorához tartozó csúcsok) éllel vannak összekötve. Ebből készítünk egy $n_1 \times 2$ -es élmátrixot. A 4-kocka esetén ez egy 32×2 -es mátrix.



3. ábra. Élek ábrázolása különböző nézetekben

Majd készítünk egy éllistát a csúcsok vetületeit összekötő szakaszokból az élekhez tartozó csúcspárok esetén:

Ellista=Sorozat(Szakasz(Elem(Pontlista, Elem(Elmatix, i, 1)), Elem(Pontlista, Elem(Elmatix, i, 2))), i, 1, n_1)

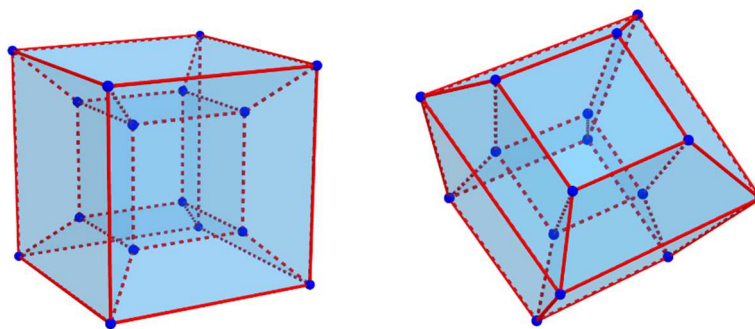
3.5. Lapok vetülete

A Táblázatkezelőben felvisszük a lapok indexeinek listáját, ez egy $n_2 \times k_2$ -es tömb azon indexekkel egy sorban, amelyekhez tartozó csúcsok egy 2-dimenziós lapon vannak, a megadás sorrendjében egymás után következve a sokszöglap határán (k_2 a 2D-lapok csúcsszámainak maximuma, és olyan lapok esetében, ahol kisebb a csúcsszám ennél, ott nullákkal pótoljuk ki a tömb érintett sorát). Ebből egy $n_2 \times k_2$ -es 2D-lapmátrixot készítünk Lapmatrix néven. A 4-kocka esetén ez egy 24×4 -es mátrix.

Majd egy laplistát készítünk a csúcsok vetületeire illeszkedő sokszögekből a 2D-lapokhoz tartozó csúcsok esetén úgy, hogy először egy Lappontlista listában felsoroljuk egy 2D-lap vetületének a csúcsait, majd ezekhez készítjük el a sokszögeket 3-dimenzióban:

- `Lappontlista=Sorozat(Sorozat(Elem(Pontlista, Elem(Lapmatrix, i, j)), j, 1, k_2), i, 1, n_2)`
- `Laplista=Sorozat(Sokszög(Elem(Lappontlista, i)), i, 1, n_2)`

Az előbbi parancsok közül a Lappontlista megadási parancsa akkor működik jól, ha minden 2D-lap pontosan k_2 csúccsal rendelkezik – ha nem ez a helyzet, akkor kicsit módosítani kell a parancson, a Lapmatrix i -edik sorából csak a nem nulla értékekre végeztetve el a számítást.



4. ábra. Lapok megjelenítése különböző nézetekben

4. További lehetőségek GeoGebrával

A következőkben felsorolunk néhány, a fentebb leírt modellben még nem megvalósult ábrázolási, ill. modellezési lehetőséget, melyekkel továbbfejlesztve a modellt, még szemléletesebbé tehető az ábrázolás, vagy egyszerűbbé tehető a modellkészítés.

4.1. Vetületi kép korrekciója

A kapott 3-dimenziós vetület csak akkor helyes, ha nincs olyan csúcs, melynek a z koordinátája r -nél nagyobb, ugyanis ilyen esetben annak a csúcsnak nem létezik vetülete a vetítő hipersíkra, mert a vetítősugár félegyenese nem metszi azt a hipersíkot. Mivel a modell az egész vetítőegyenest a vetítőhipersíkkal vett metszéspontját számítja ki, így ilyen esetben kapunk egy fals csúcsvetületet, és az abba a csúcsba futó élek, ill. a csúcsra illeszkedő sokszögek vetületei sem lesznek helyesek. Az érintett élek helyett félegyeneseket kellene berajzolni, mert az élek vetülete ilyenkor nem korlátos. Az érintett 2D-lapok helyett pedig síkbeli nem korlátos konvex sokszögtartományokat kellene berajzolni. Ha nem konvex a 3D vetületi kép, akkor tudhatjuk, hogy ezzel a problémás esettel állunk szemben, ekkor állítsuk r értékét megfelelően nagyra.

4.2. Láthatóság

A láthatóság nem került megoldásra ebben a modellben, így a hiperlapok vetületeinek cellái kétszeresen fedik le a vetület konvex burkát, a látható (azaz a vetítősugáron a centrumhoz közelebbi pontokat tartalmazó hiperlapok vetületcellái) és a nem látható (azaz a vetítősugáron a centrumtól távolabbi pontokat tartalmazó hiperlapok vetületcellái) részek mind ábrázolásra kerülnek. Azonban konvex d -politóp hiperlapjainak a normálvektorait ismerve könnyen eldönthető a láthatóság. Ugyanis akkor és csak akkor látható egy konvex d -politópnak egy hiperlapja, ha a vetítés centruma a hiperlap által kifeszített hipersíknak a

politópot nem tartalmazó nyílt félterében helyezkedik el. A vetítési centrum helyvektorának a hipersík normálvektorával vett skalárszorzatával mindez könnyen leellenőrizhető, mint ahogy az is, hogy mely élek és 2D-lapok fekszenek egy 3D-lapon, ennek eldöntéséhez elég a 3D-lap normálvektorának a skaláris szorzatát kiszámítani az él vagy 2D-lap egy tetszőleges relatív belső pontjával (pl. a csúcsaik súlypontjával).

4.3. Tetszőleges 2-dimenziós sík körüli forgatás

A 4-dimenziós térben tetszőlegesen beállítható, de fix 2-dimenziós sík körüli forgatás megvalósítása hiányzik a modellből, csupán speciális irányú forgatások egyszerre történő alkalmazásával jön ki általános irányú forgatás. Érdekes lehet ilyen fogatást is megvalósítani.

4.4. Konvex burok laphálójának kiszámítása

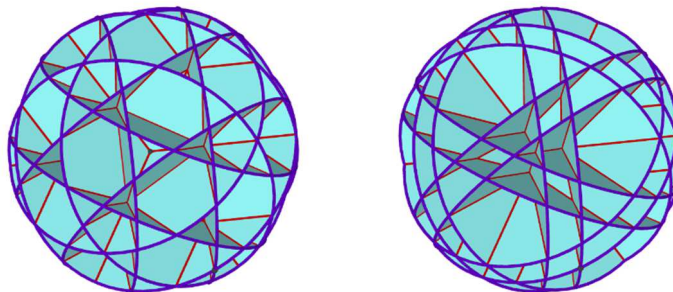
A csúcsok megadása már meghatározza a konvex burok lapstruktúráját, de sajnos a GeoGebra nem teszi lehetővé ennek a lapstruktúrának a kiszámítását általános esetben, mivel ez a szoftver inkább ábrázolásra alkalmas, nagyobb mennyiségű számítás elvégzésére már nem. Szerencsére, ha már ismert a lapstruktúra, vagy más módon ki tudjuk azt számítani, akkor az élek, 2D-lapok és akár a 3D-lapok illeszkedései is felvihetők GeoGebrába (a 3D-lapokat azért nem vittük fel a 4-dimenziós modellbe az ábrázoláskor, mert azok vetületeit közvetlenül úgysem lehet ábrázolni, hanem csak a 2D-lapjaikat, ill. éleiket). Mindenesetre jó lenne, ha a csúcsok koordinátáin túlmenően minél kevesebb adat bevitele lenne szükséges a modell számára.

5. Oktatási tapasztalat

A SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon a „Matematika és geometria az építészetben” választható tárgy keretein belül foglalkoztunk ezzel a témakörrel.

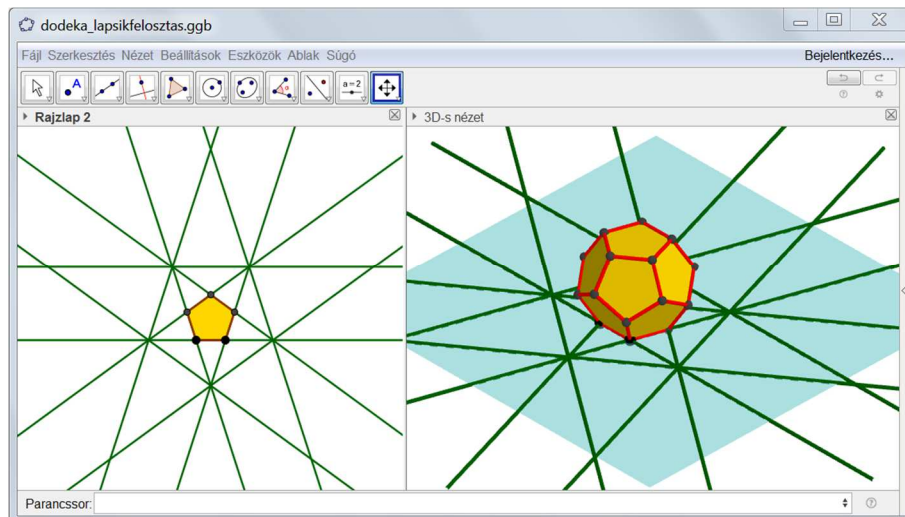
A CAD programok és egyéb 3D grafikai programok használatával a hallgatók elkényelmesedtek, mivel a 3D transzformációk (forgatás, tükrözés, nyújtás, eltolás), és a 3D keringés is kényelmesen, közvetlenül megvalósíthatók az ilyen programokban. Nincs igényük a mögöttes matematikai műveletek megismerésére.

Azért, hogy a geometriai transzformációk matematikájába jobb betekintést nyújtsunk a hallgatóknak, és a számukra is érdekes témakörrel tegyük ezt, elvégeztük a 4-dimenziós terek egy alakzatának (4-dimenziós kocka) a 3-dimenziós térre való centrális projekcióját, az alakzat forgatását, eltolását lehetővé téve szemléltetéskor.



5. ábra. Szabályos dodekaéder lapsíkjai térfelosztásának az ábrázolása lapsíkokba rajzolt körlapokkal, különböző sugárméretek esetén

A láthatóság megvalósítására már nem jutott idő ebben az esetben. Azonban 3D konvex szabályos, ill. archimédeszi poliéderekre kaptak olyan feladatot a hallgatók, hogy vizsgálják meg, hogy a poliédernek milyen laphalmazai láthatók egyszerre centrális vetületként – ez attól függ, hogy a lapok síkjainak melyik oldalán helyezkedik el a vetítési centrum, tehát a lapsíkok általi térfelosztást vizsgálták a hallgatók több-kevesebb sikerrel, de nagy lelkesedéssel.



6. ábra. Szabályos dodekaéder lapsíkjai térfelosztásának az ábrázolása az egy lapsíkba metsző többi lapsík egyenesmetszeteivel

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak, hogy erről a témakörrel előadhattam Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2017-es programjában.

Irodalomjegyzék

- [1] 4D Visualization, <http://eusebeia.dyndns.org/4d/vis/vis>.
- [2] Coxeter, H. S. M., Regular complex polytopes, Cambridge University Press (1991), pp. 210. ISBN 05-213949-0-2.
- [3] GeoGebra, <https://www.geogebra.org/>.
- [4] Gévay, G., Miyazaki, K., Négydimenziós téridomok szemléltetése (Visualizing 4-dimensional geometric shapes), VII. Multimédia az oktatásban konferencia, Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Budapest, 2001. Konferenciakiadvány, http://www.mmo.njszt.hu/Kiadvanyok/2001/index_2001.htm (2001), 1-6.
- [5] Kolcun, A., 3D visibility of 4D Convex Polyhedra. In: WSCG'2005 Poster Proceedings. Plzeň: Západočeská univerzita, 2005. Západočeská univerzita (2005), 35-36. ISBN 80-903100-8-7.
- [6] Szabó L., Konvex geometria, Egyetemi jegyzet, ELTE (1996) pp. 136.

A WRF oszlopmodell különböző felszínközeli réteg parametrizációinak validálása a PABLS mérésekkel

Virág Szabolcsné Németh Rita
ELTE TTK, Meteorológiai Tanszék
szabolcsnevirag@gmail.com

Breuer Hajnalka
ELTE TTK, Meteorológiai Tanszék
bhajni@nimbus.elte.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Fő feladatunk a légkör felszínközeli rétegében zajló mikrometeorológiai folyamatok modellezésének lehetséges fejlesztési irányainak feltérképezése. Ebben a munkában a WRF oszlopmodell planetáris határréteg és felszínközeli réteg sémák különböző kombinációit teszteltük. Az eredmények azt mutatják, hogy a planetáris határréteg parametrizációjának megfelelő megválasztása kulcsfontosságú, szemben a felszínközeli séma megválasztásával.

ABSTRACT. Our main task is to map the possible development areas of the modelling of microscale processes in the atmospheric surface layer. In this study the single column version of the WRF model was used to test the different available combinations of planetary boundary layer (PBL) and surface parametrizations. Results show that the proper choice of PBL scheme is the key, as opposed to the choice of surface layer scheme.

1. Bevezetés

A felszínközeli réteg a planetáris határréteg legalsó része, ahol a turbulens fluxusok a magnitúdójuk kevesebb, mint 10 %-ával változnak [1]. Itt zajlik a legjelentősebb momentum-, hő- és nedvességcseré. Állapota meghatározza a szárazföld-légkör kölcsönhatásokat [2]. Ez a legkevésbé ismert része a határrétegnek, modellezésének és mérésének nehézségét az itt zajló mikroskálájú folyamatok, például a turbulencia okozzák. A turbulens áramlást összetett és gyakran kaotikus viselkedés jellemzi, becslése mégis elengedhetetlen a prognosztikus modellek megfelelő működéséhez. Tekintve, hogy a turbulens folyamatok explicit leírásához mikrométer léptékre lenne szükség, a mozgás nincs leírva a modellben, csupán azok hatását becsüljük (pl. transzportált hő). Ezek a becslések továbbra is fizikai egyenletek segítségével történnek az ún. parametrizációkban. A kutatás a Weather Research and Forecasting (WRF) 3.8 oszlopmodelljének segítségével készült. Elsősorban a modell planetáris határréteg (PBL) és felszínközeli réteg (SFC) séma parametrizációit teszteltük. A felszínközeli réteg sémák kezelik a hőfluxusokat, a nedvességet és a momentumokat a légkör alsó részében. Olyan együtthatókat állapítanak meg, amik lehetővé teszik nedvesség fluxusok számítását. Ezek a fluxusok biztosítják az alsó határfeltételeket a PBL sémákban zajló vertikális transzporthoz [3]. A különféle parametrizációk hatékonyságának vizsgálatához mérésekre van szükség. Elengedhetetlen a vertikálisan minél több mintavétel a modell validálásához.

KULCSSZAVAK. Felszínközeli réteg, WRF oszlopmodell, planetáris határréteg séma.

KEYWORDS. Surface layer, WRF Single Column Model, planetary boundary layer scheme.

2. Adatok

A validáláshoz felhasznált adatok a PABLS'15 kutatási project keretében készültek a szegedi reptér mellett kvadrokopteres szondás felszállásokkal [4]. Összesen 21 felszállás adatsorát használtuk fel, melyek 2015. július 16-áról 17-ére virradó éjszaka zajlottak. A mérések a felszíntől, 84 méter magasról, körülbelül 150 méter tengerszint feletti magasságig készültek és közel 50 centiméterenként regisztrálták a légköri állapothatározókat. Felhasználtuk a hőmérséklet, nyomás, relatív nedvesség, szélesség és szélirány adatsorokat.

3. Használt parametrizációk

Lefuttattuk az oszlopmodellt a megfelelő időszakra az összes WRF-ben beállítható planetáris határreteg és felszínközeli réteg séma kombinációval. Ebből összesen 26 volt. A kombinációk és az összes felhasznált planetáris határreteg (PBL) parametrizáció és felszínközeli réteg (SFC) séma parametrizáció az 1. táblázatban és a 2. táblázatban kerül bemutatásra. A turbulens áramlás lezárási problémájának megoldására különböző rendű lezárásokat használnak az egyes planetáris határreteg parametrizációk [1]. Az általunk tesztelt parametrizációk elsőrendű, másodrendű vagy másfeles rendű lezárással rendelkeznek. Két fő osztálya a turbulens lezárásnak a lokális és a nemlokális lezáras. Lokális lezáráskor egy ismeretlen mennyiség bárhol a térben az ugyanabban a pontban lévő ismert mennyiségek értékeivel vagy gradienseivel van parametrizálva. Nemlokális lezáráskor ellenben az egy pontbeli ismeretlen mennyiséget a tér sok pontjából vett ismert értékekkel parametrizálják [1]. A planetáris határreteg magasságának operatív definíciója is két alapvető osztályba sorolható a különféle sémáknál. Az első osztály a bulk Richardson szám segítségével számított planetáris határreteg magasságot egy előre meghatározott kezdeti szintről. A második osztály, amikor azon a szinten állapítja meg a planetáris határreteg tetejét, ahol a turbulens kinetikus energia profil egy előre meghatározott küszöbértékig lecsökken [5]. Az 1. táblázatban minden PBL beállításhoz olvasható a turbulens lezáras rendje, illetve, hogy lokális vagy nemlokális osztályba sorolható a lezáras. Ezen kívül megtalálható, hogy K-profil alapján vagy turbulens kinetikus energia (TKE) alapján számol. A planetáris határreteg magasságának (PBLH) meghatározása az egyes sémákban a bulk Richardson szám (Ri_b) vagy a TKE segítségével történik. A WRF modell SFC sémái és felhasznált 26 különböző PBL/SFC kombináció felsorolása a 2. táblázatban látható.

