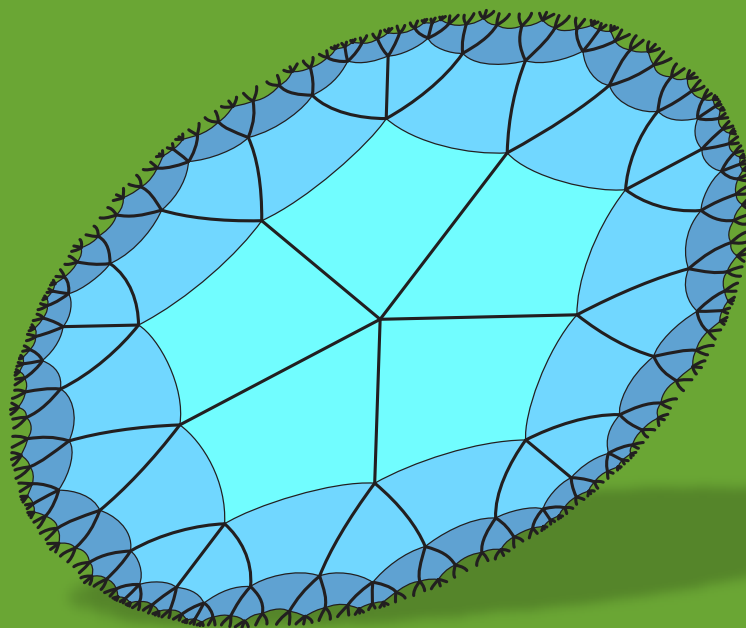


Dimenziók

Matematikai Közlemények

VI. kötet



**SOE EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2018**

Dimenziók

Matematikai Közlemények

VI. kötet

SOE EMK Matematikai Intézet

Soproni Tudós Társaság

2018

Szerkesztők:

Dr. Németh László
egyetemi docens

Dr. Szalay László
intézetigazgató egyetemi tanár

Dr. Závoti József †
egyetemi tanár

Soproni Egyetem
Erdőmérnöki Kar
Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.



MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.



Kiadja: SOE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

Tartalomjegyzék

On connections between domain specific constants in some norm inequalities	3
A 120-cella és a 600-cella 3-dimenziós reprezentációról.....	13
Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről.....	25
A talajszerkezeti és spektrális tulajdonságok összefüggésének meghatározása	31
Kettős Awrami függvény alkalmazása	41
Mathematical model for describing the universe.....	49
Középkori számolási eljárásokról	57
Probléma megoldási módszerek egy térgeometriai feladat kapcsán.....	65
A matematikatanítás eredményességét növelő módszerek a felsőoktatásban	73

On connections between domain specific constants in some norm inequalities

Sándor Zsuppán

Berzsényi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Kapcsolatot vezetünk le a divergenciára vonatkozó Babuška-Aziz és a kapcsolódó Friedrichs-Velte egyenlőtlenségben szereplő optimális tartományspecifikus konstansok és a gradiensre vonatkozó kibővített Poincaré egyenlőtlenségben szereplő megfelelő konstans között. Ugyanezzel a módszerrel igazolunk egy új, a rotációra vonatkozó kibővített Poincaré egyenlőtlenséget és kapcsolatát a rotációra vonatkozó Babuška-Aziz egyenlőtlenséggel.

ABSTRACT. We derive connections between optimal domain specific constants figuring in the Friedrichs-Velte inequality for conjugate harmonic functions, in the Babuška-Aziz inequality for the divergence and in the improved Poincaré inequality for the gradient. With the same method we obtain for spatial domains an improved Poincaré inequality for the rotation in connection with the corresponding Babuška-Aziz inequality.

1. Introduction

In [11] Friedrichs proved an inequality between the norms of square integrable conjugate harmonic functions on planar domains. Horgan and Payne [13] discovered that a smooth simply connected planar domain supports the Friedrichs inequality if and only if it supports the Babuška-Aziz inequality for the divergence [3], which ensures the stable solvability of the divergence equation in an appropriate function space on the domain. Moreover, they proved an important equation involving the optimal domain specific constants figuring in the corresponding inequalities. Velte [21] generalized this connection for smooth simply connected spatial domains and for the Babuška-Aziz inequality for the rotation using another variant of the Friedrichs inequality. Costabel et al. [6] proved that this connection between the Friedrichs-Velte and Babuška-Aziz inequalities and constants remains valid without any smoothness assumptions on the domain and can be further generalized for differential forms on arbitrary dimensional domains, see [7].

These inequalities and constants are not only of theoretical but also of practical interest for the numerical solutions of problems in fluid dynamics and elasticity, see [8,19,20] and references therein. Despite of their importance exact values of these constants are known in a few cases [11,21], although the inequalities are proved to be valid on general classes of domains. Shapiro [18] proved the Friedrichs inequality for planar domains satisfying an interior cone condition, Acosta et al. [1] established the Babuška-Aziz inequality for the

KULCSSZAVAK. Friedrichs-Velte egyenlőtlenség, Babuska-Aziz egyenlőtlenség, Poincaré egyenlőtlenség.