PBL beállítás	PBL séma	Lezáras rendje és osztálya	Számolás alapja	PBLH definíció
1	Yonsei University séma	1,0 nemlokális	K-profil	Ri_b
2	Mellor-Yamada-Janjic séma	1,5 lokális	TKE	TKE
3	NCEP Global Forecast System séma	1,0 nemlokális	K-profil	Ri_b
4	Eddy-diffúziós tömegfluxus QNSE séma	1,5 lokális	TKE	TKE
5	2,5 szintű Mellor-Yamada-Nakanishi-Niino séma	1,5 lokális	TKE	TKE
6	3 szintű Mellor-Yamada-Nakanishi-Niino séma	2,0 lokális	TKE	TKE
7	Asszimmetrikus Konvektív Modell 2 séma	1,0 lokális/nemlokális	K-profil	Ri_b
8	Bougeault-Lacarrere séma	1,5 lokális	TKE	TKE
9	University of Washington séma	1,5 lokális	TKE	Ri_b
11	Shin-Hong „scale-aware” séma	1,0 nemlokális	K-profil	Ri_b
12	Grenier-Bretherton-McCaa séma	1,5 lokális	TKE	Ri_b

1. táblázat: A használt planetáris határreteg sémák rövid leírása

SFC beállítás	SFC séma
1	Módosított MM5 Monin-Obukhov séma
2	Monin-Obukhov (Janjic) séma
3	NCEP Global Forecast System séma
4	QNSE felszínközeli réteg séma
5	Mellor–Yamada–Nakanishi–Niino séma
7	Pleim–Xiu séma
91	Régi MM5 séma

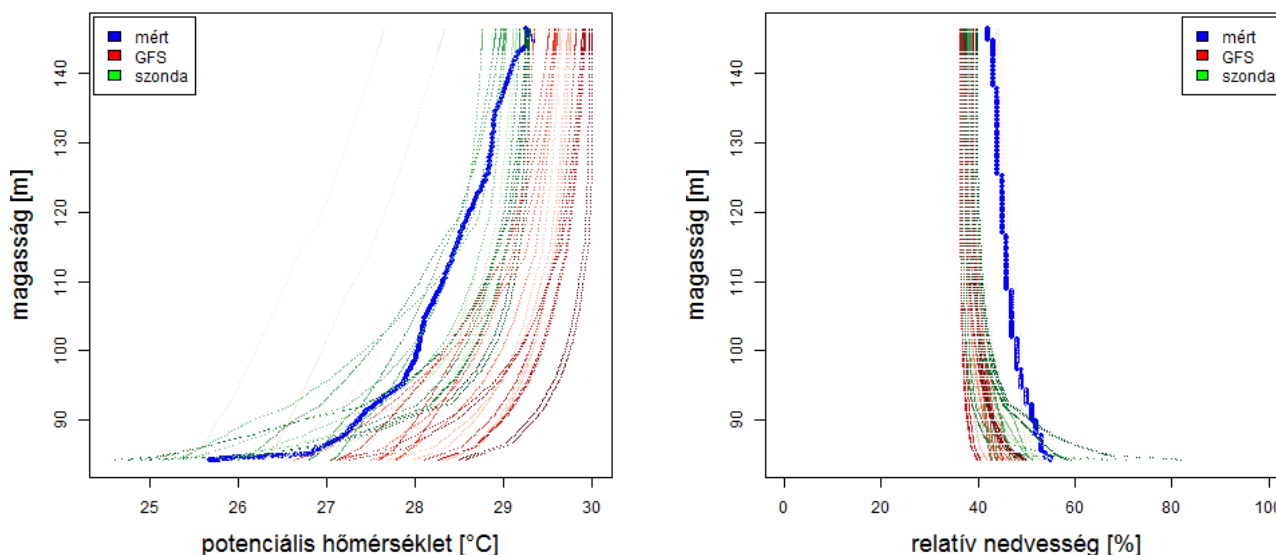
PBL/SFC					
1.	1/1	8.	5/5	15.	7/7
2.	1/91	9.	5/91	16.	7/91
3.	2/2	10.	6/1	17.	8/1
4.	3/3	11.	6/2	18.	8/2
5.	4/4	12.	6/5	19.	8/91
6.	5/1	13.	6/91	20.	9/1
7.	5/2	14.	7/1	21.	9/2

2. táblázat: A használt felszínközeli réteg sémák és a planetáris határréteg (PBL) és felszínközeli réteg (SFC) séma beállítások kombinációi

4. Esettanulmány

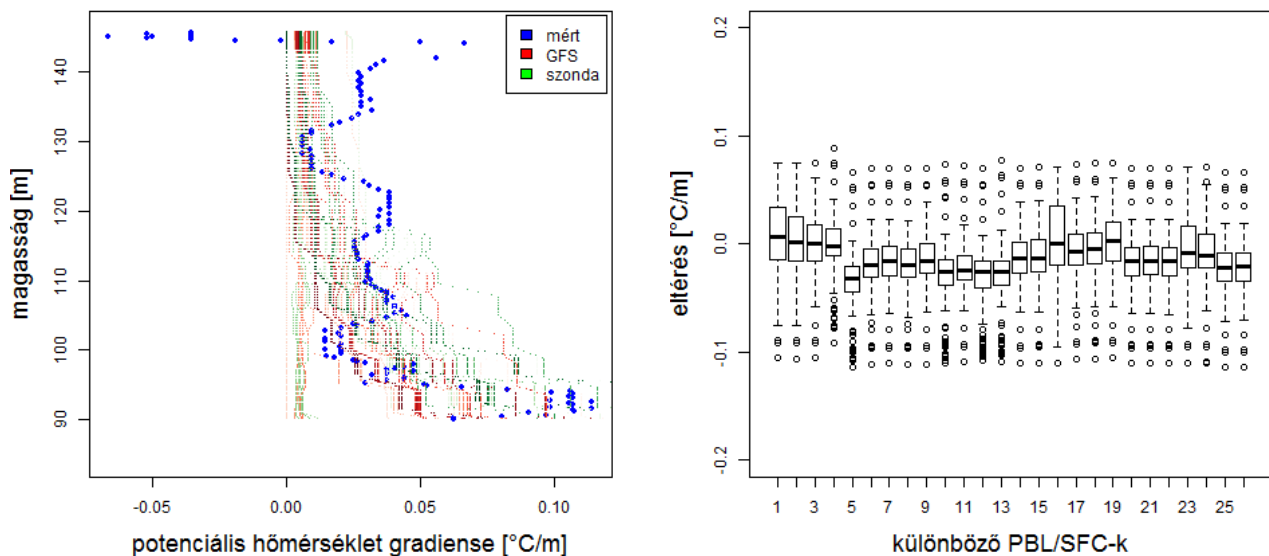
Az oszlopmodell futásához szükséges kezdeti értékeket mind az aznap déli szegedi rádiószondás felszállásból, mind a Global Forecast System (GFS) 12 UTC-re vonatkozó adataiból előállítottuk. Az egységes mértékegységre számított és lineáris interpolálással közös magassági szintekre hozott modelleredmények és mérési adatsorok statisztikai vizsgálatát R programmal és programcsomagokkal végeztük. A felhasznált állapotváltozók a hőmérséklet, a nyomás, a relatív nedvesség, a szélsébség és a szélirány. A hőmérséklet és a nyomás segítségével potenciális hőmérsékletet is előállítottuk, mely a légköri stabilitás indikátora.

Az 1. ábra a 19:10 időponthoz tartozó 12 UTC-kor indított modellfutás potenciális hőmérséklet és relatív nedvesség értékeit mutatja. Egyszerre látható mind a 26 féle beállítással számított érték erre az időpontra, piros színnel a GFS adatokból, zöld színnel a szonda által mért adatokból származó kezdeti értékkel készült modelleredmények. Vastag kék színnel a 19:10-kor készült mérést jelöltük.



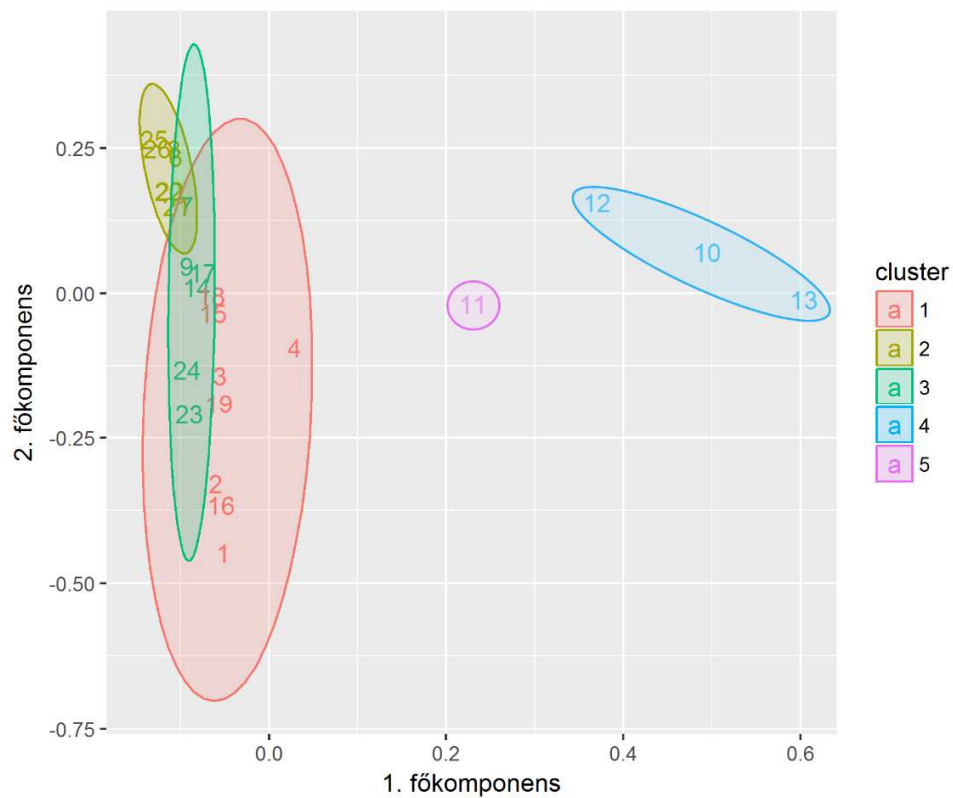
1. ábra. A 19:10 időponthoz tartozó mért és modellezett potenciális hőmérséklet és relatív nedvesség változása a magassággal a felszínközeli légrétegben

Figyelembe véve, hogy a kapott potenciális hőmérséklet jelentősen függ a helyes inicializációtól, ezért a vertikális gradiense is meghatároztuk, mely inkább utal a parametrizációk fizikai működésére. A potenciális hőmérséklet gradiense látható a 2. ábrán a 19:10 időpontra vonatkozóan. Ezen megfigyelhető, hogy bár a modellezett potenciális hőmérséklet egyes beállításokra akár 2 Celsius fokos tévedést mutat, a görbék menete hasonlít a mérési görbe menetéhez. A 2. ábra boxplot diagramján láthatóak a GFS kezdeti értékkel számított gradiensek hibaértékei. A mért adatoktól vett eltérés nullához közeli mind a 26 különböző PLB/SFC beállításra. Bár a GFS kezdeti értékű potenciális hőmérséklet értékek néhány °C-kal magasabb értéket mutattak a mérésnél, gradiensükben mégis kicsi a különbség. A legkevesbé pontos beállításnak az 5-ös beállítás bizonyult. A többi beállítás a modellezett meteorológiai változótól függően viselkedett. Például relatív nedvességre a 4-es beállítás adta a legkisebb hibát, szélirányban a 20, 21, 22, 25, 26-os beállítások hasonlóan kiemelkedően viselkedtek. Ellenben a szélsébségre a 25-ös és 26-os beállítások a legpontatlanabbak.

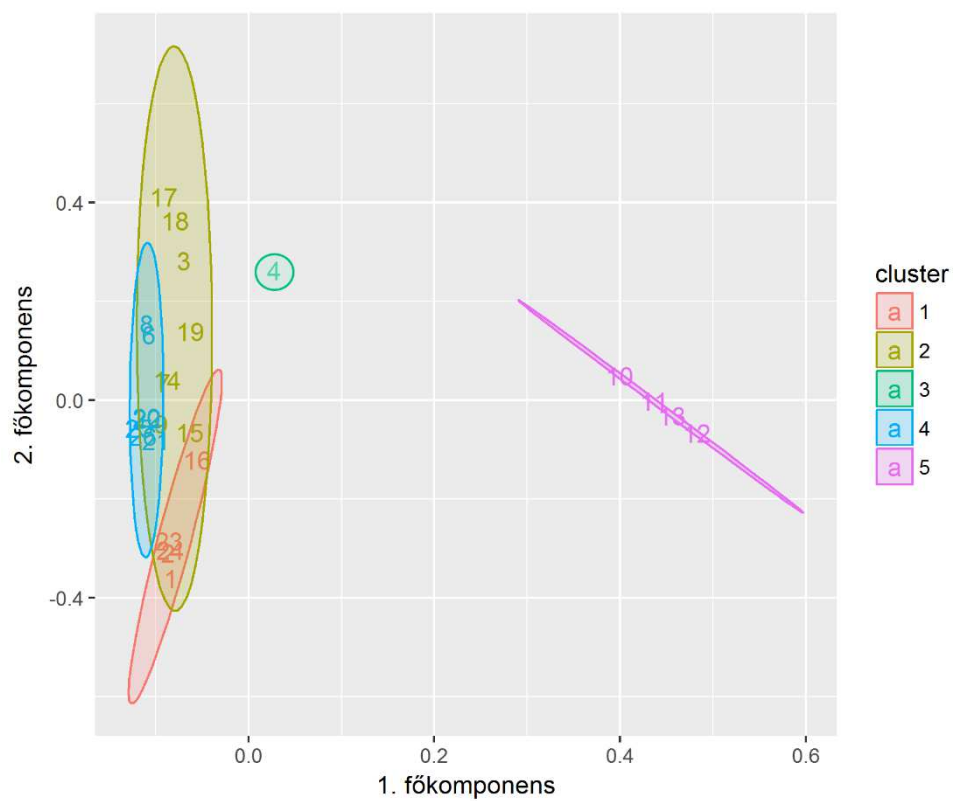


2. ábra. A 19:10 időponthoz tartozó mért és modellezett potenciális hőmérséklet gradiensek változása a magassággal és a potenciális hőmérséklet gradiensek GFS kezdeti értékekkel indított eredményei boxplot diagrammja

Az egyes parametrizációk egymással való kapcsolatát klaszteranalízissel vizsgáltuk meg. A klaszterek meghatározásának alapja az egyes különbség-adatsorok főkomponens analízise volt. Az első két főkomponens alapján lettek meghatározva az egyes csoportok. Ehhez a K-alapú csoportanalízishez a CLARA módszert használtuk [6]. A 26 féle beállításból 5 klasztert állítottunk elő, kisebb klaszterszám esetén az egyes klaszterelemek közötti távolság jelentősen megnövekedett. Az analízist az egyes modellbeállítások mérésektől vett hibaértékeire készítettük el. Az 5-ös beállítás majdnem minden esetben kiugró volt, nagyságrendileg hibás értékeket adott. Így az analízisből kiszűrtük. A többi beállításnál az figyelhető meg, hogy az ugyanazt a PBL sémát, de különböző SFC sémát használók eredményei nagyon hasonlítanak egymáshoz. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a prognosztikus modellben a megfelelő PBL-parametrizáció választása a kulcsfontosságú, az SFC-séma kisebb különbségeket okoz. A 19:10 időponthoz tartozó hőmérsékletek hibaértékeire elvégzett klaszteranalízis GFS kezdeti értékekkel indítva a 3. ábrán, szonda kezdeti értékekkel a 4. ábrán látható. Bár az 1. ábrán megfigyelhető a pontos kezdeti érték fontossága, itt azt láthatjuk, hogy a főkomponens analízis különböző kezdeti értékekkel is hasonló helyre sorolja az egyes PBL/SFC sémákat.



3. ábra. A 19:10 időponthoz tartozó GFS kezdeti értékekkel indított hőmérsékletértékek 26 különböző PBL/SFC beállítás klaszteranalízis ábrája



4. ábra. A 19:10 időponthoz tartozó szonda kezdeti értékekkel indított hőmérsékletértékek 26 különböző PBL/SFC beállítás klaszteranalízis ábrája

Ha a PBL sémák szerint 12 klasztert állítunk elő, akkor az egyes PBL szerinti csoportosulás a legtöbb esetben megfigyelhető. Kivételt képez ez alól a 6-os PBL parametrizáció SFC kombinációi, melyek az esetek jelentős részében 2 különböző klasztert képeznek, így ezeket a későbbiekben további vizsgálatoknak vetjük alá. Az eltérés legvalószínűbb oka, hogy a 6-os PBL séma rendelkezik a turbulencia legpontosabb közelítésével (másodrendű lezárású), amely esetén már a különböző SFC-k hatása nem lesz elhanyagolható. Ha az SFC-k számának megfelelő klaszterszámot használunk, a csoportok továbbra is a különböző PBL sémák szerint csoportosulnak, és nem az SFC-k szerint.

5. Összefoglaló

Legfontosabb eredményünk, hogy a felszínközeli réteg séma megválasztása kevésbé fontos, mint a megfelelő planetáris határréteg parametrizáció. Ennek legoptimálisabb megválasztása a modellezni kívánt meteorológiai állapotot meghatározó függvénye. Továbbá az Eddy-diffúziós tömegfluxussal számított planetáris határréteg parametrizáció (4-es PBL beállítás, 5. sorszám) bizonyult a legkevésbé jónak.

Irodalomjegyzék

- [1] **Stull, R. B.**, An Introduction to Boundary Layer Meteorology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988, [doi:10.1007/978-94-009-3027-8](https://doi.org/10.1007/978-94-009-3027-8).
- [2] **Jiménez, P. A., Dudhia, J., González-Rouco, J. F., Navarro, J., Montávez, J. P., García-Bustamante, E.**, A revised scheme for the WRF surface layer formulation, Monthly Weather Review, 140 (2012), 898–918, [doi:10.1175/MWR-D-11-00056.1](https://doi.org/10.1175/MWR-D-11-00056.1).
- [3] **Bianco, L.**, Surface layer parameterization in WRF. ATOC 7500: Mesoscale Meteorological Modeling, Presentation, 2008.
- [4] **Tordai, Á. V.**, Mikrometeorológiai mérőrendszer kialakítása és alkalmazása síkvidéki, magashegyi és barlangi körülmények között, TDK dolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 2016.
- [5] **Banks, R. F., Tiana-Alsina, J., Baldasano, J. M., Rocadenbosch, F., Papayannis, A., Solomos, S., Tzanis, C. G.**, Sensitivity of boundary-layer variables to PBL schemes in the WRF model based on surface meteorological observations, lidar, and radiosondes during the HygrA-CD campaign, Atmospheric Research, 176–177 (2016), 185–201, [doi:10.1016/j.atmosres.2016.02.024](https://doi.org/10.1016/j.atmosres.2016.02.024).
- [6] **Kaufman, L., Rousseeuw, P. J.**, Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis, Wiley, New York, 1990, [doi:10.2307/2532178](https://doi.org/10.2307/2532178).

A vízterhelés, a vízgyűjtő és vízválasztó vonalak meghatározása az eső beszivárgásának és szétfolyásának modellezésével

Kalmár János
MTA CSFK GGI
kalmar@ggki.hu

Benedek Judit
MTA CSFK GGI
benedek@ggki.hu

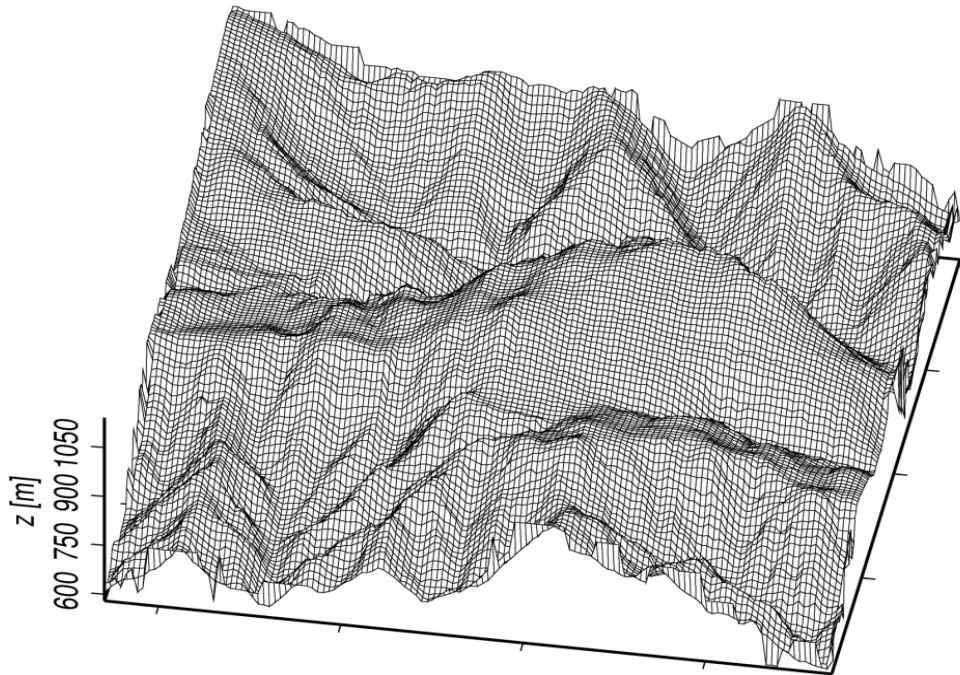
ÖSSZEFOGLALÓ. Rácsbázisú véges-elem esőzési/szétfolyási modellt használtunk alpesi jellegű domborzat mellett a talaj vízterhelésének és a vízgyűjtő-vízválasztó vonalak meghatározására. A geodinamikai mérések szerint esőzés alatt és után a dőlésmérők jelentős anomáliákat regisztráltak. A modellezés kimutatta, hogy a vízterhelés gravitációs hatása a dőlésmérő által mutatott eső utáni anomália töredékét képes csak megmagyarázni. Ezután egy tisztán szétfolyási modellel a terep vízgyűjtő és vízválasztó vonalait határoztuk meg, ami – a domborzati viszonyokat figyelembe véve – teszterületünkön maradéktalanul helytálló eredményeket hozott.

ABSTRACT. A grid-based finite element run-off / drainage model was used on alpine terrain to determine soil water loading and water catchment area and water separation lines. According to geodynamic measurements (tilt meters records) significant anomalies are recorded during and after rainfalls. Our modelling has support that the gravitational effect of water can only explain a fraction of the post-rain anomaly shown by the tilt meter. Then, with a purely flush model, we determined the lines of the catchment areas and the water separator of the terrain, which, taking into account the terrain conditions, gave realistic results in our test area.

1. Bevezetés

A teszterület változatos domborzata (1. ábra) miatt nyilvánvaló, hogy a talaj csapadékból származó vízterhelése egyenlőtlen lesz a völgyek vízgyűjtő, illetve a gerincek vízválasztó hatása miatt, de nem ismertük ennek lehetséges mértékét és hatását dőlésmérővel végzett mérésekre. A gerinceken csak némi beszivárgással számoltunk, de a völgyekben, gödrökben a leesett csapadék többszöröse is összegyűlhet, és a tömegnövekedés a lokális gravitációs erőterre is hatással van, melynek mértékét a dolgozatban előállított modellel becsülni tudjuk.

A szakirodalom [1] szerint a talajba beszivárgó víz (talajtípustól függően) elsősorban függőlegesen halad lefelé, amíg vízzáró réteghez (pl. agyag) nem ér. A beszivárgás révén a talaj víztartalma folyamatosan nő, amíg el nem éri a telítettséget, ekkor megszűnik a beszivárgás, és a víz elkezd a felszínen felhalmozódni, vagy ha a dőlésviszonyok lehetővé teszik, akkor a felszínen folyik tovább.



1. ábra. A teszterület perspektivikus képe. Horizontális skálázás 1 km-ként

2. Modell a talaj vízterhelésének meghatározására

A csapadéknak a talajfelszíni illetve felszín alatti vízháztartásra gyakorolt hatását rácsbázisú véges-elemes módszerrel modelleztük. A vizsgált terület rács-szerkezetű digitális terepmodelljét (DTM) a $h_{i,j}$ talajfelszín magasságokkal írjuk le [2], amit a későbbi képletek egyszerűsítése végett mm-ben mérünk.

Legyen adott ugyanezen a rácson a talajt borító vízréteg $hw_{i,j}$ magassága (ez kezdetben ott nem 0, ahol permanens folyóvíz vagy állóvíz van), szintén mm-ben.

Legyen adott ugyanezen a rácson a talaj $v_{i,j}$ vízfelvevő potenciálja mm-ben (ahol a talajt állandó vízréteg borítja, ott nyilván 0, mert már telítődött, ettől távolodva viszont elkezd emelkedni a csökkenő talajnedvesség miatt), mert ebben mérjük a csapadék vízhozamát is. Homogén, víz által nem borított talajon ezt konstansnak vettük, bár a valóságban a mélyebben fekvő területeken a magasabb talajvízszint miatt várhatóan alacsonyabb lesz a vízfelvevő potenciál, illetve mértéke a talajtípusnak is függvénye – erre vonatkozó rácsadatokat sajnos nem rendelkezünk.

Modellünkben feltettük, hogy egységnyi idő alatt a talajba beszivárgó $b_{i,j}$ vízmennyiség (mm-ben mérve) arányos a $v_{i,j}$ vízfelvevő potenciállal ([1], 34-35. oldal grafikonjából és képleteiből levezethető), de nem lehet nagyobb a felszíni $hw_{i,j}$ vízpotenciálnál:

$$b_{i,j} = \min(hw_{i,j}, \{\alpha \cdot v_{i,j}, \text{ és } 0 < \alpha < 1\}), \text{ ahol } \alpha \text{ a beszivárgási tényező.}$$

A hosszan tartó esőzést osszuk fel egyforma időszakaszokra, és feltételezzük azt, hogy az aktuális időszakaszban e mm eső esett. Ekkor

- (1) $hw_{i,j} = hw_{i,j} + e$, ennyi mm lesz az új felszíni vízmagasság (vízpotenciál) az eső miatt; ez a kezdő állapot a következő időszakaszban.

$$b_{i,j} \quad \text{jelölje az aktuális beszivárgást.}$$

$v_{i,j} = v_{i,j} - b_{i,j}$	így csökken a beszivárgási kapacitás.
$h_{v_{i,j}} = h_{v_{i,j}} - b_{i,j}$	a beszivárgás miatt csökken a felszíni vízpotenciál.
$hw_{i,j} = h_{v_{i,j}}$	a szétfolyás előtti állapot duplikálása.

Ha az (i,j) rácselem nem lokális minimumpont (pl. gödör), akkor lejtésirányban elfolyik róla a felszíni vízréteg egésze ($h_{v_{i,j}} = 0$) vagy része, és a magasságkülönbségek arányában azt az oldalszomszéd rácspontok veszik fel. Ennek meghatározásához a következő összefüggéseket írtuk fel. Legyen

$d_{m,n} = \max(0, h_{i,j} + h_{v_{i,j}} - h_{i+m,j+n} - h_{v_{i+m,j+n}})$, ahol $m = -1,0,1$; $n = -1,0,1$ és $m \cdot n = 0$, ahol $d_{m,n}$ jelöli szintkülönbséget az oldalszomszéd pontokhoz képest, figyelembe véve a vízborítottságot is.

$s = \sum d_{m,n}$, ahol $m = -1,0,1$; $n = -1,0,1$ és $m \cdot n = 0$, az összes szintkülönbség.

$d_{m,n} = d_{m,n} / s$, ahol $m = -1,0,1$; $n = -1,0,1$ és $m \cdot n = 0$, a fajlagos szintkülönbség.

$c \leq h_{v_{i,j}}$, $c \leq s \cdot d_{m,n} / (1 + d_{m,n})$, ahol $m = -1,0,1$; $n = -1,0,1$ és $m \cdot n = 0$, a c szétfolyás nem lehet több, mint a felszíni vízpotenciál, és szétfolyás után a rácselem nem kerülhet a szomszédok alá.

$hw_{i+m,j+n} = hw_{i+m,j+n} + c \cdot d_{m,n}$, ahol $m = -1,0,1$; $n = -1,0,1$ és $m \cdot n = 0$, az oldalszomszédok felszíni vízpotenciáljának növekedése.

$hw_{i,j} = hw_{i,j} - c$, a szétfolyással csökken a rácspont felszíni vízpotenciálja.

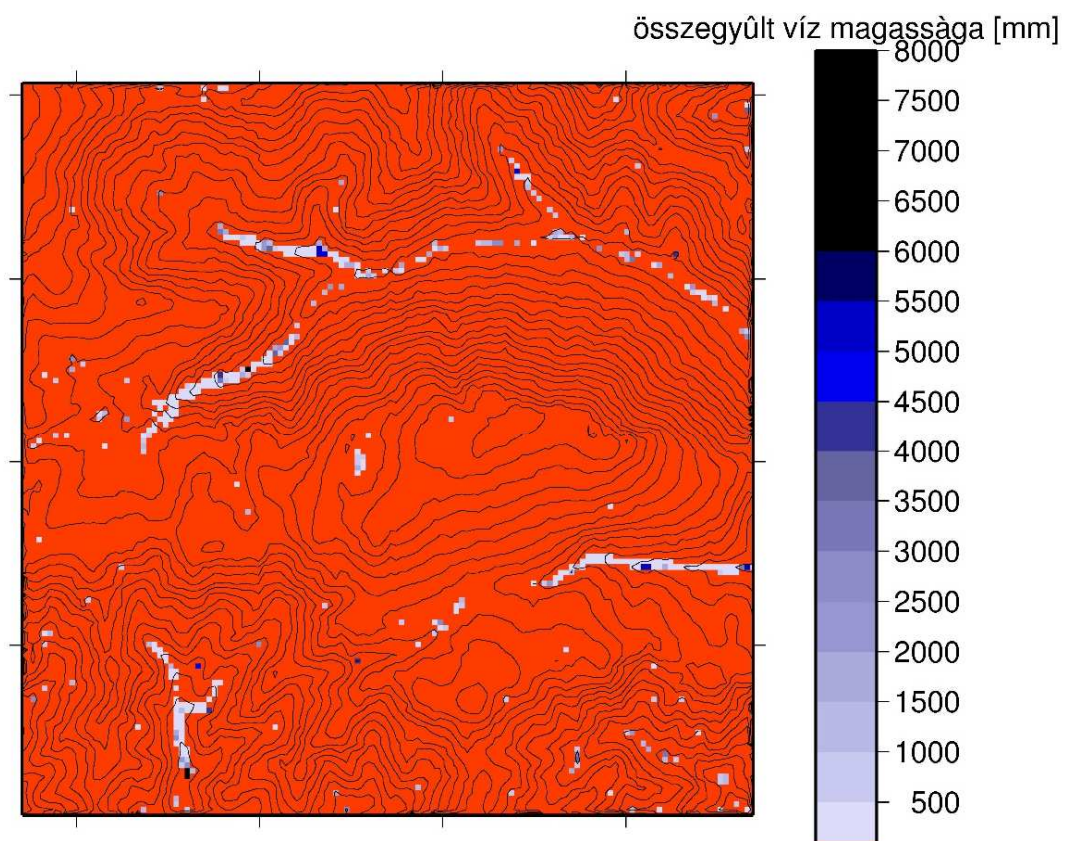
goto (1) lezárult egy esőzési ciklus, és továbbléphetünk a következő esőzési fázisba.

Ha vége van az esőnek, stabilizáció (azaz leáll a beszivárgás és a szétfolyás) után rácselemenként meghatározhatjuk a beszivárgás és a szétfolyás okozta tömegnövekedést, ami a hw felszíni vízpotenciál növekedésével és v vízfelvevő potenciál csökkenésével arányos (szorozóként figyelembe veendő a víz fajsúlya és a rácselem területe. Magasságát, és ezzel térfogatát az előbb számított felszín alatti és feletti vízpotenciál-változások összege adja).

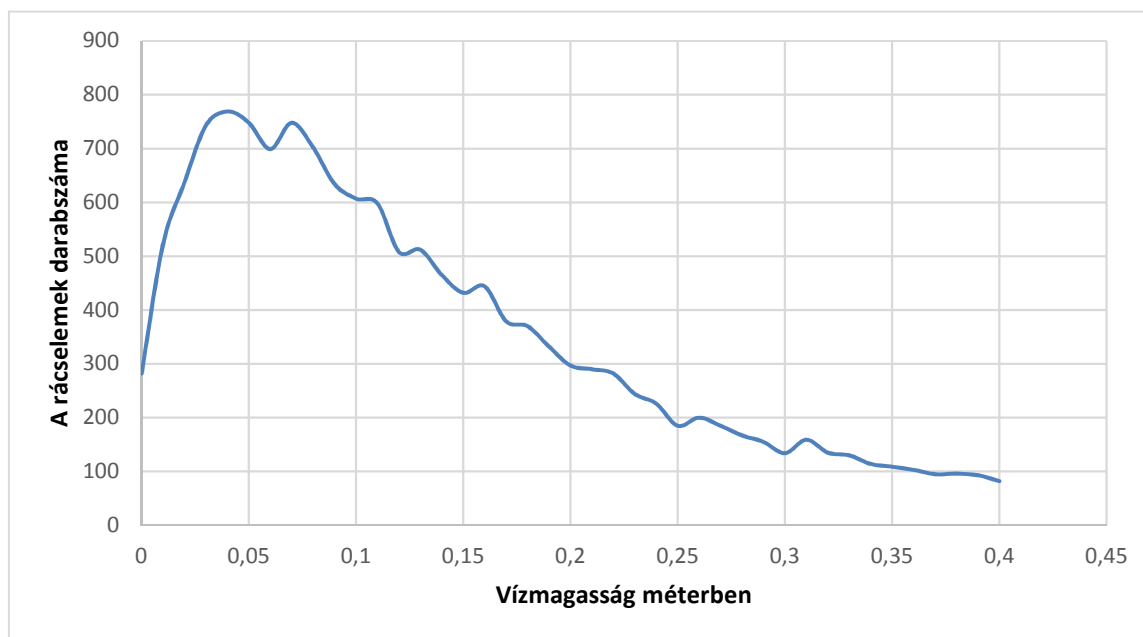
Az eljárást egy horizontálisan $4 \text{ km} \times 4 \text{ km}$ kiterjedésű, $30 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ felbontású alpesi DTM-en (1. ábra) 10 ciklusos esőzési (ciklusonként $e = 10 \text{ mm}$ csapadékkal) és 90 ciklusos csapadékmentes ($e = 0 \text{ mm}$) stabilizáló folyamattal teszteltük. Az α beszivárgási tényezőt 0.1-nek választottuk, a $v_{i,j}$ vízfelvevő potenciált pedig 100 mm -nek tekintettük a teljes tartományon. Ha nincs szétfolyás, az összes csapadék beszivárgott volna a talajba, de a meredek domborzat miatt csak 80 %-os volt az elszivárgás, a maradék víz olyan vízgyűjtő (lokális minimum) helyeken gyűlt össze, melyek a teljes területnek csak 2,3 %-át fedték le (2. ábra). A lehullott csapadék párolgását nem vettük figyelembe.

3. Modell a vízgyűjtő és vízvásztó vonalak meghatározására

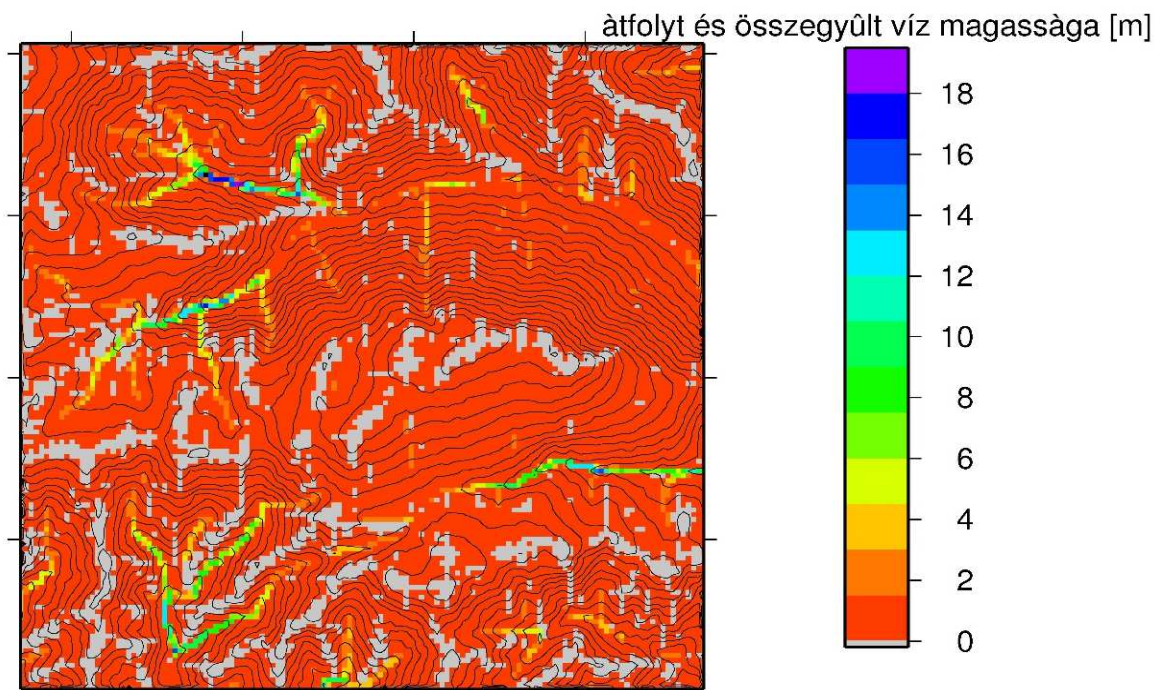
A vizsgálatot kiterjesztettük a vízgyűjtő és vízvásztó vonalak meghatározására is. A fenti modellt annyiban módosítottuk, hogy egy méter $hw_{i,j}$ vízborításból indulva csapadék-utánpótlás és beszivárgás nélkül meghatároztuk, mennyi víz folyik át/gyűlik össze az egyes rácselemeken a domborzati lejtőviszonyok miatt. Az adatok elemzésekor kiderült, hogy 100 szétfolyási ciklus után a rácselemek vízpotenciál függvényének hisztogramja (3. ábra) a $k = 3$ paraméterű Khi^2 eloszlásra emlékeztet. Tapasztalataink szerint a módusz (legvalószínűbb érték, esetünkben 0.04 m) alatti vízborítású rácselemek vonalszerű (fehér) foltként jelölik ki a vízvásztó vonalakat, a vízgyűjtő vonalakat pedig a medián (0.15 m) tízszeresénél nagyobb vízpotenciálú (sárga-zöld-kék árnyalatú) rácselemek alkotják (4. ábra).



2. ábra. A teszterület felszíni vízmagassága eső után. A területet km-enként skáláztuk.
A domborzat-ábrázolás szintvonalköze 25 m



3. ábra. A vízpoteenciál gyakorisági hisztogramja szétfolyás után



4. ábra. A teszterület vízgyűjtő és vízválasztó vonalai. A területet km-enként skáláztuk. A domborzat-ábrázolás szintvonalköze 25 m

4. Összefoglaló

Rácsbázisú véges-elem modellezéssel szimuláltuk a csapadék hatását a felszín vízborítottságára, illetve a talaj víztelítettségére. Papp Gábor kollégánk megállapította, hogy a szétfolyási és beszivárgási modell alapján számított vízterhelés gravitációs hatása a dőlésmérő által mutatott eső utáni anomália töredékét képes csak megmagyarázni. Egy tisztán szétfolyási modellel a terep vízgyűjtő és vízválasztó vonalait határoztuk meg, ami teszterületünkön – figyelembe véve a domborzati viszonyokat - maradéktalanul helytálló eredményeket hozott.

Köszönetnyilvánítás.

Köszönjük Dr. Papp Gábornak (MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézet, Sopron) és Prof. Dr. Bruno Meurersnek (TU Wien Institut für Meteorologie und Geophysik), hogy munkánkat tanácsokkal és adatokkal segítették.

Irodalomjegyzék

- [1] Varga Cs., A talaj víz-, hő- és levegőgazdálkodása, (<http://zeus.nyf.hu/~tkgt/okse/tatata08/tata0811.pdf>) 2015.
- [2] Kalmár J, A digitális terepmodell kutatások új eredményei, kandidátusi értekezés, 1994.