KEYWORDS. riedrichs-Velte inequality, Babuska-Aziz inequality, Poincaré inequality.

divergence in the class of John domains, which is a generalization of the class of domains satisfying an interior cone condition. Recently Jiang et al. [15] proved that the validity of the Babuška-Aziz inequality is equivalent to the John condition and to the validity of an improved Poincaré inequality [14] provided the domain satisfies the separation property (which condition is fulfilled for any simply connected plane domain).

In this paper we focus rather on the constants than on the inequalities itself. Motivated by a result in [10] we establish a connection between the optimal constant in the improved Poincaré inequality and the Friedrichs-Velte constant, which connection implies the simultaneous validity of the corresponding inequalities. With the same method using the Friedrichs constant connected to Babuška-Aziz constant for the rotation we derive an improved Poincaré inequality using the rotation instead of the gradient.

In section 2 we formulate the notation and the preliminaries. Next in section 3 we derive the main result, Theorem 3.13, which states that domains satisfying the Hardy inequality simultaneously support the Friedrichs-Velte and the improved Poincaré inequalities. As a byproduct we obtain upper estimations for the constant in the improved Poincaré inequality for star-shaped domains using known upper estimations for the Friedrichs-Velte constants from [6,13,17]. We also discuss geometric conditions for the problem domain in order to satisfy the conditions of Theorem 3.13.

2. Notation and preliminary results

In this paper Ω denotes a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Let $L_2(\Omega)$ be the usual space of square integrable functions over Ω . The norm and the integral mean on Ω of $f \in L_2(\Omega)$ are $\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2$ and $f_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f$, respectively. $H^1(\Omega)$ denotes the Sobolev space of functions with $\nabla f \in L_2(\Omega)^n$. Its subspace $H_0^1(\Omega)$ is the closure of smooth functions with compact support in Ω under the norm $\|f\|_1^2 = \int_{\Omega} |f|^2 + |\nabla f|^2$ of $H^1(\Omega)$. $|f|_1 = \|\nabla f\|$ denotes the seminorm on $H_0^1(\Omega)$ equivalent to the H^1 -norm.

Definition 2.1. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) supports the Friedrichs-Velte inequality if there is a positive constant Γ depending only on the domain Ω such that for every pair of square integrable conjugate harmonic functions u and v there holds

$$\|u\|^2 \leq \Gamma \|v\|^2 \text{ provided } u_{\Omega} = 0. \quad (1)$$

The least possible constant in (1) is denoted by Γ_{Ω} and is called the Friedrichs-Velte constants of the domain Ω . Conjugate harmonic means in Definition 2.1. the Cauchy-Riemann equations

$$\nabla u = \nabla^{\perp} v \quad (2)$$

with $\nabla^{\perp} = (\partial_2, -\partial_1)$ for planar domains and the Moisil-Teodorescu equations

$$\text{rot } v = \nabla u \text{ and } \text{div } v = 0 \quad (3)$$

for spatial domains. The normalization $u_{\Omega} = 0$ means that u belongs to the orthogonal complement of the kernel of the gradient in $L_2(\Omega)$. The inequality (1) was investigated by Friedrichs [11] and Shapiro [18] for planar domains and then by Velte, [21] for simply connected spatial domains with sufficiently smooth boundary. Velte [21] also formulated

another related inequality for simply connected spatial domains estimating the norm of the vector valued function v in (3) as

$$\|v\|^2 \leq \tilde{\Gamma} \|u\|^2 \text{ provided } \int_{\Omega} v \cdot \nabla \phi = 0 \text{ for every } \phi \in H^1(\Omega) \quad (4)$$

This normalization means that the solution v of (3) belongs to the orthogonal complement of the kernel of rot in $L_2(\Omega)^3$. On simply connected domains it is equivalent to $\text{div } v = 0$ in the domain and $v \cdot n = 0$ on the boundary where n denotes the unit normal vector.

The exact value of the Friedrichs-Velte constant does not depend on the size of Ω only on its shape. Its value is known only for a few domains, [6,13,17] contain useful estimations for the class of star-shaped domains. Costabel [7] developed a generalization of the Friedrichs-Velte inequality for differential forms which generalization incorporates also the unification of (1) and (4) along with (2) and (3) and it is valid at least in the class of Lipschitz domains.

As observed in [6,13,21] the Friedrichs-Velte inequalities and constants are closely related to the Babuška-Aziz inequality and to the corresponding domain specific constants.

Definition 2.2. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2,3$) supports the Babuška-Aziz inequality for the divergence if there is a positive constant C depending only on the domain Ω such that for every $u \in L_2(\Omega)$ with $u_{\Omega} = 0$ there is a $v \in H_0^1(\Omega)^n$ such that $\text{div } v = u$ and

$$\|v\|_1^2 \leq C \|u\|^2. \quad (5)$$

The least possible constant in (5) is denoted by C_{Ω} and is called the Babuška-Aziz constant for the divergence of the domain. $C_{\Omega} < \infty$ was proved for bounded Lipschitz domains in [3] and was generalized for John domains in [1].

The inequality (5) can be formulated as $\|v\|_1^2 \leq C \|\text{div } v\|^2$ for every function v in the orthogonal complement of the kernel of the divergence in $H_0^1(\Omega)^n$. Similarly there is a Babuška-Aziz inequality for the rotation:

$$\|v\|_1^2 \leq \tilde{C} \|\text{rot } v\|^2 \quad (6)$$

provided v is in the orthogonal complement of the kernel of the rotation in $H_0^1(\Omega)^3$. According to [6,7,21] there also hold

$$C_{\Omega} = 1 + \Gamma_{\Omega} \text{ and } \tilde{C}_{\Omega} = 1 + \tilde{\Gamma}_{\Omega} \quad (7)$$

for any planar or spatial domain the constants being simultaneously finite or infinite.

The third class of inequalities utilized in this paper is the class of the improved Poincaré inequalities.

Definition 2.3. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2,3$) supports the improved Poincaré inequality if there is a positive constant P depending only on the domain Ω and on the exponents α , p and q such that

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L_q(\Omega)}^q \leq P \|d_{\Omega}^{\alpha} \nabla u\|_{L_p(\Omega)}^q \quad (8)$$

holds for every $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ such that $d_{\Omega}^{\alpha} \nabla u \in L_p(\Omega)^n$, where $d_{\Omega}(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ is the distance of $x \in \Omega$ to the boundary.

It was proved in [4] in case $p = q$ for domains whose boundary is locally the graph of a Hölder continuous function of order α and it was generalized in [14] for $0 \leq \alpha \leq 1$, $p(1 - \alpha) < n$ and $p \leq q \leq \frac{np}{n-p(1-\alpha)}$ in a class of domains including John-domains.

In case $\alpha = 0$ and $q = p = 2$ one has the classical Poincaré inequality but in this paper we utilize the case $q = p = 2$ and $\alpha = 1$ in the form

$$\|u - u_\Omega\|^2 \leq P_\Omega \|d_\Omega \nabla u\|^2 \quad (9)$$

wherein the improved Poincaré constant P_Ω of Ω is the least possible positive constant satisfying (9). For bounded simply connected planar domains it was proved in [15] that the domain supports the Babuška-Aziz inequality (5) iff it supports the improved Poincaré inequality (9) and iff Ω is a John domain. For more general domains there are additional properties needed in order to have equivalence between Ω being a John domain and Ω supporting the inequalities (5) and (9), c.f. [15].

Remark 2.4. As proved in [5] for convex domains in arbitrary dimensions the constant P in (8) can be estimated from above by a scalar multiple of the product $\eta(\Omega)^{2\alpha} \text{diam}(\Omega)^{2-2\alpha}$, where $\eta(\Omega)$ and $\text{diam}(\Omega)$ denote the eccentricity and the diameter of Ω , respectively. This estimator is independent of $\text{diam}(\Omega)$ only for $\alpha = 1$ in which case the improved Poincaré constant P_Ω in (9) can be estimated by a scalar multiple (depending only on the dimension n) of $\eta(\Omega)^2$. Hence if one wants to derive a correspondence between the diameter invariant Friedrichs-Velte constant and the improved Poincaré constants then one has to choose $\alpha = 1$ in (8). ■

3. Connections between the constants

In this section, motivated by Theorem 5.1 and Theorem 5.3 in [10], we derive connections between the Friedrichs-Velte and improved Poincaré inequalities and constants.

Lemma 3.1. If the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) supports the improved Poincaré inequality (9) with the constant P_Ω , then it also supports the Friedrichs-Velte inequality (1) with the constant

$$\Gamma_\Omega \leq 4P_\Omega. \quad (10)$$

Proof. Let u and v be conjugate harmonic functions in the sense of (3) on the spatial domain Ω supporting the improved Poincaré inequality. We develop the norm on the right-hand side of (9):

$$\begin{aligned} \|d_\Omega \nabla u\|^2 &= \int_\Omega d_\Omega^2 |\nabla u|^2 = \int_\Omega d_\Omega^2 \nabla u \cdot \text{rot } v = \int_\Omega v \cdot \text{rot}(d_\Omega^2 \nabla u) \\ &= \int_\Omega v \cdot 2d_\Omega \nabla d_\Omega \times \nabla u = \int_\Omega 2d_\Omega \nabla u \cdot (v \times \nabla d_\Omega) \end{aligned}$$

We estimate by the Cauchy-Schwarz inequality and we also use $|\nabla d_\Omega| = 1$ for the boundary distance function of Ω valid a.e. in Ω .

$$\left| \int_\Omega 2d_\Omega \nabla u \cdot (v \times \nabla d_\Omega) \right| \leq 2 \left(\int_\Omega |d_\Omega \nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

There follows

$$\|d_\Omega \nabla u\|^2 \leq 2 \cdot \|v\| \cdot \|d_\Omega \nabla u\|. \quad (12)$$

By the improved Poincaré inequality there follows

$$\|u - u_\Omega\|^2 \leq P_\Omega \|d_\Omega \nabla u\|^2 \leq 4P_\Omega \|v\|^2, \quad (13)$$

which implies (10) for the Friedrichs-Verfe constant Γ_Ω of the domain.