A hiperbolikus Kepler-egyenlet geometriai szemléletű tárgyalása

Péntek Kálmán

ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban a hiperbolikus Kepler-egyenlet egy egyszerű bizonyítását mutatjuk be geometriai módszerek alkalmazásával.

ABSTRACT. In the paper, we present a simple proof of the hyperbolical Kepler's Equation with the using of the geometrical methods.

1. Bevezetés

1609-ben jelent meg Johannes Kepler (1571-1630) német matematikus és csillagász „Astronomia nova” c. műve. Ebben találhatjuk a később róla elnevezett bolygómozgási törvények közül az első kettő tárgyalását. E korszakalkotó mű 60. fejezetében olvashatjuk a ma már Kepler-egyenletként elhíresült összefüggés levezetését. Kepler a bizonyítás során Szürakuszi Arkhimédész (Kr.e. 287 – Kr.e. 212) „A konoidokról és szferoidokról”, valamint Alexandriai Euklidesz (Kr.e. 365(?) – Kr.e. 300(?)) „Elemek” c. munkájára támaszkodott.

A Kepler-egyenlet matematikai összefüggésként az

$$E - e \cdot \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \quad (1)$$

alakban írható fel, ahol E = excentrikus anomália, e = pálya excentricitása, $n = \frac{2\pi}{T}$ = közepes szögsebesség, τ = perihélium átmenet időpontja és végül t = idő. Ezen egyenlet segítségével képesek vagyunk megmondani, hogy a vizsgált, Nap körül keringő égitest pályájának mely pontján tartózkodik egy adott t időpontban.

Kepler nyomán vált világossá, hogy a nagybolygók a Nap körül ellipszis formájú pályákon haladnak, viszont az ő idejében elfogadott nézet volt az, hogy az üstökösök viszont egyenes mentén haladó égitestek. A mozgások lehetséges pályájaként ekkor még nem vetődött fel a Pergai Apollóniosz (Kr.e. 265(?) – Kr.e. 190(?)) által részletesen vizsgált kúpszeletek ellipszisen kívüli két további típusa, a parabola és a hiperbola alakú pályagörbe.

A XVII. sz. második felében már azt vizsgálták a tudósok, hogy milyen erőhatások tartják egyben a Naprendszer, s mi szabja meg a bolygók pályagörbéjének alakját. Edmond Halley (1656-1742) angol csillagász vetette fel az akkor már vitathatatlan szakmai tekintélyű Sir Isaac Newton (1643-1727) angol fizikus, matematikus és csillagász számára, hogy milyen alakú pályákon kell mozognia a bolygóknak a Nap körül, ha a Nap és a vizsgált bolygó közti vonzóerő az égitestek tömegével egyenes, a köztük levő pillanatnyi távolság négyzetével fordítottan arányos.

Newton válasza lényegében az 1687-ben megjelent „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” c. művében olvasható. Newton e könyvében kifejtette, hogy a kezdeti feltételektől függően a bolygópályák alakja az Apollóniosz-féle kúpszeletek bármelyike lehet,

tehát az ellipszis alakú pályák mellett szóba jöhetnek a parabola, illetve hiperbola pályák is. Kiderült például a Naprendszer belső térségeibe érkező számos üstökösről, hogy pályája a pontos megfigyelések szerint elnyúlt parabola, s nem pedig a korábban hitt egyenes.

Ezért indokolt, hogy levezessük minél elemibb, alapvetően geometriai módszerekkel az ellipszisre vonatkozó Kepler-egyenlet hiperbola pályákra vonatkozó megfelelőjét is.

2. A Gauss formula

A későbbi részekben felhasználjuk Carl Friedrich Gauss (1777-1855) egy szép összefüggését, amelyet az alábbiakban mutatunk be.

Határozzuk meg egy m_1 tömegű P_1 tömegpont (Nap) körül mozgó m_2 tömegű P_2 tömegpont (bolygó) által a τ_0 és τ időpontok között sűrlt pályacikk területét, ha a két égitest között csak a kölcsönös gravitációs vonzóerő hat!

Jusson a kicsiny Δt idő alatt a P_2 bolygó a P_2' helyzetbe, jelölje Δv a P_1P_2 és P_1P_2' rádiuszvektorok hajlásszögét, r pedig a P_1P_2 távolságot, ΔT végül a $P_1P_2P_2'$ elemi pályacikk területét! Ha ezt az alakzatot körcikkkel közelítjük, akkor érvényes rá

$$\frac{\Delta T}{r^2 \pi} = \frac{\Delta v}{2\pi}, \quad (2)$$

amelynek egyszerű átrendezésével

$$\Delta T = \frac{1}{2} r^2 \cdot \Delta v \quad (3)$$

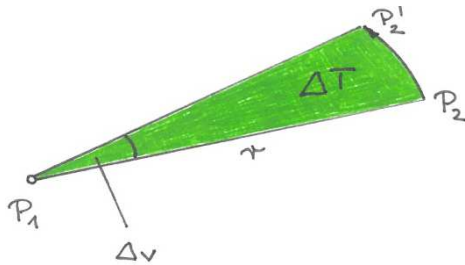
következik. Innen Δt értékkel osztva (3) mindkét oldalát

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (4)$$

adódik, amely $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel eredményezi a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

összefüggést (1. ábra).



1. ábra. A Gauss-formula

A feladatunkban vizsgált mozgás az égi mechanika egyik klasszikus alapfeladata, a 2-test probléma, amely mint ismeretes ekvivalens az 1-centrum problémával. E problémát leíró

differentiálegyenlet egyik első integrálja az impulzusmomentum tétel, amely alapján a mozgás síkbeli mozgás, s amelyre fennáll az

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c \text{ (=konstans)} \quad (6)$$

összefüggés. A pálya egyenlete pedig alkalmas koordináta-rendszerben

$$r = \frac{p}{1+e \cdot \cos v} \quad (7)$$

polárkoordinátás egyenletű kúpszelet, amelynek paraméterére teljesül még a

$$p = \frac{c^2}{\mu} \quad (8)$$

összefüggés, ahol $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ és itt k a Gauss-féle gravitációs konstans. A (8) összefüggés egyszerű étrendezésével

$$c = \sqrt{\mu \cdot p} \quad (9)$$

következik, amelynek (6) formulával történő egybevetéséből

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu \cdot p} \quad (10)$$

következik. Most az (5) és (10) összefüggésekből

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p} \quad (11)$$

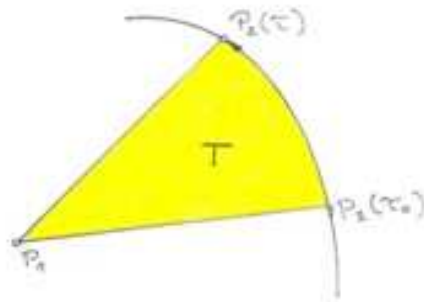
adódik, amelyből

$$dT = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p} \cdot dt, \quad (12)$$

majd pedig (12) idő szerinti integrálásával a $[\tau_0, \tau]$ időintervallumra kapjuk meg a

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p} \cdot (\tau - \tau_0)} \quad (13)$$

összefüggést, amelyet az égi mechanika Gauss-formulájának nevezünk (2. ábra).



2. ábra. A pályaszektor

3. A hiperbolikus Kepler egyenlet

Mozogjon az m_1 tömegű P_1 tömegpont, mint fókuszpont körül hiperbola pályán az m_2 tömegű P_2 tömegpont. A hiperbola pálya paraméteres egyenletrendszere alkalmas koordináta-rendszerben

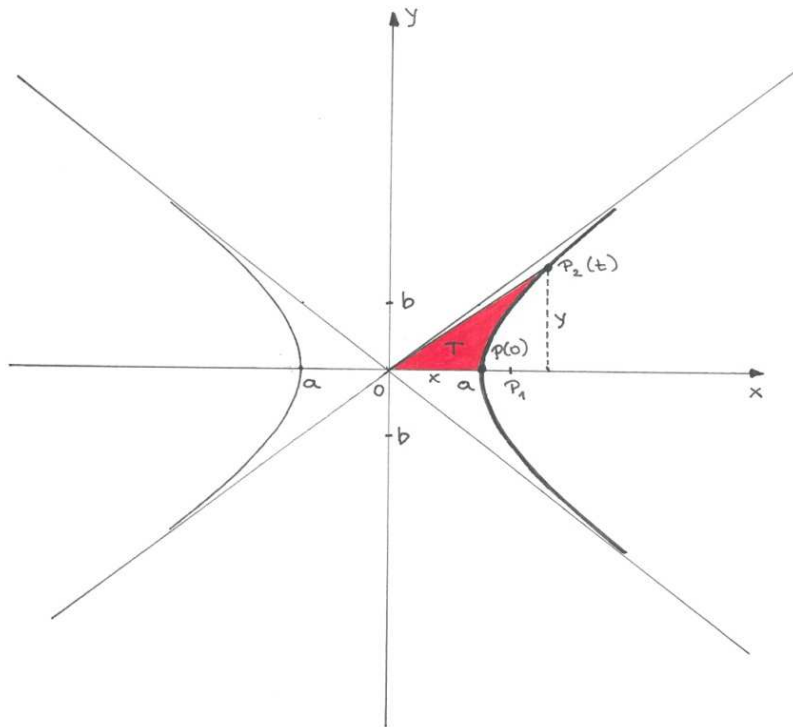
$$\begin{cases} x = a \cdot cht \\ y = b \cdot sht \end{cases}, \quad (14)$$

továbbá mivel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot sht \\ \frac{dy}{dt} = b \cdot cht \end{cases}, \quad (15)$$

ezért az OPP_2 hiperbolaszektor területe (3. ábra)

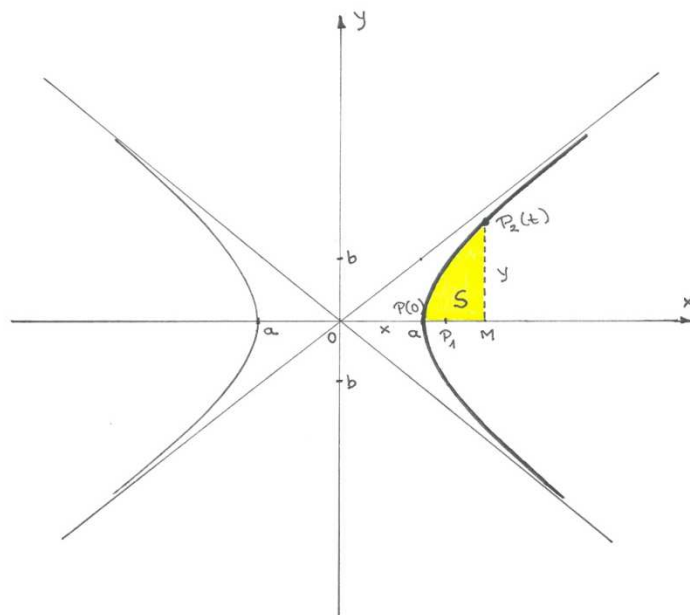
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^t (a \cdot cht \cdot b \cdot cht - b \cdot sht \cdot a \cdot sht) dt = \\ &= \frac{a \cdot b}{2} \int_0^t \underbrace{(ch^2 t - sh^2 t)}_1 dt = \frac{a \cdot b}{2} [t]_0^t = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot t. \end{aligned} \quad (16)$$



3. ábra. A hiperbola szektor

A PMP_2 hiperbolaszélet területe (4. ábra):

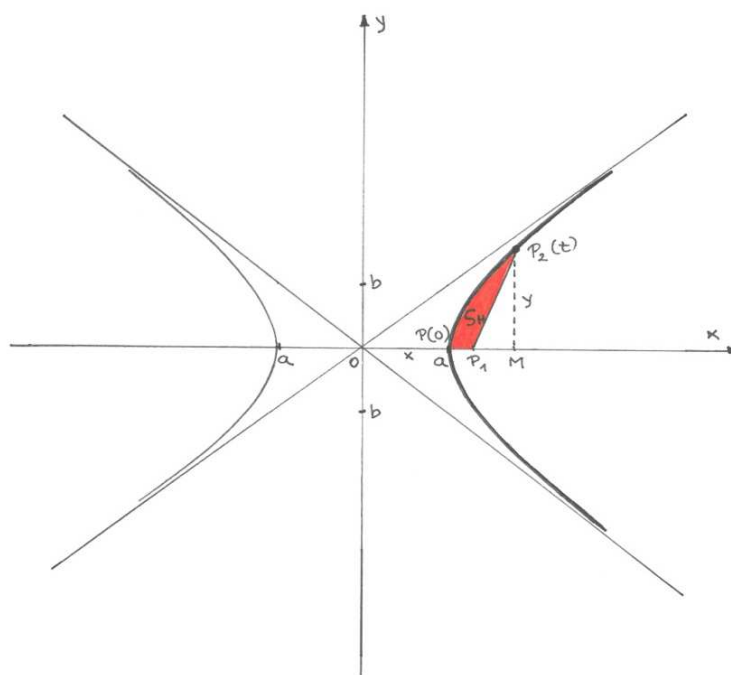
$$S = T_{OMP_2\Delta} - T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot cht \cdot b \cdot sht - \frac{1}{2} a \cdot b \cdot t = \frac{a \cdot b}{2} (cht \cdot sht - t). \quad (17)$$



4. ábra. A hiperbola szelet

A PP_1P_2 S_H szektor területe (5. ábra):

$$\begin{aligned}
 S_H &= S - T_{P_1MP_2\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} (cht \cdot sht - t) - \frac{1}{2} (a \cdot cht - c) \cdot b \cdot sht \\
 &= \frac{a \cdot b}{2} \cdot (cht \cdot sht - t) - \frac{1}{2} (a \cdot cht - ea) \cdot b \cdot sht \\
 &= \frac{a \cdot b}{2} (cht \cdot sht - t) - \frac{a \cdot b}{2} (cht \cdot sht - e \cdot sht) \\
 &= \frac{a \cdot b}{2} (cht \cdot sht - t - cht \cdot sht + e \cdot sht) = \frac{a \cdot b}{2} (e \cdot sht - t). \quad (18)
 \end{aligned}$$

5. ábra. Az S_H szektor

A fentiekben felhasználtuk a kúpszeletek elméletéből közismert eredményeket, amelyek Coxeter (1987) és Hajós (1979) műveiben részletes kifejtésre kerülnek.

Az S_H szektor területét azonban meghatározhatjuk az előző fejezetben bemutatott Gauss-formula alapján is:

$$S_H = \frac{1}{2} \sqrt{\mu \cdot p} \cdot (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\mu \cdot \frac{b^2}{a}} \cdot (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot (\tau - \tau_0). \quad (19)$$

A (18) és (19) alapján kiszámított S_H kétféle előállítását összevetve

$$\frac{a \cdot b}{2} (e \cdot sht - t) = \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot (\tau - \tau_0) \quad (20)$$

adódik, amelynek egyszerű azonos átalakításaival

$$e \cdot sht - t = \mu^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{2}} \cdot (\tau - \tau_0) \quad (21)$$

adódik. Bevezetve az

$$n := \mu^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{2}} \quad (22)$$

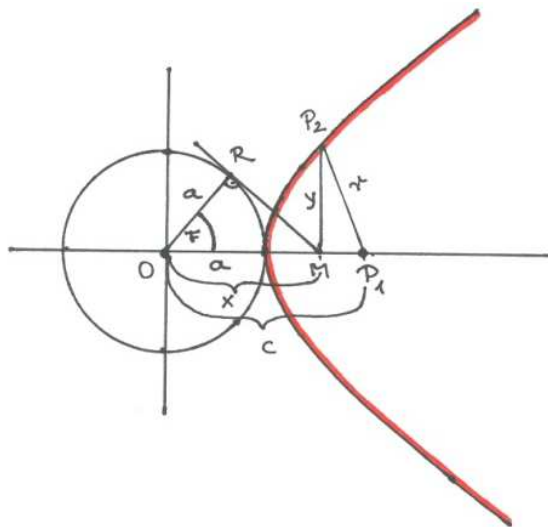
mennyiséget az

$$\boxed{e \cdot sht - t = n(\tau - \tau_0)} \quad (23)$$

összefüggést nyerjük, amely már lényegében a hiperbolikus Kepler-egyenlet.

Az alábbiakban rámutatunk, hogy a (23) összefüggésben elért eredményünk teljes összhangban áll ugyanezen formula szokásosan alkalmazott, differenciálegyenlet megoldásaként nyert végképlettel. A klasszikus, égi mechanikában követett út részletes számításai megtalálhatók Érdi (1996) és Marik (1989) tankönyvében.

A 6. ábra jelöléseit követve először egy önmagában is érdekes összefüggést bizonyítunk:



6. ábra. A hiperbolikus Kepler-egyenlet szokásos levezetését illusztráló rajz

1. Állítás. Ha $H := \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$, akkor $shH = \operatorname{tg} F$.

Bizonyítás. A H mennyiség definíciójából kiindulva

$$e^H = \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{F}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}}, \quad (24)$$

továbbá

$$e^{-H} = \frac{1}{e^H} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}} \quad (25)$$

adódik. A (24) és (25) felhasználásával

$$\begin{aligned} shH &= \frac{e^H - e^{-H}}{2} = \frac{\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}}}{2} = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}\right)^2 - \left(1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}\right)^2}{2\left(1 - \operatorname{tg} \frac{F}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg} \frac{F}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(1 + 2\operatorname{tg} \frac{F}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}\right) - \left(1 - 2\operatorname{tg} \frac{F}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}\right)}{2\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}\right)} = \frac{4\operatorname{tg} \frac{F}{2}}{2\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{F}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}} = \operatorname{tg} \left(2 \cdot \frac{F}{2}\right) = \operatorname{tg} F \end{aligned} \quad (26)$$

adódik, s pontosan ez az, amit bizonyítani akartunk.

Ezután ismét az 6. ábra jelöléseit felhasználva, s az imént bizonyított állítást felhasználva belátjuk a következőt.

2. Állítás. A (23) összefüggésben szereplő t és az előző állításban bevezetett H paraméterek megegyeznek, azaz $t = H$ teljesül.

Bizonyítás. Az $OMR\Delta$ derékszögű háromszögből

$$\frac{a}{a \cdot cht} = \cos F, \quad (27)$$

azaz

$$cht = \frac{1}{\cos F} \quad (28)$$

adódik. Szintén az $OMR\Delta$ derékszögű háromszögből a Pitagorasz tétel felhasználásával

$$a^2 + (RM)^2 = x^2, \quad (29)$$

vagyis

$$a^2 + (RM)^2 = (a \cdot cht)^2 \quad (30)$$

következik, amelynek egyszerű átrendezésével

$$RM = \sqrt{a^2 \cdot ch^2 t - a^2} = a\sqrt{ch^2 t - 1} \quad (31)$$

adódik. Ismét csak az $OMR\Delta$ derékszögű háromszögből (31) alapján

$$\sin F = \frac{RM}{x} = \frac{a\sqrt{ch^2 t - 1}}{a \cdot cht} = \frac{\sqrt{ch^2 t - 1}}{cht} \quad (32)$$

adódik, amelyből (28) és (32) felhasználásával

$$\operatorname{tg} F = \frac{\sin F}{\cos F} = \operatorname{cht} \cdot \frac{\sqrt{ch^2 t - 1}}{\operatorname{cht}} = \sqrt{ch^2 t - 1} = \operatorname{sht} \quad (t > 0) \quad (33)$$

összefüggést nyerjük, ezért előző és mostani állításunk összevetéséből felhasználva az $x \mapsto \operatorname{sh} x$ hiperbolikus függvény szigorúan monoton növekedő voltát

$$\operatorname{sh} H = \operatorname{tg} F = \operatorname{sht} \quad (34)$$

következik, amelyből azonnal adódik a bizonyítani kívánt $t = H$ egyenlőség.