For planar domains the above proof remains valid with minor changes using the Cauchy-Riemann equations (2) instead of (3). ■

Remark 3.2. Theorem 5.1 in [10] formulates a similar result between the Babuška-Aziz constant for the divergence and the improved Poincaré constant for arbitrary dimensional domains, however, with another dimension dependent constant which value is not specified. This reads with the notation of Lemma 3.1

$$\sqrt{1 + \Gamma_\Omega} \leq c_n (1 + \sqrt{P_\Omega}). \quad (14)$$

Although Lemma 3.1 is proved only for planar and spatial domains but we now have an explicit constant in the inequality estimating Γ_Ω by P_Ω from above. ■

Remark 3.3. In the proof of Lemma 3.1 we used $|\nabla d_\Omega| = 1$ for the boundary distance function valid a.e. in Ω . The proof remains valid using instead of d_Ω another weight function w with bounded gradient on Ω , $|\nabla w| \leq c$ and with zero boundary values on $\partial\Omega$ (appropriate solution of the eikonal equation). However, in this case one has to use another weighted Poincaré inequality instead of (8) and one has another constant in (10) instead of 4. ■

Remark 3.4. The constant 4 in (10) can be improved, for example for convex polygons one has more: $\Gamma_\Omega \leq P_\Omega$. In order to prove this we consider first that by [12] every convex polygon has a unique mother body (skeleton) consisting of line segments which are subsets of bisectors of angles between appropriate two sides of the polygon. The convex polygon Ω has a partition along this mother body $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$. We have $|\nabla d_\Omega| = 1$ and $|\Delta d_\Omega| = 0$ in each subpolygon Ω_j hence there follows

$$\Delta(d_\Omega^2) = 2|\nabla d_\Omega|^2 + 2d_\Omega \Delta d_\Omega = 2$$

for the Laplacian of the square of the boundary distance function of Ω in each subpolygon Ω_j . On the boundary of each subpolygon Ω_j we have $\frac{\partial d_\Omega}{\partial n_j} > 0$ because Ω is convex. By partial integration we have on each Ω_j

$$\int_{\Omega_j} |d_\Omega \nabla u|^2 = \int_{\Omega_j} d_\Omega^2 \Delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \int_{\partial\Omega_j} d_\Omega v \left(d_\Omega \frac{\partial v}{\partial n_j} - v \frac{\partial d_\Omega}{\partial n_j} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} v^2 \Delta(d_\Omega^2)$$

for a conjugate harmonic pair $\nabla u = \nabla^\perp v$. Now summing up all these equations some boundary terms cancel out and we obtain

$$\|d_\Omega \nabla u\|^2 = \int_\Omega v^2 - \sum_j \int_{\partial\Omega_j} d_\Omega v^2 \frac{\partial d_\Omega}{\partial n_j}.$$

Using $\frac{\partial d_\Omega}{\partial n_j} > 0$ on the boundaries of the subpolygons, there follows

$$\|d_\Omega \nabla u\|^2 \leq \|v\|^2$$

which gives $\Gamma_\Omega \leq P_\Omega$. ■

Lemma 3.1 says that each domain which supports the improved Poincaré inequality also supports the Friedrichs-Velte inequality.

In order to prove the reverse direction we use

- the equality $C_\Omega = 1 + \Gamma_\Omega$ proved in [6,7] stating the simultaneous finiteness of the Friedrichs-Velte and the Babuška-Aziz constants for a domain Ω without assuming any boundary regularity and
- Theorem 5.3 in [10], in which the finiteness of the improved Poincaré constant was proved assuming the finiteness of the Babuška-Aziz constant C_Ω provided the domain Ω also supports a Hardy type inequality involving the boundary distance function.

Definition 3.5. The bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ supports the Hardy inequality if there is a finite positive constant H depending only on Ω such that

$$\int_\Omega \frac{u^2}{d_\Omega^2} \leq H \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad (15)$$

holds for every $u \in H_0^1(\Omega)$. The Hardy constant H_Ω of the domain is the least positive constant H for which (15) holds.

Lemma 3.6. If the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) supports the Friedrichs-Velte inequality (1) with the constant Γ_Ω and the Hardy inequality (15) with the constant H_Ω , then it also supports the improved Poincaré inequality (8) with the constant

$$P_\Omega \leq H_\Omega(1 + \Gamma_\Omega). \quad (16)$$

Proof. The proof is due to Durán [10], Theorem 5.3, which we reproduce here for the convenience of the reader using the notation of the present paper. Given $u \in H^1(\Omega)$ with zero integral mean $u_\Omega = 0$ let $v \in H_0^1(\Omega)^n$ such that

$$\operatorname{div} v = u \text{ and } \|\nabla v\|^2 \leq C_\Omega \|u\|^2. \quad (17)$$

Using the Hardy inequality (15) there follows

$$\|u\|^2 = \int_\Omega u \operatorname{div} v = - \int_\Omega v \cdot \nabla u \leq \left\| \frac{v}{d_\Omega} \right\| \cdot \|d_\Omega \nabla u\| \leq H_\Omega^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\| \cdot \|d_\Omega \nabla u\|. \quad (18)$$

Using now the Babuška-Aziz inequality there follows

$$\|u\|^2 \leq H_\Omega^{\frac{1}{2}} C_\Omega^{\frac{1}{2}} \|u\| \cdot \|d_\Omega \nabla u\| \quad (19)$$

which gives (16) utilizing $C_\Omega = 1 + \Gamma_\Omega$. ■

Remark 3.7. Lemma 3.6 means that $H_\Omega < \infty$ is sufficient for an estimation of the improved Poincaré constant by the Friedrichs-Velte constant. Example 4.1 in [15] shows that the validity of the Hardy inequality (15) is not necessary for such an estimation. ■

The proofs of Lemma 3.1 and Lemma 3.6 are applicable with minor changes for the other Friedrichs-Velte inequality (4) and for the Babuška-Aziz inequality (6) for the rotation.

Lemma 3.8. If the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ supports the Hardy inequality (15) and the Friedrichs-Velte inequality (4) with the finite constants H_Ω and $\tilde{\Gamma}_\Omega$, respectively, then there is a finite positive constant $\tilde{P}_\Omega$ depending only on Ω such that the inequality

$$\|v\|^2 \leq \tilde{P} \|d_\Omega \operatorname{rot} v\|^2 \quad (20)$$

is valid for every v in the orthogonal complement of the kernel of rot in $L_2(\Omega)^3$. Moreover, we have $\tilde{P}_\Omega \leq H_\Omega(1 + \tilde{\Gamma}_\Omega)$ for the least possible constant $\tilde{P}$ in (20).

Proof. The proof is essentially the same as that of Lemma 3.6. First use $\tilde{C}_\Omega = 1 + \tilde{\Gamma}_\Omega$, see [7,21]. By the Babuška-Aziz inequality for the rotation there exists $w \in H_0^1(\Omega)^3$ such that

$$\operatorname{rot} w = v \text{ and } \|\nabla w\|^2 \leq \tilde{C}_\Omega \|v\|^2. \quad (21)$$

There follows by the Hardy inequality (15)

$$\|v\|^2 = \int_\Omega v \operatorname{rot} w = \int_\Omega w \operatorname{rot} v \leq \left\| \frac{w}{d_\Omega} \right\| \cdot \|d_\Omega \operatorname{rot} v\| \leq H_\Omega^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\| \cdot \|d_\Omega \operatorname{rot} v\|. \quad (22)$$

Substituting now the Babuška-Aziz inequality for the rotation gives

$$\|v\|^2 \leq H_\Omega^{\frac{1}{2}} \tilde{C}_\Omega^{\frac{1}{2}} \|v\| \cdot \|d_\Omega \operatorname{rot} v\|, \quad (23)$$

from which the statement of the lemma follows. ■

Remark 3.9. In the improved Poincaré inequality (9) the function $u - u_\Omega$ belongs to the orthogonal complement of the kernel of the gradient, hence (9) can be also stated as $\|u\|^2 \leq P_\Omega \|d_\Omega \nabla u\|^2$ for every $u \in (\ker \nabla)^\perp$. The previous Lemma 3.8 formulates an analogous inequality for the rotation instead of the gradient, hence (20) can be seen as an improved Poincaré inequality for the rotation. According to [7] we have $\tilde{\Gamma}_\Omega < \infty$ at least for Lipschitz domains, for which the Hardy constant H_Ω is also finite [16], hence (20) is valid for spatial Lipschitz domains. ■

Remark 3.10. In two dimensions we have $\|d_\Omega \nabla u\| = \|d_\Omega \nabla^\perp u\|$, hence the improved Poincaré constant for the vector-curl $\nabla^\perp$ (adjoint of the scalar rotation) coincides with the usual Poincaré constant for the gradient. For planar domains the Friedrichs-Velte constants Γ_Ω and $\tilde{\Gamma}_\Omega$ are equal as well. ■

The counterpart of Lemma 3.1 is the following.

Lemma 3.11. If the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ supports the inequality (20) for every v in the orthogonal complement of the kernel of the rot in $L_2(\Omega)^3$ with the least possible positive constant $\tilde{P}_\Omega$, then it also supports the Friedrichs-Velte inequality (4). Moreover, we have $\tilde{\Gamma}_\Omega \leq 4\tilde{P}_\Omega$.