Ennek eredményeként felírhatjuk a hiperbolikus Kepler-egyenletet a

$$\boxed{e \cdot \operatorname{sh} H - H = n(\tau - \tau_0)} \quad (35)$$

szakirodalomból ismert jelölésekben. Ebben az összefüggésben a klasszikus Kepler-egyenlethez hasonlóan a (22) összefüggéssel bevezetett n mennyiség megfelel a közepes szögsebességnek, τ_0 perihélium átmenet időpontjának, τ az időnek, H értelmezését pedig az 1. állításban fogalmaztuk meg.

Irodalomjegyzék

- [1] Coxeter, H. S. M., A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] Érdi B., Égi mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
- [3] Hajós Gy., Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [4] Marik M., Csillagászat, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

Gazdasági változások regressziós vizsgálata

Csanády Viktória
SOE Matematikai Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A gazdasági folyamatok elemzése során számtalan esetben támaszkodnak adatsorokra, termelési vagy fogyasztási értékek időbeni alakulása alapján. A folyamatok vizsgálatára a trendszámítást alkalmazzák, már közismert modellek felhasználása révén. Az alábbiakban egy speciális modell illesztésére kerül sor, illetve annak kielemezésére.

ABSTRACT. Examining economic processes, the analysis is often based on time series data, considering the timely evolution of production- or consumption values. Trend estimation is applied for examining the tendencies using well-known models. In the following we are going to fit a special model to data and analyse it.

1. Bevezetés

A gazdasági folyamatok vizsgálata során számtalan esetben alkalmaznak trendszámítást, ami az illesztett modell alapján többé-kevésbé követi a folyamatot és előre jelzést is szolgál. Az esetek többségében az alkalmazott modellek közismertek, gyakran használt függvények. Több különböző gazdasági adat összevetése viszont nehézkes velük akkor, ha a dimenziók nagyságrendje különböző. Így esett a választás egy új modell alkalmazására. A vizsgálat az 1960 és 2015 évek között eltelt 56 év gazdasági változásának elemzéséhez 12 adatsort használ, melyek kiválasztása véletlenszerűen történt a Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából. A vizsgált adatsorok az alábbiak:

- 1.) Egy főre jutó évi burgonya kg mennyiség változása.
- 2.) Családi pótlékkal rendelkezők éves létszámának változása.
- 3.) Gyakorlatilag aktív népesség ezer fős éves létszámának változása.
- 4.) Földgáz millió köbméteres értékű éves igénybevételének változása.
- 5.) Tízezer főre jutó kórházi ágyak éves számának változása.
- 6.) Nyugdíjas létszám éves változása.
- 7.) Óvodások ezer fős éves létszámának változása.
- 8.) Pamutszövet millió négyzetméteres éves felhasználási mennyiségének változása.
- 9.) Millió liter egységben rendelkezésre álló sör éves mennyiségének változása.
- 10.) Millió számú vezetékes telefon hívások éves számának változása.
- 11.) Egy főre jutó évi tojás darabszám éves változása.
- 12.) Helyi évi személyszállítási utasszám indexének éves változása.

Az adatsorokra történt görbeillesztéshez egy olyan modell használata bizonyult megfelelőnek, amely a rugalmasság és az egyszerű kezdőérték megválasztás miatt könnyen

kezelhető. A függvény összetett szerkezetű, zárt értelmezési tartományú. Ezen kritériumok miatt a választott modell két eltolt helyzetű Awrami függvény szuperponáltja.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modell a következő:

Az alábbiakban bemutatásra kerül a vizsgált adatsor egy részlete. A táblázat első oszlopában az évek, első sorában a sorszámozott vizsgálati adatsorok kerültek feltüntetésre az előzőekben történt felsorolás szerint.

Év	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1960	97,6	577	4735	342	72,3	636	184	247	356	538	160	100
1961	95,0	593	4626	327	73,0	796	172	264	378	558	161	104
1962	94,1	609	4544	340	74,8	912	178	281	383	572	159	107
1963	91,7	614	4569	611	75,7	983	184	292	408	596	163	108
1964	87,8	612	4653	784	76,6	1046	187	314	423	606	180	113

...

2010	60,5	1224	4177	1849	71,3	2980	338	3	616	1678	235	108
2011	63,5	1191	4192	1734	71,5	2921	341	2	645	1599	217	108
2012	62,3	1168	4245	5564	69,5	2919	340	2	639	1426	215	106
2013	58,6	1150	4296	5404	70,0	2869	-	12	600	1344	214	106
2014	53,0	1114	4385	5134	69,8	2801	-	8	595	1188	-	111
2015	-	1108	4464	4689	69,8	2727	-	11	582	1061	-	113
2016	-	-	4538	4340	-	-	-	-	-	-	-	-

1. táblázat. Adathalmaz

Az alkalmazott regressziós modell

- hagyományos matematikai alakja:

$$y = b_8 - b_7 \cdot e^{(-1 \cdot (b_6 \cdot (x - b_5))^{b_4})} - b_3 \cdot e^{(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (x - b_1))^{b_0})}$$

- a számítógépes alak:

$$\text{var2} = b_8 - b_7 * \exp(-1 * (b_6 * (\text{var1} - 1 * b_5))^{b_4}) - b_3 * \exp(-1 * (-1 * b_2 * (\text{var1} - 1 * b_1))^{b_0}).$$

A feltüntetett függvény minden olyan adatsor regressziós vizsgálatára alkalmazható, mely adatsor var2 értéke az értelmezési tartományon belül maximum vagy minimum értékkel rendelkezik. Az értelmezési tartomány pedig eleget tesz $b_5 < \text{var1} < b_1$ feltételnek.

Kezdőértékek meghatározása az adatsor értékei alapján a következő módon történik:

b_8 = a maximális vagy minimális var2 érték,

b_7 = a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a kezdő var2 érték,

b_6 = a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),

b_5 = a var1 kezdőértéke, vagy annál relatív kisebb,

b_4 = az esetek többségében 3 (5),

b_3 = a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a végső var2 érték,

b_2 = a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),

b_1 = a var1 végsőértéke, vagy annál relatív nagyobb,

b_0 = az esetek többségében 3 (5).

A modell levezetése

A kérdéses függvény egy normál helyzetű transzformált és egy y-tengelyre tükrözött megfelelően transzformált Awrami függvény összegéből került kialakításra, zárt értelmezési tartomány feltételével.

A kiindulási matematikai alak:

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}}\right) + f \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}}\right) + k,$$

ahol az értelmezési tartomány $c < x < h$ (természetesen d és i nem páros egész).

Átalakítási lépések:

1. $y = a - \frac{a}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} + f - \frac{f}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}} + k$
2. $y = a + f + k - \frac{a}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} - \frac{f}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}}$
3. $a + f + k = r$
4. $y = r - \frac{a}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} - \frac{f}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}}$
5. $r = b_8, a = b_7, b = b_6, c = b_5, d = b_4, f = b_3, g = b_2, h = b_1, i = b_0$
6. $y = b_8 - \frac{b_7}{e^{((b_6 \cdot (x-b_5))^{b_4})}} - \frac{b_3}{e^{((-b_2 \cdot (x-b_1))^{b_0})}}$
7. $y = b_8 - b_7 \cdot e^{(-1 \cdot (b_6 \cdot (x-b_5))^{b_4})} - b_3 \cdot e^{(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (x-b_1))^{b_0})}$

A fenti modellből pedig a számítógépi alak

$\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0})$.

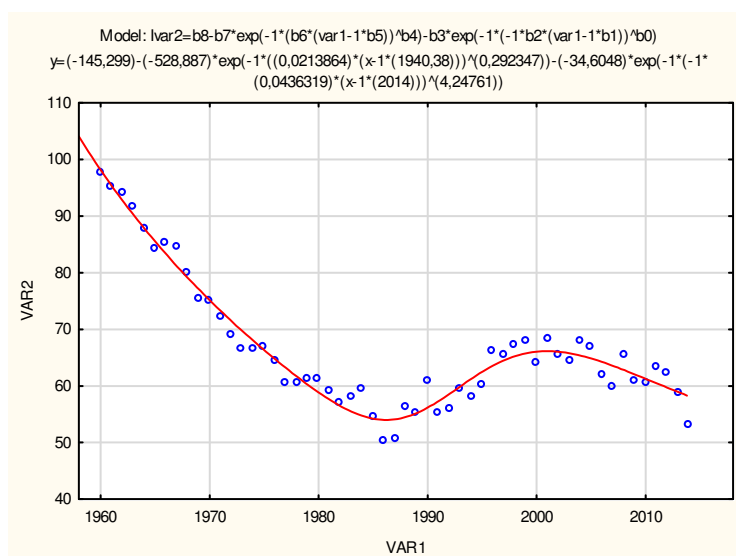
Az alkalmazott regressziós függvénnyel kapcsolatban fontos további megjegyzések a következők:

- Ha a vizsgált adatsor var1 (kezdő) és var1 (végső) értékétől az illesztés során kapott b_5 és b_1 érték jelentős mértékben nem tér el, akkor nemcsak a görbéről kaphatunk pontos adatokat, hanem a paraméterek is közvetlen értelmezhetők a következők szerint: $b_8 = \text{var2}(\text{max})$,
- $b_8 - b_7 = \text{var2}(\text{kezdő})$, $b_8 - b_3 = \text{var2}(\text{végső})$ érték. A függvény illesztésének feltétele, hogy az adott adatsor legfeljebb egy maximum vagy minimum hellyel, és legfeljebb két inflexiós hellyel rendelkezzen.

2. Számított eredmények, kiértékelés

2.1. A regressziós eljárással nyert eredmények

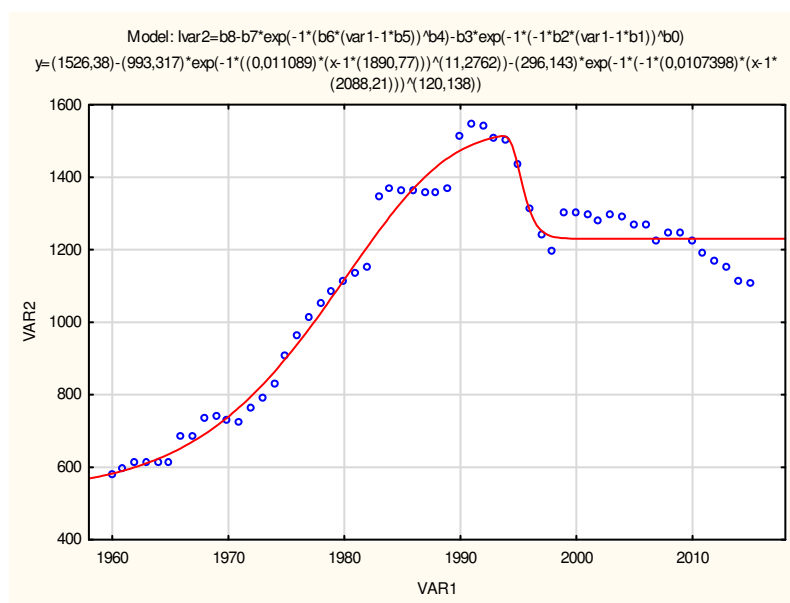
Az illesztés során kapott eredményeket, az alábbiak mutatják az adatsorok számozási sorrendjében.



1. ábra. 1Burgonya

N=55	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0})$ (1Burgonya)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 278,14125136 R= ,98035 Variance explained: 96,109%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	-145,29	-528,88	0,02138	1940,37	0,29234	-34,604	0,04363	2014,00	4,24761

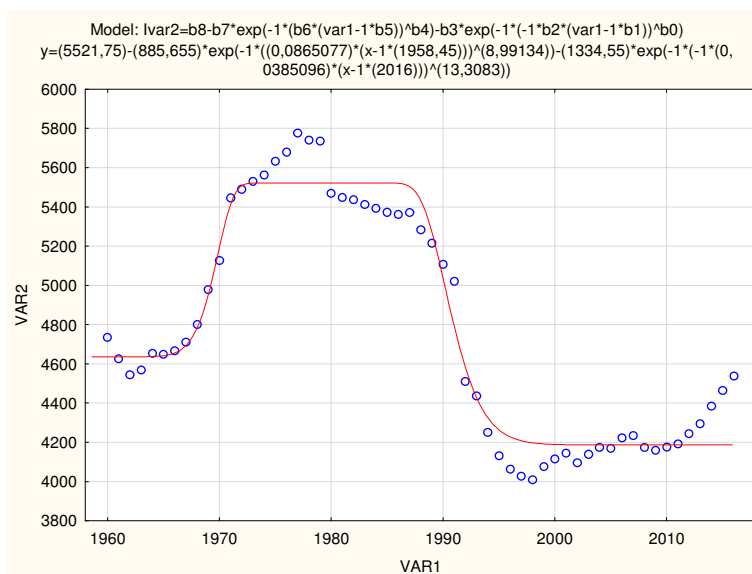
2. táblázat. 1Burgonya



2. ábra. 2Csálpót

N=56	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0})$ (2Csálpót)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 121202,17513 R= ,98683 Variance explained: 97,384%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	1526,38	993,316	0,01108	1890,77	11,2761	296,143	0,01074	2088,20	120,137

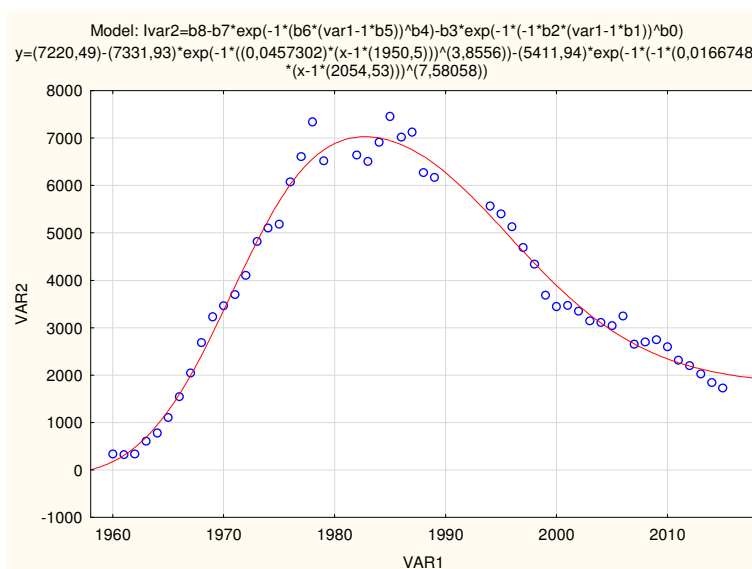
3. táblázat. 2Csálpót



3. ábra. 3Dolgozó

N=57	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^4) + b_0$ (3Dolgozó)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 835862,07765 R= ,97779 Variance explained: 95,608%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	5521,7	885,65	0,0865	1958,4	8,9913	1334,5	0,0385	2016,0	13,308

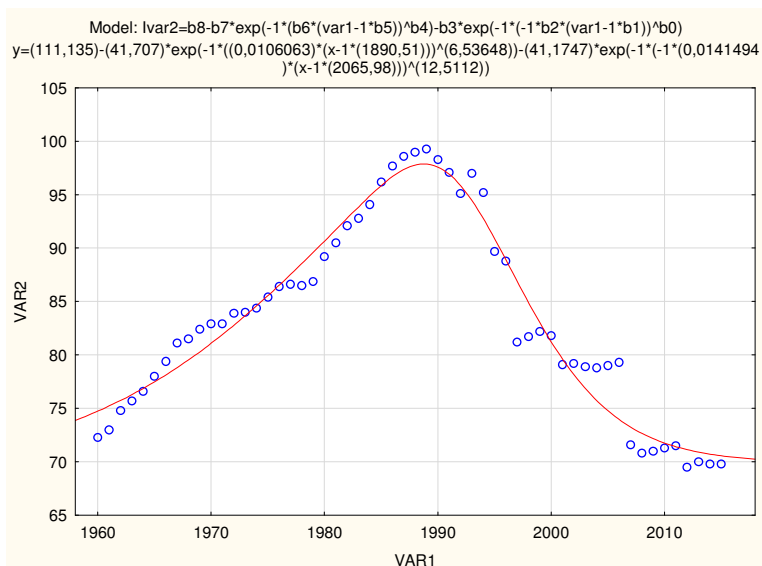
4. táblázat. 3Dolgozó



4. ábra. 4Földgáz

N=50	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^4) + b_0$ (4Földgáz)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 3659883,1679 R= ,99139 Variance explained: 98,285%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	7220,4	7331,9	0,0457	1950,5	3,8556	5411,9	0,0166	2054,5	7,5805

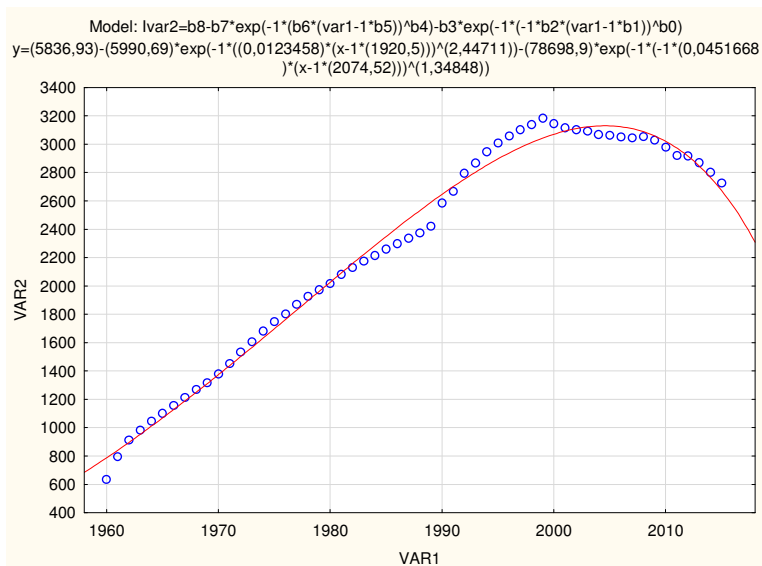
5. táblázat. 4Földgáz



5. ábra. 5Kórágak

N=56	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b b_4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b b_0)$ (5Kórágak)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 189,96074534 R= ,97876 Variance explained: 95,796%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	111,13	41,706	0,0106	1890,5	6,5364	41,174	0,0141	2065,9	12,511

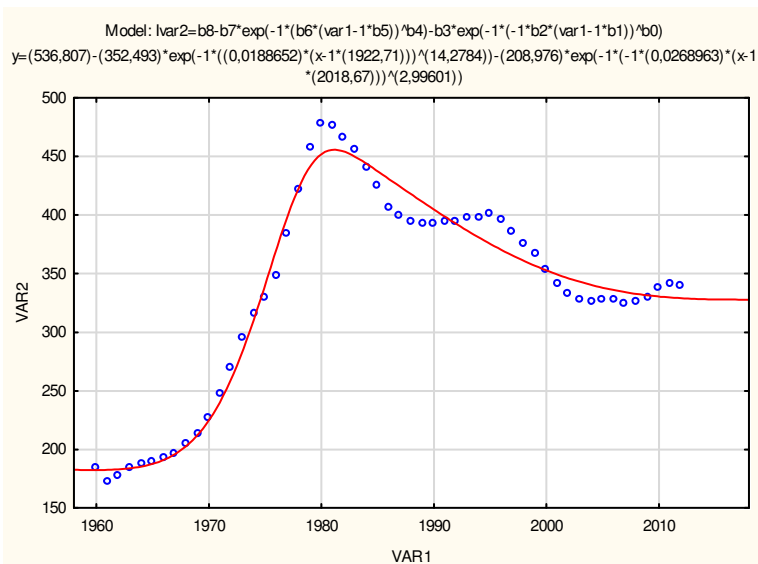
6. táblázat. 5Kórágak



6. ábra. 6Nyugdijas

N=56	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b b_4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b b_0)$ (6Nyugdijas)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 277651,61936 R= ,99576 Variance explained: 99,154%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	5836,9	5990,6	0,0123	1920,5	2,4471	78698,	0,0451	2074,5	1,3484

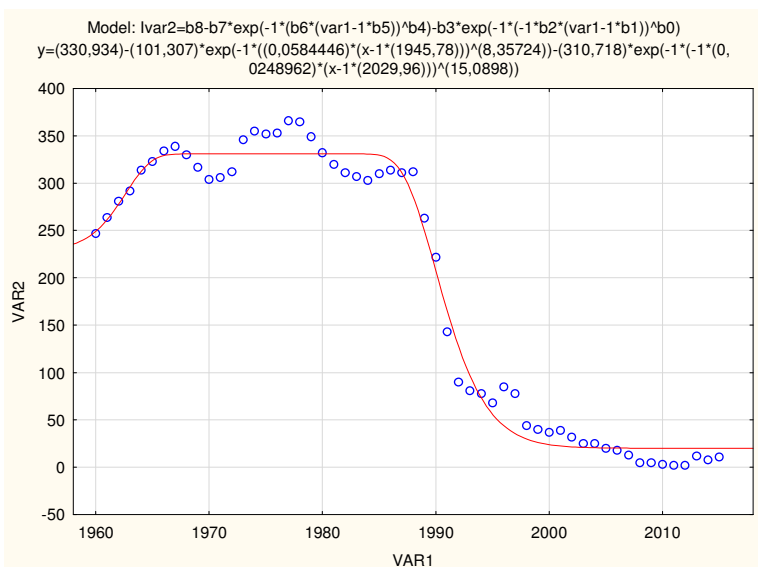
7. táblázat. 6Nyugdijas



7. ábra. 7Ovodások

N=53	Model: $var2=b8-b7*\exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*\exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0)$ (7Ovodások)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 8971,9132412 R= ,98879 Variance explained: 97,770%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	536,80	352,49	0,0188	1922,7	14,278	208,97	0,0268	2018,6	2,9960

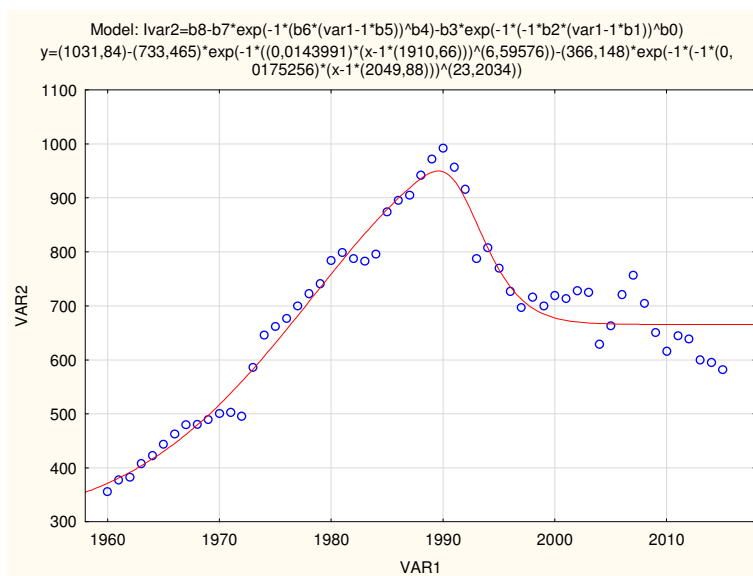
8. táblázat. 7Ovodások



8. ábra. 8Pamutsz

N=56	Model: $var2=b8-b7*\exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*\exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0)$ (8Pamutsz)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 18535,762035 R= ,99170 Variance explained: 98,346%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	330,93	101,30	0,0584	1945,7	8,3572	310,71	0,0248	2029,9	15,089

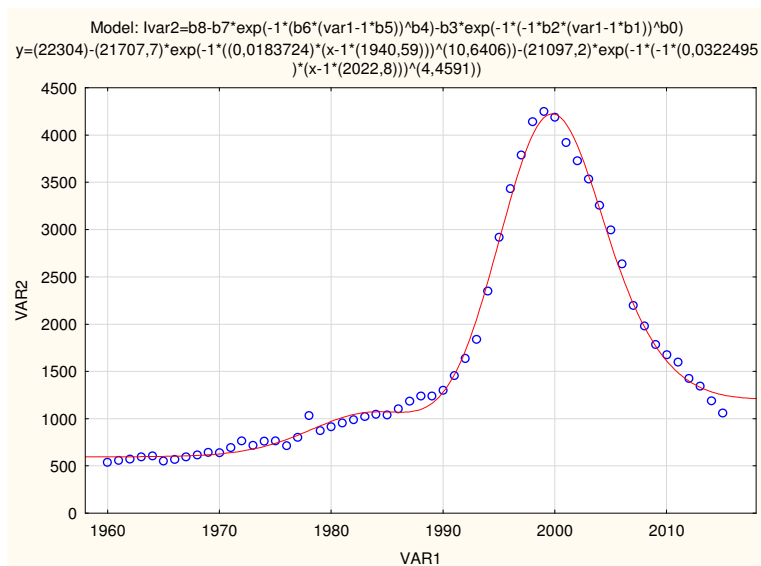
9. táblázat. 8Pamutsz



9. ábra. 9Sör

N=56	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b0)$ (9Sör)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 71275,861069 R= ,97466 Variance explained: 94,996%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	1031,8	733,46	0,0143	1910,6	6,5957	366,14	0,0175	2049,8	23,203

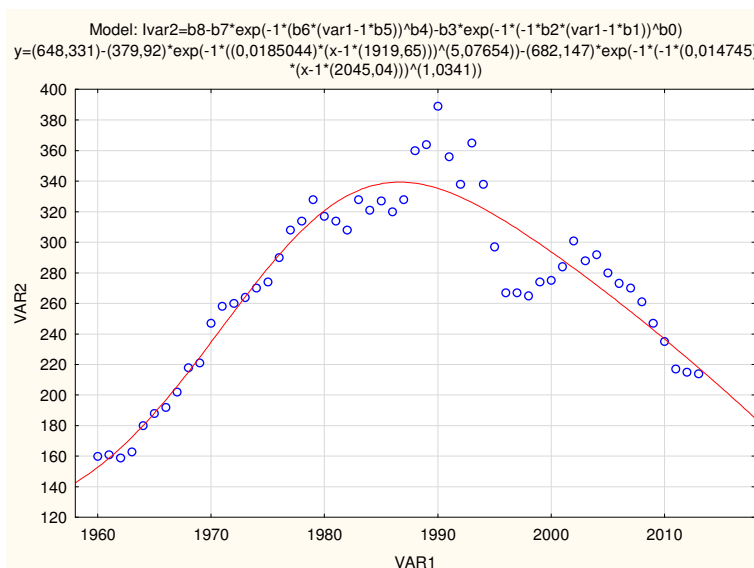
10. táblázat. 9Sör



10. ábra. 10Telhívás

N=56	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b0)$ (10Telhívás)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 400101,55114 R= ,99720 Variance explained: 99,440%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	22304,0	21707,7	0,0183	1940,5	10,640	21097,2	0,0322	2022,8	4,4591

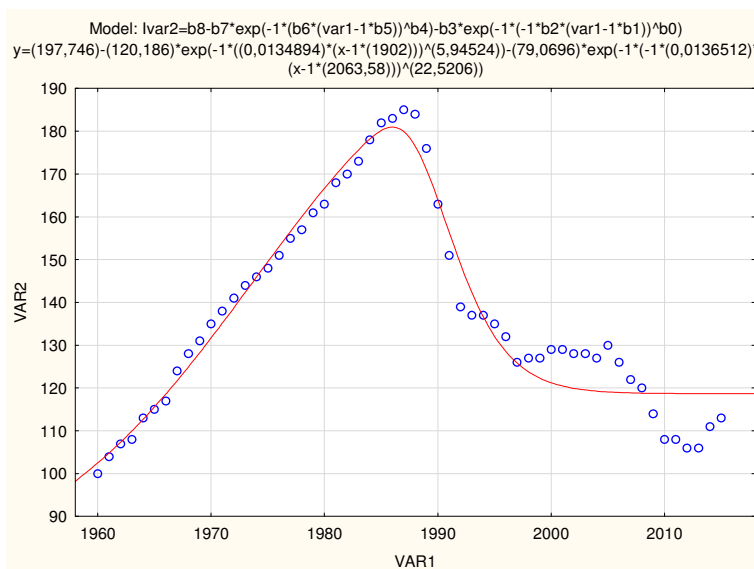
11. táblázat. 10Telhívás



11. ábra. 11Tojásdb

N=54	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b0)$ (11Tojásdb)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 17719,136144 R= ,94861 Variance explained: 89,985%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	648,33	379,92	0,0185	1919,6	5,0765	682,14	0,0147	2045,0	1,0341

12. táblázat. 11Tojásdb



12. ábra. 12Utasszám

N=56	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b0)$ (12Utasszám)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 1620,1700191 R= ,97375 Variance explained: 94,820%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	197,74	120,18	0,0134	1901,9	5,9452	79,069	0,0136	2063,5	22,520

13. táblázat. 12Utasszám

2.2. Elemzés, értékelés

Az 56 év alatti változás modellértékeinek összefoglalása.

A felsorolt megnevezett adatsorokra a megadott függvény regressziós alkalmazásával nyert paramétereiből kapott értékek az alábbiakban olvashatók az értékelő táblázatban:

Adatsor	Pontosság R értékei	Ért. tart. b5<var1<b1	Érték var2 előjel	Jelző kitevő	Jelző szorzó	Előre jelzési mód
1. Burgonya	0,9804	1940 - 2014	+	b0>2	**b7<0	kizárt
2. Csalpot	0,9868	1890 - 2088	+	b0>2	b7>0	lehetséges
3. Dolgozó	0,9778	1958 - 2016	+	b0>2	b7>0	lehetséges
4. Földgáz	0,9914	1950 - 2054	*-+	b0>2	b7>0	lehetséges
5. Kórágyak	0,9788	1890 - 2065	+	b0>2	b7>0	lehetséges
6. Nyugdíjas	0,9958	1920 - 2074	+ -	**b0<2	b7>0	kizárt
7. Ovodások	0,9888	1922 - 2018	+	b0>2	b7>0	lehetséges
8. Pamutsz	0,9917	1945 - 2029	+	b0>2	b7>0	lehetséges
9. Sör	0,9747	1910 - 2049	+	b0>2	b7>0	lehetséges
10. Telhívás	0,9972	1940 - 2022	+	b0>2	b7>0	lehetséges
11. Tojásdb	0,9486	1919 - 2045	+ -	**b0<2	b7>0	kizárt
12. Utasszám	0,9738	1901 - 2063	+	b0>2	b7>0	lehetséges

14. táblázat. Értékelő

A táblázatban csillaggal jelölt információk az alábbiak szerint értékelendők:

* az előrejelzés lehetséges, az értelmezési tartomány alsó határán a nullához balról tartó értékek jelennek meg,

** az értékek arra utalnak, hogy az előrejelzés lehetősége kizárt.

A 15. táblázatban az illesztett modell és az adatsor összevetése alapján levonható jellemzők találhatók.

Folyamat	Növekedés időszaka	Max.,Min., Törés Időpontja	Csökkenés időszaka	Bizonytalan változás időszaka	Fő változás időpontja	Kiegyen- súlyozódás
1. Burgonya	1986-2001	1986(min)	1960-1986	2001-2015	1986	bizonytalan
2. Csalpot	1960-1991	1991(max)	1991-1997	1997-2015	1991	várható
3. Dolgozó	1960-1977	1977(max)	1977-1998	1998-2015	1977	megjelent
4. Földgáz	1960-1986	1986(max)	1986-2015	---	1986	várható
5. Kórágyak	1960-1989	1989(max)	1989-2015	---	1989	várható
6. Nyugdíjas	1960-1999	1999(max)	1999-2015	---	1999	bizonytalan
7. Ovodások	1960-1981	1981(max)	1981-2015	---	1981	várható
8. Pamutsz	1960-1977	1977(max)	1977-2015	---	1977	várható
9. Sör	1960-1990	1990(max)	1990-1999	1999-2015	1990	bizonytalan
10. Telhívás	1960-1999	1999(max)	1999-2015	---	1999	bizonytalan
11. Tojásdb	1960-1990	1990(max)	1990-2015	---	1990	bizonytalan
12. Utasszám	1960-1987	1987(max)	1987-1997	1997-2015	1987	bizonytalan

15. táblázat. Változások

Az 56 év alatti változások jellegét meghatározó táblázatból levonható következtetések, valamint a folyamat lefutási karakterét bemutató értékek ismeretében a következők állapíthatók meg:

a.) A minden egyes folyamatot leíró függvénygörbe egy szélsőértékkel, maximummal rendelkezik, az 1.) eset kivételével.

b.) A folyamat szélsőértéke eleget tesz az elsőderivált előjel váltásának, az érintő irány változása jól látható. Kivételt képez a 3.) és 8.) jelű eset.

c.) A 2015-ös év után a vizsgált tizenkét folyamatból 6 esetben kiegyensúlyozódás várható.

d.) A folyamatok kedvezőtlen alakulásának időtartama változó.

e.) A változást az 1977-1999 éves időszak jelzi. A 12 esetből azonban 8 esetben ez az 1981-1991. időintervallumra esik.

3. Összefoglaló

Mivel a vizsgált 56 év 12 különböző változást leíró statisztikai adatsorának regressziós elemzéséhez ugyanazon szerkesztett, összetett, nagy rugalmasságú függvény használatára került sor, így a folyamatok azonos rendszerű elemzésének adott volt a lehetősége. Ennek alapján az előbbieken felsorolt öt megállapítás a vizsgált időintervallumon alapvető jellegű, és jól mutatja a vizsgált adatsorok változását, annak jellegét és következményeit. Természetesen szükségesnek mutatkozik a 2015-ös évtől kezdett alapos adatgyűjtés, annak érdekében, hogy megállapítható legyen az említett kiegyensúlyozódás illetve az adott esetben pozitív irányú fejlődés.

Irodalomjegyzék

- [1] **Csanády V., Horváth-Szováti E., Szalay L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó, 2013.
- [2] Központi Statisztikai Hivatal honlapja, <https://www.ksh.hu/stadat>.

A vakfolt-mentes sarokreflektorok anyagtakarékos kialakítása

Kalmár János

Soproni Egyetem, SKK, INGA
kalmar@inf.uni-sopron.hu

Bányai László

MTA CSFK GGI
banyai@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Kutatásunkban különböző geometriájú radar sarokreflektorokat vizsgáltunk meg az oldallapok anyagtakarékos kialakítása szempontjából. Monte Carlo modellezéssel és geometriai analízissel kimutattuk, hogy egyes reflektortípusok oldalainak ötöde/harmada lehet vakfolt, ezek elhagyása vagy más célú hasznosítása (pl. a szerkezet merevítésére) nem csökkenti a hasznos tükröző felületet, vagyis a radarreflektorok anyagköltsége (és súlya) a hatékonyság fenntartása mellett jelentősen csökkenthető.

ABSTRACT. In our research we studied radar corner reflectors with different geometry for the material-saving design of side panels. By Monte Carlo modelling and geometric analysis we have shown that one fifth or third part of the sides of some reflector types may be blind area. Cutting these areas or partly using for stiffening the structure does not reduce the useful reflective surface; so the material cost (and weight) of the radar reflectors can be significantly reduced.

1. Bevezetés

Egy sík felületről visszaverődő fény/radarsugár az optikai fényvisszaverés törvényét követi, vagyis a sugár beesési és visszaverődési szöge egyenlő, ezért csak a felületre merőlegesen érkező sugár jut vissza a forrásba – napjaink 'lopakodó' járműveinek alakja emiatt konvex, kis síklapokkal határolt test, aminek radarvisszhangja a hagyományos járművékének csak töredéke. Viszont ha a láthatóságot növelni szeretnénk, akkor sarokreflektort érdemes használni, mert abból hármas tükrözés után pontosan a beesési iránnyal ellentétesen lépnek ki/verődnek vissza a radarjelek, így biztosan eljutnak a forrásban elhelyezett detektorba. A sarokreflektor optimális formája három, egymásra merőleges (jó visszaverő anyagból, pl. fémből készült) síkból képzett tükör [2]. Feltétel, hogy a reflektor mérete legyen nagyobb a radarjel hullámhosszánál [3], és legjobb hatásfokát akkor éri el, ha a beeső sugár főirányú, azaz a reflektor középvonalával párhuzamos, mert ekkor lesz a tükrözési keresztmetszet maximális. A légi és vízi közlekedésben azért használnak radar-reflektorokat, hogy a hordozó – kisméretű, esetleg nem fémből készült – járművet, bóját, könnyebben felismerhetővé (észrevehetővé) tegyék a többi, környezetét radarral pásztázó jármű számára, ami segít megelőzni az ütközéseket. Ekkor a reflektort bármilyen irányból érheti a radarjel, ezért sarkuknál összeillesztett 8 darab negyedkörös vagy háromszög sarokreflektort alkalmaznak (1. ábra), hogy mindenképpen keletkezzék radarvisszhang.

Hasonló radarreflektorokat kötelező használni meteorológiai léggömbökön is, hogy a repülőgépek észleljék és kikerülhessék azokat.

2. Mesterséges radar-reflektorok tervezése és telepítése az ESA programhoz

Egy ESA PECS támogatásnak köszönhetően a hazai INSAR kutatások központja Sopron lett, itt folyik a Sentinel radar műholdképek geodinamikai alkalmazhatóságának vizsgálata [1]. A természetes felszínborítású területeken sajnos kevés stabil radarreflektor (tükör) található, ezért mesterséges reflektorok telepítésére is szükség van. A különböző időpontokban, de azonos pozíciókból készített felvételek alapján lehetőség van a reflektorok mozgásvizsgálatára. A mérés lényege, hogy a műholdról kisugárzott radarjel visszhangját detektálva a jelerősség (amplitúdó) alapján azonosítjuk a reflektorokat, és két, egymás utáni mérés fáziskülönbségéből következtetünk a reflektor esetleges elmozdulására.

Tekintettel arra, hogy már a reflektor telepítése előtt ismerjük a műhold mérésidejű (közelítő) pozícióját, ezért a reflektort telepítéskor úgy rögzítjük, hogy főiránya (középvonala) az ismert műholdpozíció felé mutasson. Korábbi kutatásunkban [4] már megvizsgáltuk, hogy a sarokreflektorok különböző geometriájú oldallapjai mekkora hasznos tükröző felületet nyújtanak, anyag és hely- takarékoság, illetve merevség szempontjából milyen az oldalak optimális kialakítása. E célból programot készítettünk a reflektorba érkező radarjelek útjának leírására, hogy megállapítsuk, hol vannak az egyes reflektorok 'vakfoltjai', azaz olyan területek, ahová beérkező főirányú radarjel idő előtt – háromnál kevesebb tükrözés után, rossz irányban – lép ki a reflektorból.