Proof. The proof is similar to that of Lemma 3.1. Let u and v be conjugate harmonic functions on the spatial domain Ω in the sense of the Moisil-Teodorescu equations (3) normalized such that v lies in the orthogonal complement of the kernel of the rot in $L_2(\Omega)^3$. We develop the norm on the right-hand side of (20) using $|\nabla d_\Omega| = 1$ a.e. in Ω .

$$\begin{aligned} \|d_\Omega \operatorname{rot} v\|^2 &= \int_\Omega d_\Omega^2 |\operatorname{rot} v|^2 = \int_\Omega d_\Omega^2 \nabla u \cdot \operatorname{rot} v = \int_\Omega u \cdot \operatorname{div}(d_\Omega^2 \operatorname{rot} v) \\ &= \int_\Omega u 2d_\Omega \nabla d_\Omega \cdot \operatorname{rot} v \leq 2\|u\| \cdot \|d_\Omega \operatorname{rot} v\| \end{aligned}$$

This implies by (20)

$$\|v\|^2 \leq 4\tilde{P}_\Omega \|u\|^2 \quad (24)$$

which means the Friedrichs-Velte inequality (4) with $\tilde{\Gamma}_\Omega \leq 4\tilde{P}_\Omega$. ■

Remark 3.12. Considering the similarities between the proofs of Lemma 3.6 and Lemma 3.8 and between their reversed counterparts Lemma 3.1 and Lemma 3.11 they could be possibly unified in the framework of [7] provided there is a usable version of the utilized Hardy and improved Poincaré inequalities for differential forms. However, the investigation of this is beyond the scope of the present paper. ■

As a consequence of these lemmata we obtain the following

Theorem 3.13. If the bounded domain Ω supports the Hardy inequality (15), then Ω supports the Friedrichs-Velte (1) and (4) and simultaneously the Babuška-Aziz inequalities (5) and (6) if and only if Ω supports the improved Poincaré inequalities (9) and (20), respectively. Moreover, we have

$$\frac{1}{4}\Gamma_\Omega \leq P_\Omega \leq H_\Omega(1 + \Gamma_\Omega) \text{ and } \frac{1}{4}\tilde{\Gamma}_\Omega \leq \tilde{P}_\Omega \leq H_\Omega(1 + \tilde{\Gamma}_\Omega) \quad (25)$$

for the domain specific constants in the corresponding inequalities. ■

Remark 3.14. Theorem 3.13 opens the possibility to obtain upper estimates for the improved Poincaré constant P_Ω using known exact values or estimates for the corresponding Friedrichs-Velte and the Hardy constants. Such upper estimates for Γ_Ω of a star-shaped planar or spatial domain are given in [6,13,17] which upper estimates depend on the eccentricity of the domain with respect to the center of the star-shapedness. As shown in [5] the Poincaré constant (9) of a convex domain can be estimated by its eccentricity η , i.e. $P_\Omega \leq c\eta^2$ for some positive constant c . According to Theorem 6.2 in [6] and Theorem 3.13 this remains valid for a planar star-shaped domain as well because its Hardy constant is at most 16, see [2].

$$P_\Omega \leq 16(\eta + \sqrt{\eta^2 - 1})^2 \leq 64\eta^2, \quad (26)$$

where $\eta = \frac{R}{r}$ for the domain Ω star-shaped with respect to a disc of radius r and contained in a concentric disc of radius R . ■

Remark 3.15. As one sees the improved Poincaré inequalities imply the corresponding Friedrichs-Velte and Babuška-Aziz inequalities without any condition on the domain, the validity of the Hardy inequality is required only for the reverse implication. Finiteness of the Hardy constant was proved in [16] and [4] for Lipschitz and for Hölder domains, respectively. For upper estimations of the Hardy constant in terms of geometric characteristics of the domain c.f. [9] and the references given there. ■

4. Concluding remarks

The main result of this paper is twofold. First, we proved by estimating the corresponding domain specific constants by each other that planar and spatial domains satisfying the Hardy inequality simultaneously support the Friedrichs-Velte inequality, the Babuška-Aziz inequality for the divergence and the improved Poincaré inequality for the gradient. This enables us to extend the validity of known upper estimates for the Friedrichs-Velte constants for the improved Poincaré constant for the gradient. Second, in the three dimensional case we derived with the same method a novel improved Poincaré inequality for the rotation.