3. Az opto-geometriai modellezés eredményei

A reflektorba érkező fény/radarjelek Monte-Carlo vizsgálata már előrevetítette, hogy a reflektor alakjától függő vakfoltok valóban előfordulnak, de ezek pontos alakját/nagyságát csak koordináta-geometriai megfontolások révén tudtuk meghatározni.

Az egyszerűség kedvéért a sarokreflektor csúcspontja az origóba került, oldallapjai pedig az (x, y) , (x, z) és (y, z) síkokkal estek egybe. A fénysugár irányvektora legyen $n_0(-1, -1, -1)$, azaz egybeesik a reflektor főirányával. Tegyük fel, hogy a fénysugár először az (y, z) oldallapról verődik vissza, annak $(0, y1, z1)$ pontját érintve. A visszaverődés után a fénysugár irányvektora $n_1(1, -1, -1)$ lesz, mert csak a tükre merőleges komponens fordul meg. Ha $y1 \leq z1$, akkor a fénysugár az (x, z) oldallap $(x2, 0, z2)$ pontjából verődik vissza. Ekkor irányvektorának y komponense fordul meg, és lesz $n_2(1, 1, -1)$. A harmadik, (x, y) oldallapon *visszatükröződve* a kimenő fénysugár irányvektora $n_3(1, 1, 1)$ lesz, vagyis a beesési iránnyal pont ellentétesen lép ki a sugár a reflektorból a hármas tükrözés után, a harmadik tükrőrpont pedig $(x3, y3, 0)$ lesz. A sugár útját követve kiszámítható a második és harmadik tükrőrpontok helyzete az első függvényében:

$$\begin{aligned} x2 &= y1, y2 = 0, z2 = z1 - y1, \\ x3 &= z1, y3 = z1 - y1, z3 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ha $y1 > z1$, akkor az első (y, z) tükrözés után a második tükrözés az (x, y) oldallapon, majd a harmadik tükrözés az (x, z) oldallapon történik, és a tükrőrpontok helyzete így alakul:

$$\begin{aligned} x2 &= z1, y2 = y1 - z1, z2 = 0, \\ x3 &= y1, y3 = 0, z3 = y1 - z1. \end{aligned} \quad (2)$$

Négyzet oldallapú, b él-hosszú sarokreflektornál, ahol $0 \leq y_1, z_1 \leq b$, a tükörpontok (1) és (2) koordinátái alapján nyilvánvaló, hogy teljesülni fognak az $0 \leq x_2, y_2, z_2 \leq b$ és $0 \leq x_3, y_3, z_3 \leq b$ korlátok, vagyis minden, a reflektor (y, z) síkját elérő sugár pontosan három tükröződés után a beesési iránnyal ellentétesen lép ki a reflektorból, tehát ennek a reflektornak nincs vakfoltja.

Az a élhosszú, háromszög alakú sarokreflektor $(0, y_1, z_1)$ belső pontjára vonatkozó feltételek az (y, z) oldallapon

$$0 \leq y_1, z_1 \leq a, y_1 + z_1 \leq a. \quad (3)$$

Természetesen a reflektor (x, z) és (x, y) oldallapjai is háromszögre csonkítottak, tehát teljesülnie kell $0 \leq x_2, z_2, x_3, y_3 \leq a$ mellett az

$$x_2 + z_2 \leq a \quad (4)$$

$$x_3 + y_3 \leq a \quad (5)$$

feltételeknek is. A (4) és (5) feltételek (1) alapján visszavezethetők az (y, z) síkra:

$$z_1 \leq a, \quad (6)$$

$$2z_1 - y_1 \leq a. \quad (7)$$

A (6) feltétel (3) miatt mindig teljesül, (7) és (3) pedig vakfolttá minősíti az (y, z) síknak az alábbi pontok által kifeszített háromszögét: $(0, 0, a)$, $(0, 0, a/2)$, $(0, a/3, 2a/3)$.

Ha $y_1 > z_1$, akkor hasonló gondolatmenettel (2) tükörpont egyenletekből indulva kapjuk a másik vakfolt háromszögét, melyet a 2. ábrán láthatóan a következő pontok feszítenek ki az (y, z) síkon: $(0, a, 0)$, $(0, 2a/3, a/3)$, $(0, a/2, 0)$.

A harmadik vizsgált reflektortípus az egységnyi sugarú, origó középpontú negyed körökből álló sarokreflektor, ahol $0 \leq y_1, z_1 \leq 1$ mellett teljesül a

$$y_1^2 + z_1^2 \leq 1 \quad (8)$$

feltétel is. Természetesen a reflektor (x, z) és (x, y) oldallapjai is negyed körre csonkítottak, ezért $0 \leq x_2, z_2, x_3, y_3 \leq 1$ mellett teljesülnie kell az

$$x_2^2 + z_2^2 \leq 1 \quad (9)$$

$$x_3^2 + y_3^2 \leq 1 \quad (10)$$

feltételeknek is. A (9) és (10) feltételek (1) miatt most is kifejezhetők az (y_1, z_1) koordinátákkal:

$$y_1^2 + (z_1 - y_1)^2 \leq 1 \quad (11)$$

$$z_1^2 + (z_1 - y_1)^2 \leq 1 \quad (12)$$

A (11) feltételből a korábbiaknál szigorúbb új korlát vezethető le:

$$z_1 \geq y_1 - \sqrt{(1 - y_1^2)} \quad (13)$$

melynek értelmezési tartománya $1/\sqrt{2} \leq y_1 \leq 2/\sqrt{5}$.

A (12) feltételből az alábbi korlát vezethető le:

$$z_1 \leq (y_1 + \sqrt{(2 - y_1^2)})/2 \quad (14)$$

melynek értelmezési tartománya $0 \leq y_1 \leq 1/\sqrt{5}$.

Ha $yI > zI$, akkor (2) alapján (9) és (10) feltételek így írhatók fel az (yI, zI) koordinátákkal:

$$zI^2 + (yI - zI)^2 \leq 1 \quad (15)$$

$$yI^2 + (yI - zI)^2 \leq 1 \quad (16)$$

Látható, hogy (15) ekvivalens (11)-el, (16) pedig (12)-vel, vagyis a korlátok (a mértani helyek) nem változnak. A (8) feltétel átírható

$$zI \leq \sqrt{1 - yI^2} \quad (17)$$

alakba, és a képlet értelmezési tartománya $1/\sqrt{5} \leq yI \leq 2/\sqrt{5}$ lesz.



1. ábra. Irányítatlan radar-reflektorok

4. Összefoglaló

Modellezési és geometriai vizsgálataink szerint a vakfoltok elhagyása nem csökkenti a reflektor hatékonyságát (hasznos radarkeresztmetszetét), csökkenti viszont súlyát és anyagköltségét. A sarokreflektorokba a főirányból érkező radarjelek opto-geometriai modellezése az alábbi megállapításokkal zárult:

A négyzet oldallapú sarokreflektoron vakfoltot nem találtunk, vagyis ha egy fénysugár bárhol eléri a reflektort, akkor a hármas tükrözés után biztosan visszaverődik a forrás irányába.

Háromszög lapokból álló, a él-hosszú sarokreflektor esetén – csúcspontjai a $\{(0, 0), (a, 0), (0, a)\}$ pontok – a lapok vakfoltjai (az oda beérkező sugár rossz irányba verődik vissza) a $\{(a/2, 0), (a, 0), (2a/3, a/3)\}$ és $\{(0, a/2), (0, a), (a/3, 2a/3)\}$ pontok által alkotott háromszögek (2. ábra). A vakfoltok területe az eredeti háromszög-lap területének harmada. A kontúrélek pontos egyenletei az (y, z) síkon (oldallapon) alább láthatók:

$$\begin{aligned} z &= (a + y)/2, & \text{ha } 0 \leq y \leq a/3, \\ z &= a - y, & \text{ha } a/3 \leq y \leq 2a/3, \\ z &= 2y - a, & \text{ha } a/2 \leq y \leq 2a/3. \end{aligned}$$

Az egységnyi (1 m) sugarú, origó középpontú negyed körökből álló sarokreflektor vakfoltjait az $\{(1/\sqrt{2}, 0), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$ és $\{(0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})\}$ pontpárok közötti ellipszis

ívek határolják (3. ábra). A vakfoltok a negyed kör területének 18%-át teszik ki. A kontúr élek egyenletei alább láthatók:

$$\begin{aligned} z &= (y + \sqrt{(2 - y^2)})/2, & \text{ha } 0 \leq y \leq 1/\sqrt{5}, \\ z &= \sqrt{(1 - y^2)}, & \text{ha } 1/\sqrt{5} \leq y \leq 2/\sqrt{5}, \\ z &= y - \sqrt{(1 - y^2)}, & \text{ha } 1/\sqrt{2} \leq y \leq 2/\sqrt{5}. \end{aligned}$$

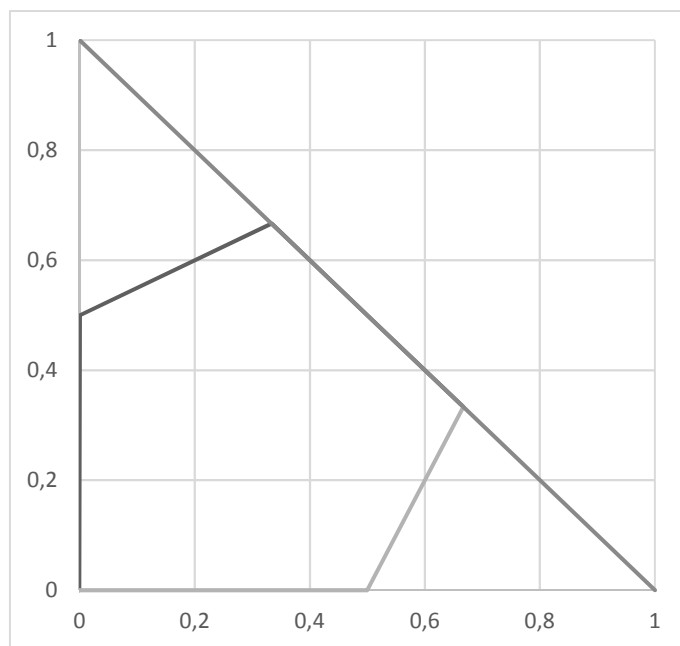
Ha azt szeretnénk elérni, hogy a háromszög oldallapú sarokreflektornak ugyanakkora hasznos radarkeresztmetszete legyen, mint az egységsugarú negyedkörös sarokreflektornak, akkor a sarokreflektor él-hosszát $a = 1,38942$ m-ben kell rögzíteni (4. ábra).

Ha azt szeretnénk elérni, hogy a négyzet oldallapú sarokreflektornak ugyanakkora hasznos radarkeresztmetszete legyen, mint az egységsugarú negyedkörös sarokreflektornak, akkor oldalhosszát $b = 0,8021852$ m-ben kell rögzíteni (4. ábra).

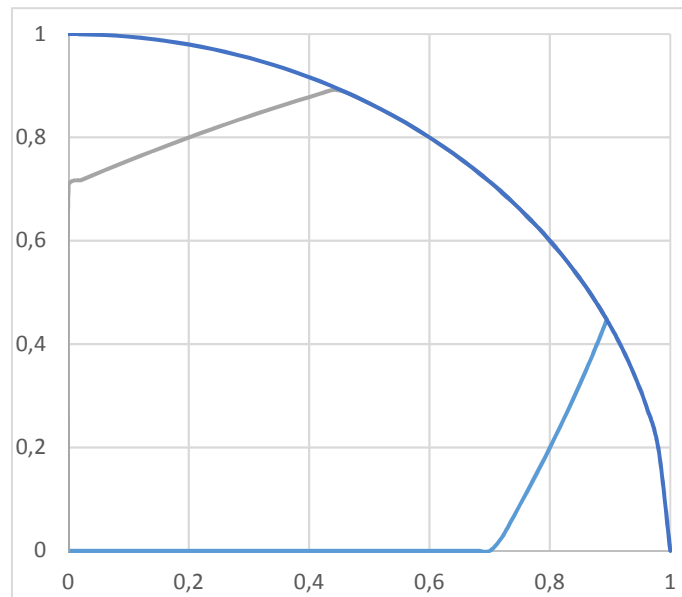
A négyzet oldallapú sarokreflektor oldallapjának legnagyobb kiterjedése (2 belső pontjának legnagyobb távolsága) $1,13446$ m, a háromszög oldallapúé (4. ábra) $1,0356$ m, a negyed kör oldallapúé pedig 1 m.

Az egyforma hasznos radar-keresztmetszetű sarokreflektorok széleinek merevítéséhez szükséges keretek összhosszai – pl. a négyzet oldallapú sarokreflektornál ez $9b$ – csak 1%-al térnek el egymástól.

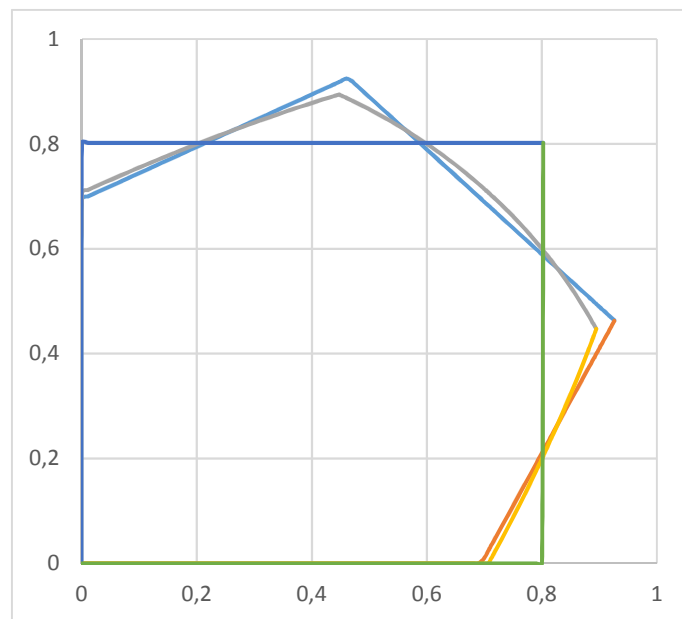
A Monte-Carlo modellezés alátámasztotta azon sejtésünket, hogy a sarokreflektornak van fázis centruma, és az a reflektor sarokpontjában – ahol a három, egymásra merőleges sík találkozik – van, tehát bármely, a reflektorból hármass tükrözés után visszaverődő fény/radarsugár pontosan akkora utat tesz meg, mintha a fáziscentrumból verődne vissza.



2. ábra. Egységnyi él-hosszú háromszög sarokreflektor hasznos felülete



3. ábra. Egységnyi sugarú negyed-kör sarokreflektor hasznos felülete



4. ábra. Azonos hasznos felületű sarokreflektorok oldallapjai

Irodalomjegyzék

- [1] **Bányai L., Szűcs E., Kalmár J., Eperné Pápai I., Bán D.,** Az INSAR technológia alapjai és a reflektáló felületek jellemzői, Geomatikai Közlemények 17, (2014), 59-68.
- [2] **Newman, W. I.,** Continuum Mechanics in the Earth Sciences. Cambridge University Press, (2012), 6–7. doi:10.1017/CBO9780511980121.
- [3] **Kraus, J., Marhefka, R.,** Antennas for All Applications, 3rd ed. Mc Graw Hill. p. 365, 2002.
- [4] **Kalmár J., Bányai L.,** A mesterséges radar sarokreflektorok geometriailag optimális kialakítása, Magyar Űrkutatási Fórum, Sopron, 04.06, 2017.

50 év biomatematika az agráriumban

Bán István

ny. erdőmérnök és alk. matematikus, c. egyetemi docens
istvan.ban.dr@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Az 1960 óta végzett biomatematikai munkámat mutatom be. Először a biomatematika definícióját adtam meg. Ezt követően új biomatematikai módszereket és azok gyakorlati alkalmazását fejlesztettem ki. Nevezetesen ez a cikk az erdőgazdálkodás, növénytermesztés és vadgazdálkodás problémáinak biomatematikai megoldásaival foglalkozik. Ezek a megoldások tartalmazzák a biomatematikai fejlesztésnek, állapotjellemzők hatásmechanizmusainak és erdészeti hozamszabályozásnak, valamint növénytermesztési szaktanácsadásnak az alkalmazását.

ABSTRACT. I am presenting my biomathematical work since 1960. First, I developed a definition of biomathematics. Then, I developed some new biomathematical methods and their practical applications. Accordingly, this paper deals with biomathematical solutions to forest management, plant cultivation and game management problems. These solutions involve the application of biomathematical research, state characteristics effect mechanisms and forest yield regulation as well as providing plant cultivation expert consultancy.

1. Bevezetés

A második világháborút követő felpörgött szellemi életben született meg tudtommal az első biomatematika írás [1]. Rá pár évre kezdtem el foglalkozni ezzel a tudományterülettel [2]. Egy évtized múlva Dala László főszerkesztő Úr felkérésére Rényi Alfréd lektorálásával megírt cikkemben definiáltam a biomatematika fogalmát [3]. Dr. Sós Gábor földművelésügyi államtitkár, Dr. Madas András tervhivatali államtitkár, Dr. Sali Emil erdészeti hivatalvezető és Dr. Nagy Bálint agrokémiai főosztályvezető felismerve e tárgyban rejlő lehetőségeket a Fővárosi Növényvédő Állomás keretei között 1968-ban létrehozták a „Biomatematika csoportot”, amelynek vezetésével engem bíztak meg. Ezt követően végig fejlesztőmérnökként és –matematikusként dolgoztam.

Az agráriumban belül az agrokémiai-, erdészeti-, növénytermesztési és vadgazdálkodási feladatok biomatematikai megoldására koncentráltam. Munkám határterületeként távészlelés, azaz remote sensing és biofizikai módszereket is fejlesztettem, illetve alkalmaztam.

A megoldandó gyakorlati feladatok sokrétűsége változatos matematikai apparátust igényelt. A biomatematikában egyrészt felhasználtam a rendelkezésemre álló matematikai konstrukciókat egy adott biológiai feladat megoldására, másrészt pedig ami lényeges különbség, hogy maga a biológiai objektum sajátosságai definiálták a matematikai konstrukciókat [3]. A gyakorlatban ezt a kettősséget nem kellett mereven szétválasztani, sőt, azok sok esetben összemosódtak.

2. Feladatok tárgyalása

A természetes- és kultúrnövény állapot felmérésére alkalmas ortofotoszkópiában a fokális (szögtartó) pontra alapozott új képalkotási képleteket dolgoztam ki Dr. Bezzegh László Kossuth-díjas egy. tanár Úr részére, amelyek nagyban elősegítették kiértékelő műszerének tervezését, és számítógépes megoldását.

A megfigyelt biológiai objektum helyét kellett meghatároznom klasszikus trigonometriával legalább három ismert koordinátájú pontra mért csapásszögek segítségével, vagy ismert koordinátájú, legalább három pontból a meghatározandó pontra mért csapásszögekkel, különös tekintettel a fák koronavetületének vizsgálatában történt felhasználásra.

A projektív képalkotás klasszikus trigonometria algoritmusával a képpontok valódi helyének számítását végeztem el.

A Hajós-féle viszonykoordinátákkal a távészlelés (remote sensing), például légi fényképezés, rögzített idejű képpontjaiból pontsűrítést, azaz további ismeretlen pontok helyét számítottam ki.