References

- [1] **Acosta G., Durán R. G., Muschietti M. A.**, Solutions of the divergence operator on John domains, *Adv. Math.* 206 (2006) 373-401. doi:10.1016/j.aim.2005.09.004
- [2] **Ancona A.**, On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$, *J. London Math. Soc.* (2) 37 (1986), 274-290. doi:10.1112/jlms/s2-34.2.274
- [3] **Babuška I., Aziz A. K.**, Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations* (edited by A.K. Aziz), Academic Press, New York, 1972.
- [4] **Boas H. B., Straube E. J.**, Integral inequalities of Hardy and Poincare type, *Proc. Amer. Math. Soc.* 103 (1988), 172-176. doi:10.2307/2047547
- [5] **Chua S., Wheeden R. L.**, Weighted Poincaré inequalities on convex domains, *Math. Res. Lett.* 17(5) (2010), 993-1011. doi:10.4310/MRL.2010.v17.n5.a15
- [6] **Costabel M., Dauge M.**, On the inequalities of Babuška-Aziz, Friedrichs and Horgan-Payne, *Arch. Rational Mech. and Anal.* 217 (2015) No 3, 873-898. doi:10.1007/s00205-015-0845-2
- [7] **Costabel M.**, Inequalities of Babuška-Aziz and Friedrichs-Velte for Differential Forms. In: Maz'ya V., Natroshvili D., Shargorodsky E., Wendland W. (eds) *Recent Trends in Operator Theory and Partial Differential Equations. Operator Theory: Advances and Applications*, vol 258. (2017) Birkhäuser, Cham doi:10.1007/978-3-319-47079-5_4
- [8] **Crouzeix M.**, On an operator related to the convergence of Uzawa's algorithm for the Stokes equation. In: *Computational Science for the 21st Century* (J. Périaux et al., eds.). New York: Wiley 1997, 242-249.
- [9] **Davies E. B.**, A review of Hardy inequalities, in: *The Maz'ya Anniversary Collection*, vol. 2, *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol 110 (Birkhäuser, Basel, 1999), 55-67. doi:10.1007/978-3-0348-8672-7_5
- [10] **Durán R.G.**, An elementary proof of the continuity from $L^2_0(\Omega)$ to $H^1_0(\Omega)^n$ of Bogovskii's right inverse of the divergence, *Revista de la Unión Matemática Argentina* 53(2) (2012), 59-78. <http://inmabb.criba.edu.ar/revuma/pdf/v53n2/v53n2a06.pdf>
- [11] **Friedrichs K.**, On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. *Trans. AMS* 41 (1937), 321-364. <https://www.ams.org/journals/tran/1937-041-03/>
- [12] **Gustafsson B.**, On mother bodies of convex polyhedra, *SIAM J. Math. Anal.* 29(5) (1998), 1106-1117. doi:10.1137/S0036141097317918
- [13] **Horgan C. O. and Payne L. E.**, On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz. *Archive Rat.Mech.Anal.* 82 (1983), 165-179. doi:10.1007/BF00250935
- [14] **Hurri-Syrjänen R.**, An improved Poincaré inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* 120(1) (1994), 213-222. doi:10.2307/2160188

- [15] **Jiang R., Kauranen A., Koskela P.**, Solvability of the divergence equation implies John via Poincaré inequality, *Nonlinear Anal.* 101 (2014), 80-88. doi:10.1016/j.na.2014.01.021
- [16] **Nečas J.**, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 16 (1962), 305-326. www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_4_305_0
- [17] **Payne L. E.**, A bound for the optimal constant in an inequality of Ladyzhenskaya and Solonnikov, *IMA Journal of Applied Mathematics* 72 (2007), 563-569. doi:10.1093/imamat/hxm028
- [18] **Shapiro H. S.**, On some Fourier and distribution-theoretic methods in approximation theory, in vol. *Approximation Theory. III, Proc. Conf. held in Austin, Texas, 1980* (W. Cheney et. al., eds.), Academic Press, San Diego (1980), 87-124.
- [19] **Stoyan G.**, Towards discrete Velte decompositions and narrow bounds for inf-sup constants, *Computers & Maths. with Appls.*, 38, 7-8, (1999), 243-261. doi:10.1016/S0898-1221(99)00254-0
- [20] **Stoyan G.**, Iterative Stokes solvers in the harmonic Velte subspace, *Computing* 67 (2000), 13-33. doi:10.1007/s006070170014
- [21] **Velte W.**, On inequalities of Friedrichs and Babuška-Aziz in dimension three, *Journal for Analysis and its Applications*, Vol.17, No.4 (1998), 843-857. doi:10.4171/ZAA/854

A 120-cella és a 600-cella 3-dimenziós reprezentációról

Talata István

Szent István Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,
és Dunaújvárosi Egyetem, Dunaújváros
talata.istvan@ybl.szie.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Bemutatjuk, hogyan lehet megjeleníteni a 120-cella laphálóját a 3-dimenziós euklideszi térnek olyan parkettázásaként, melynek minden eleme konvex poliéder vagy annak komplementere, és a parkettázás cellarendszere a szabályos dodekaéder szimmetriáival rendelkezik. Konstrukciókat mutatunk a 600-cella élgráfjának dodekaédes szimmetriájú 3-dimenziós reprezentációira is. Végezetül összegezzük a szerzőnek a témakörrel kapcsolatos oktatási tapasztalatait.