Mozgó-, légi- vagy úrjárműről végzett távészlelés ismert koordinátájú úgynevezett illesztőpontjaiból további észlelt pontjainak, mint biológiai objektumoknak, helykoordinátáit számítottam a Hajós-féle viszonykoordinátákkal, majd ezt továbbfejlesztettem időkoordinátákra.

Többváltozós biológiai folyamatokat vizsgáltam viszonykoordinátákkal.

Az agráriumban igen nagyszámú, és rendkívül sokféle információ keletkezik, ezért igen fontos volt az adathalmazok matematikai sajátosságainak megismerése úgy, mint: biológiai kísérletek halmazainak csoportképzése, és ezek izomorfizmusának vizsgálata.

Osztályképzési algoritmusok alkalmazása és újak kidolgozása az agrokémiában. Növényvédelmi adathalmazok osztályképzési lehetőségeinek kombinatorikai vizsgálata.

Növényi betegségek és károsítások megfigyelési adathalmazainak matematikai analízise újabb fogalmak bevezetésével. Az igen nagyszámú, és sokféle információ későbbi kezelhetősége miatt kellett definiálnom az úgynevezett állapotjellemző fogalmát, amely által felvett értéket neveztem a továbbiakban állapotjellemző-értéknek.

Lényeges kérdésként merült fel az adott pontosság eléréséhez szükséges mintavétel meghatározása, ahol a klasszikus eljárások mellett az adathalmaz természete által előzetesen meghatározott optimális mintavételi arányszámítási módszert dolgoztam ki.

Már meglévő adathalmazok esetén a megbízhatóságot kellett számítanom az ismert matematikai statisztikai módszerekkel.

Függvényváltozók esetén a klasszikus differenciálszámításra alapozott hibaszámítást alkalmaztam.

A klasszikus valószínűségi változó-, és az újonnan bevezetett állapotjellemző fogalmak megfeleltethetőségét definiáltam a gyakorlatban.

Az amerikai remote sensing módszereket továbbfejlesztve Magyarországon először végeztünk légifelderítést növényi betegségek vizsgálatára.

Japán és orosz biofizikai módszereket tökéletesítve mikromanipulátoros mikroelektródákkal növények és rovarok anyagcseréjét vizsgáltam bioelektromos potenciál eloszlással. Mindkét esetben definiáltam az állapotjellemző értékre alapozott megismerhetőségi korlát és változás fogalmát és kidolgoztam az erre épülő relációs gyorsesztet a növény és rovar anyagcseréjének felderítésére.

Lényeges gyakorlati feladatom volt a környezeti tényezők, mint például a hőmérséklet, nedvességtartalom anyagcserére kifejtett hatásának felderítése, amely miatt definiáltam a hatás fogalmát és felhasználási módszerét. Ezzel lehetővé vált a növényvédőszer hatásának gyorsesztet a kórokozókra és kártevőkre, valamint a műtrágyák hatásának vizsgálata a növény termésmennyiségére.

Sajnálatosan jelentős volt a csernobili nukleáris katasztrófát követő radioaktív szennyezettség kimutathatóságával kapcsolatos vizsgálatom az előző gyorseszttel.

Az elektromágneses térerősség enzimaktivitásra kifejtett hatásának, illetve gomba- és baktériumtenyészetekre gyakorolt hatásának kimutatására szintén alkalmaztam az előző módszert.

Erdészetben megvizsgálni kívánt erdőállapotok összehasonlításánál használtam kezdeti felvilágosításra relációs gyorseszttet.

Vadgazdálkodásban különböző élőhelyekről származó vadállapotjellemzők, mint például a trófea adatok, tájékoztató összevetését végeztem relációs gyorseszttel.

A matematikai statisztikai próbákat széleskörűen alkalmaztam. Legtöbbet az adott valószínűségi szinten középérték-összehasonlító t-próbát, illetve szórást összevető F-próbát használtam.

A remote sensing munkáinknál a terepi objektumok és az észlelt terepi objektumok állapotjellemzőit vetettem össze, különös tekintettel a talaj-, a növénytakaró állapotjellemzőire, ami például a növényi betegségek felderítését segítette.

A biofizikai feladatainkban az elektromágneses tér gomba- és baktérium tenyészetekre kifejtett hatásvizsgálatoknál, vagy növényvédőszeres kórokozókra és károkozókra gyakorolt hatásvizsgálatánál széleskörűen alkalmaztam a statisztikai próbákat. A környezeti tényezők növényi kórokozókra és kártevőkre kifejtett hatását is velük mutattam ki. A különböző kemikáliák növényi beltartalom megváltoztatásának kimutatására szintén használtam a statisztikai próbákat. Az erdészeti gyakorlatban különböző erdőművelési eljárások eredményeként előálló erdőállapotokat hasonlítottam össze ezekkel a módszerekkel.

Vadgazdálkodásban különböző élőhelyről származó testméreteket és trófeajellemzőket vettem össze t- és F-próbákkal.

Az agrárgyakorlatban az egyik legizgalmasabb kérdés a leképezések vizsgálata, a relációk és kapcsolatok felderítése, illetve az összefüggések jellemzőinek meghatározása. A korreláció és regresszió-számítást igen gyakran használtam, amely hasznos gyakorlati eredményeket adott.

A remote sensing folyamán a földi kontroll állapotjellemzők, és a róluk távészleléssel felderített állapotjellemzők közötti kapcsolat-, illetve az összefüggés formájának meghatározását végeztem el, amely lehetővé tette a növényi betegségek és károsítások légifelderítését.

A növényi anyagcsere biofizikai vizsgálatánál különböző mértékű behatások esetén biofizikai paraméterek kapcsolatát mutattam ki.

A növényvédőszeres optimális dózisának meghatározására a gombaölő-, rovarölő- és gyomirtó szerek különböző dózisa és a mortalitás mértéke közötti regressziót számítottam. A klasszikus regresszió-számítást továbbfejlesztettem kontrol szerinti modulációval, illetve intervallumonkénti más számítási formákkal. Több esetben határozott integrálszámítással képzett ív- segédváltozókat felhasználó regresszió-számításom vezetett célhoz. Egyes feladatoknál interpolációs polinomot volt célszerű számítanom.

Az agrokémia nagy kihívása volt a növénytermesztési technológia szaktanácsadása. Meg kellett határozni növényfajonként, sőt növényváltozatonként, sokszor FAO számonként az összes meteorológiai jellemző termésre kifejtett hatását, amelyben regresszió-számításokat használtam. Hasonló feladatot oldottam meg a talaj valamennyi mért állapotjellemzőjének és a növény terméseredményének összefüggés-vizsgálatával, amely szintén nagy tömegű számítási feladatot jelentett.

Erdészetben az úgynevezett fatömegfüggvények az erdő állapotjellemzőinek függvényében adják meg a fatömeget. Meghatározásában numerikus-, analízisbeli-, regressziószámítási- és egyéb módszerekkel magam is részt vettem.

A légiészleléssel- és űrészeleléssel meghatározott paraméterek, és a terepi erdőállapot jellemzők közötti törvényszerű kapcsolatokat regressziós módszerekkel derítettem fel.

Vadgazdálkodásban az élőhely állapotjellemzői és vadállapot jellemzők közötti törvényszerűségeket korrelációs és regressziós módszerekkel vizsgáltam. Az őz- és a szarvas trófea bírálati jellemzők, és az összpontszám közötti kapcsolatot is az előző módszerekkel határoztam meg.

Külső környezeti hatások, valamint speciális kemikáliák növényi és állati anyagcserére gyakorolt hatásának bioelektromos vizsgálatában gyakorta előfordultak szélsőségesen változó mérési állapotjellemző értékek. A haszon- és természetes növények kórokozóinak és károsítóinak felderítésekor a visszavert fény spektrumeloszlásában, valamint az elsődleges detektorokkal észlelt mérési adathalmazban, illetve a másodlagos leképezett információk denzitás vizsgálatában gyakran előfordultak szélsőségesen változó állapotjellemző értékek. Előző halmazok azt a látszatot keltik a hagyományos matematikai vizsgálatokkal, hogy véletlen jellegű törvényszerűség nélküli folyamatokkal állunk szemben, noha pont a káosz maga jellemző az adott jelenségre, s ennek törvényszerűségét sikerült felderítenem. Az ilyen szélsőségesen változó állapotjellemző értékű halmazokat nevezzük fűrészfoghalmazoknak, és értékelésükre a lokális szélsőértékek vizsgálatát dolgoztam ki. Ezzel már lehetővé vált számomra a törvényszerűségek felderítése, a hatásmechanizmusok és az agrokémiai gyakorlatban lényeges állapoteltérések jobb megismerése.

Az erdőállapot-jellemzőknek mint a vad élőhelyének légi- és űrfelderítésénél szintén a fűrészfoghalmazok lokális szélsőértékeinek törvényszerűségeit vizsgáltam.

A fűrészfoghalmazok lokális szélsőértékeinek vizsgálata jó példa egyébként arra is, hogy egyes esetekben mennyire nem szabad, sőt célszerűtlen kiegyenlítő matematikai modulokat rákényszeríteni biológiai jelenségekre, hanem ezen biológiai jelenségek belső sajátosságai kell, hogy felépítsék, illetve megfogalmazzák a matematikai törvényszerűséget.

A biomatematikában is rendkívül fontos a képi megjelenítés. Igen kusza hatásmechanizmusokat sikerült úgy tisztázni, hogy képpé alakított metrikus- vagy metrizálható-, illetve nem metrikus információkat keletkezési helyük pontos geodéziai-, vagy helyi geometriai koordinátaival azonosítva együtt, egymáshoz rendelve ábrázoltam. A képi megjelenítés legegyszerűbb formái az információkat egy adott szempont szerint ábrázolják, mint például grafikonok, diagramok stb. Az 1962-ben, tizenévesen megjelent bükk-rönkök bütü repedéseinek vizsgálati eredményeit több állapotjellemző szerint csoportosítva grafikusán ábrázoltam, és ezzel térben-, időben- és évgyűrűszerkezetben tettem láthatóvá a mért értékeket.

Jelentős feladat volt a talaj-elemtartalom-, a növények elembeltartalma-, időjárási tényezők értékeinek eloszlását mutató számítógépes tematikus térképeknek együttes geodéziai hozzárendelését végeztem el a haszonnövények terméseredményeihez, ami igen nagy segítséget adott a gyakorlati növénytermesztésnek.

Az erdőszetben hasonlóan elvégeztem a tematikus térképek kölcsönösen egyértelmű geodéziai egymáshoz rendelését, ami nagy segítséget adott a fajaj-megválasztáshoz.

A vadgazdálkodásban a talaj-, a növénytermesztési-, erdőszeti- és meteorológiai vadállománybéli állapotjellemzőket geodéziailag kölcsönösen egyértelműen egymáshoz rendelve kaptam meg az egyes vadfajok élőhelyének minőségi kategóriáit. Megjegyzendő, hogy hazánkban az agráriumban készültek el az ország első tematikus számítógépes térképei az 1970-es évek közepén.

Az elvégzett vizsgálatok egyik alapkérdése volt, hogy milyen állapotjellemzőket vegyünk figyelembe, és azokat miként rendeljük egymáshoz. Sok esetben szakmai ismereteink vagy gyakorlati tapasztalatunk alapján választjuk ki és rendeljük egymáshoz az állapotjellemzőket, és azok értékeit.

Rovarokon végzett bioeletromospotenciál vizsgálataimnál viszont találkoztam olyan információátvitellel, amelynek tényét kísérletileg lehetett igazolni, viszont megnyilvánulásának módját vagy működését nem. A jelenséget több élszervezetten is megfigyelve Black Bear Effect-nek, azaz BBE-nek neveztem el.

Biofizikai és remote sensing vizsgálataim szükségessé tették, hogy bevezessem az állapotjellemző értékek mellett a relációk, valamint a relációk sajátosságai fogalmakat, illetve mind ezek együttesével a természeti jelenség definiálását. A már említett biofizikai és remote sensing vizsgálataim alapján el kellett különíteni a valóban létező természeti jelenséget (amelyet konkrétan észlelni tudunk), valamint az ember számára elképzelhető természeti jelenséget (megfigyelhető és meg nem figyelhető), és fel kell tételeznünk elképzelhetetlen természeti jelenséget, amiről semmit nem tudunk pillanatnyilag, bár ettől még lehet, hogy tőlünk függetlenül létezik.

A múltban, jelenben illetve jövőben valóban létező, valamint elképzelhető és elképzelhetetlen természeti jelenségek összességének matematikai konstrukciójával definiáltam az univerzumot, amelyek összességéből tovább képezhető a multiverzum. Speciális konstrukció számunkra a black hole (BH) feketelyuk, amely elképzelhető, de ismeretlen, valamint elképzelhetetlen konstrukciókból tevődik össze.

Az előző, látszólag felesleges matematikai konstrukcióknak viszont nagy jelentősége van egy-egy igen nagy és összetett adatbázist igénylő gyakorlati feladat megoldásánál.

Az igazán nagy jelentőségű gyakorlati agrofeladatok megoldásánál minden esetben igen nagy adatbázist kellett létrehozni, sok esetben több, már meglévő adatbázist kellett egymáshoz rendelni és kiegészíteni.

Szép és nagy, több adatbázist igénylő feladat volt számomra a növénytermesztési műtrágya-szaktanácsadás rendszerének elkészítése. Gondoskodni kellett a meteorológiai-, talajtani-, technológiai-, haszonnövényi adatbázisok kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendeléséről. Ki kellett dolgoznom az igen nagyszámú metrikus és metrikátlan, valamint eltérő vonatkozási alapú állapotjellemzők értékeit kezelni tudó olyan matematikai modellt, amely egyrészt ki tudja számolni, hogy a kérdezett szántóföldi táblán mekkora termés várható, vagy másrészt az adott szántóföldi táblán egy adott növény kívánt terméseredményét milyen technológiával mennyi nitrogén-, foszfor-, kálium műtrágyával érhetjük el. Továbbá gondoskodni kellett a szaktanácsadási rendszer alkalmazásával nyert új növénytermesztési adatok visszacsatolásáról. Erre dolgoztam ki 1970-es évek közepén az úgynevezett PMSB matematikai modellt, amely azóta az élet szinte minden területén az orvostudománytól a technikáig elterjedt. A feladat megoldásában terepen dolgozó gyakorlati szakemberek-, laboratóriumokban munkálkodók és számítástechnikusok sokasága vett részt. Nagyságrendileg több száz szakember segítette a feladat megoldását. Az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjának ICL nagy gépén és az országos agrokémiai vidéki hálózat termináljain a rendszer gyönyörűen működött, de sajnos a növénytermesztési közösségek (állami gazdaságok, szövetkezetek) birtokviszonyai felbomlottak, és munkaszervezeti egységeik s az adatbázisok széthullottak. Szerencsére viszont maga a PMSB matematikai modell tovább szárnyalt és nagy nemzetközi érdeklődést váltott ki.

Ugyancsak nagy és több adatbázist igényelt az általam tervezett és irányított egyik legszebb modellezési erdőszeti feladat, az úgynevezett hosszútávú országos erdőállomány véghasználati hozamszabályozás, amely arra ad feleletet, hogy Magyarország területén a többszázezer erdőrészletben az 50 év alatt hol, mikor, mennyi fát kell kivágni. A feladat adatbázis kezelésből-, erdőállapot időfüggvényeinek modellezéséből-, kiegyenlítésből-, terepi végrehajtás eredményeinek visszacsatolásából- és ellenőrzésből állt. Számítógépes hozamszabályozást az országban elsőként végeztük. Az országos hozamszabályozás kötelezettsége az 1996-os erdőtörvénybe is bekerült. Hozamszabályozás közvetve kimutatta a rablógazdálkodást, amely miatt engem, mint a módszer kidolgozóját, irányító végrehajtóját,

felelőssét és az eredmények ismertetőjét hosszú fegyelmi eljárás alá vontak, amit aztán a valós tények miatt kénytelenek voltak teljesen visszavonni. Sajnos a mostani erdőtörvényből kivették az országos hozamszabályozás kötelezettségét, csupán a hozamvizsgálatot írják elő. Ez a tény késztetett a lokális optimumok és az abszolút optimum viszonyának vizsgálatára.

A kivágott fa legkedvezőbb felhasználását pedig példaként Zala területére optimalizálási feladatként oldottam meg klasszikus lineáris programozással.

A vadgazdálkodásban a meteorológiai-, növénytermesztési-, erdészeti- és vadgazdálkodási adatbázist kölcsönösen egyértelműen egymáshoz rendelve határoztam meg a legfontosabb törvényszerűségeket. Sajnos több esetben rablógazdálkodást derítettem fel, viszont örömteli, hogy a magyar élőhelyi adottságok a számításaim szerint lehetővé teszik a 300 IC pontos trófeájú gímszarvas életét. Az előre kiszámított adatot rá pár évre igazolta a vadászati gyakorlat, amely 10%-on belüli agancsú szarvasbikát hozott terítékre.

3. Utóirat

Az agronómiában a növénytermesztési-, agrokémiai-, erdészeti- és vadgazdálkodási feladatok biofizikai- és remote sensing (távészlelés) módszerekkel kiegészített biomatematikai megoldásai kiváltották előbb az amerikai űrkutatás NASA, és az amerikai akadémiai szolgálat, valamint a szovjet Interkozmosz élénk érdeklődését.

4. Összefoglaló

A biomatematika egyrészt matematikai módszerekkel modellezi a biológiai jelenségeket, másrészt a biológiai jelenségek önmaguk határozzák meg a matematikai konstrukciókat. Biomatematikai módszerekkel 1960-tól erdészeti-, növénytermesztési- és vadgazdálkodási gyakorlati feladatokat oldottam meg az agráriumban. Kiemelt feladat volt az erdőállapotjellemzők közötti összefüggés-vizsgálat és a hozamszabályozás, valamint a kémiai-, meteorológiai- és talajtani állapotjellemzők hatásvizsgálata a kultúrnövényekre, illetve a mezőgazdasági-, erdészeti- és vadgazdálkodási állapotjellemzők közötti törvényszerűségek felderítése. A biomatematika alkalmazása napjainkra az agrárium szinte minden területén széleskörűen elterjedt, ami a benne rejlő nagy gyakorlati lehetőségek miatt az ugrásszerűen megnövekedett felhasználói igényeknek és a számítástechnika rohamos fejlődésének köszönhető. Ennek a hatalmas munkának pirinyó töredékében vettem részt fél évszázadon keresztül, hogy megoldjam az agráriumban rám eső gyakorlati és elméleti feladatokat. Mára már olyan szakterületek is megjelentek, mint a biokibernetika, bionika és bioinformatika, amelyek a jövőben még nagyobb reményekre jogosítanak.

Irodalomjegyzék

- [1] **Smith, C. A. B.**, Biomathematics, the principles of mathematics for students of biological science. London, 1954, Charles Griffin and Comp. Ltd.
- [2] **Bán, I.**, "Bükk rönkök bütü repedéseinek vizsgálata", Erdőgazdaság és Faipar 1962. 4. szám.
- [3] **Bán, I.**, "A matematika és a biológia határán", Természet Világa (Természettudományi Közlöny), 1970. 5. szám.
- [4] **Bán, I.**, Biomathematics and its Application in Plant Cultivation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987. p. 202.
- [5] **Bán, I.**, Biomathematics and its Application in Plant Cultivation, Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo, 1988. p. 202.
- [6] **Bán, I.**, Vezetői döntések előkészítése halmazok leképezésével a mező- és erdőgazdaságban, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987. p. 326.