ABSTRACT. We demonstrate how we can represent the face lattice of the 120-cell as a tiling of the 3-dimensional Euclidean space in which every cell is a convex polyhedron or its complement, and the cell system of the tiling possesses the symmetries of a regular dodecahedron. We construct 3D representations of the edge graph of the 600-cell with dodecahedral symmetry as well. Finally, we sum up the educational experiences of the author in this subject.

1. Bevezetés

Két probléma motiválta a szerzőt ebben a munkában. Egyrészt, mivel a 120-cella és a 600-cella szerkezetét leginkább csak bonyolult ábrák láttatják, ezért jó lenne olyan ábrázolásuk, amely világosan bemutatja a szerkezetüket, mindenféle hosszadalmas leírás nélkül! Másrészt, a 120-cella laphálójának poliéderekből álló térbeli parkettázással való modellezését érdemes lehet-e a felsőoktatásban térgeometriai feladatként feladni?

Idézzük fel a konvex politópok alaptulajdonságait! A d -dimenziós euklideszi térben ($d \geq 0$) k -dimenziós konvex politópnak ($0 \leq k \leq d$) hívunk egy konvex halmazt, ha az előáll, mint véges sok, affin hipersík által határolt zárt féltér metszete, amelynek affin burka egy k -dimenziós affin altér (amely persze tekinthető egy k -dimenziós euklideszi térnek is). Egy d -dimenziós konvex politópnak egy olyan affin hipersíkkal (támaszhipersíkkal) vett metszetét, amely nem tartalmazza a politóp belső pontjait (és így a politóp a hipersík által határolt egyik zárt féltérben helyezkedik el), a poliéder egy lapjának nevezzük (plusz még a politópot magát a politóp d -dimenziós lapjának is tekintjük). Egy d -dimenziós konvex politópnak a valódi lapjai (azaz a legfeljebb $(d - 1)$ -dimenziós lapjai) nála kisebb dimenziós konvex politópok, határa pedig hiperlapjainak (azaz $(d - 1)$ -dimenziós lapjainak) uniója. Egy politóp lehet korlátos vagy nem korlátos. A korlátos konvex politópok megkaphatók, mint véges sok pont (a csúcsaik, azaz a 0-dimenziós lapjaik) konvex burka. A 2-dimenziós korlátos konvex politópokat konvex sokszögnek, a 3-dimenziós konvex politópokat konvex poliédernek hívjuk.

KULCSSZAVAK. Szabályos test, konvex poliéder, parkettázás, szimmetria, geometria oktatás.

KEYWORDS. Regular solid, convex polyhedron, tiling, symmetry, geometry education.

Egy d -dimenziós konvex politóp lapjainak összessége a tartalmazás relációra nézve részben rendezett halmaz, amely egy algebrai háló – ezt a politóp laphálójának hívjuk. A laphálóval ekvivalens hálót kapunk a tartalmazás relációra nézve, ha a különböző dimenziós lapok helyett azok csúcshalmazait vesszük a háló elemeinek.

Egy d -dimenziós konvex politóp 0-dimenziós lapjait csúcsoknak, 1-dimenziós lapjait éleknek, 3-dimenziós lapjait celláknak, $(d - 1)$ -dimenziós lapjait hiperlapoknak hívjuk, ill. a 3-dimenziós konvex poliéderek 2-dimenziós lapjait röviden lapoknak is hívhatjuk. A k -dimenziós lapokra a kD lap elnevezést is használhatjuk. A k -dimenziós politópokra a kD politóp, vagy k -politóp elnevezés is használható. A laphálónak a tartalmazás relációra vett maximális láncai $(d + 1)$ eleműek, 0-dimenziós laptól d -dimenziós lapig bezárólag minden dimenziós lapból tartalmaznak egyet, az előző elem a rákövetkező elem részhalmaza.

A d -dimenziós euklideszi térben szabályos testnek nevezünk egy d -dimenziós konvex politópot, ha az korlátos, minden hiperlapja egy szabályos $(d - 1)$ -dimenziós test, hiperlapjai egybevágók, minden csúcsalakzata egy szabályos $(d - 1)$ -dimenziós test, és csúcsalakzatai egybevágók. (Szabályos test csúcsalakzatán az egy csúcsból kiinduló éleken a csúcstól adott távolságra levő pontok konvex burkát értjük, amikor az a távolság az élék hosszánál kisebb.) Szabályos testek szimmetriacsoportja tranzitívan hat a lapjainak dimenzió szerint növekvő maximális láncain, azaz bármely két ilyen lánchoz létezik olyan egybevágósága a d -dimenziós térnek, melyik az egyik láncot a másikba viszi, és így a testet is önmagára képezi le (tehát ez a testnek egy szimmetriája). Ez utóbbi tulajdonság ekvivalens a szabályos testek definíciójával.

Az euklideszi terekben a szabályos testek (hasonlóság erejéig) a következők:

- síkban a szabályos konvex sokszögek (végtelen sok ilyen van),
- három dimenzióban a szabályos tetraéder, oktaéder, kocka, ikozaéder, és a dodekaéder (5 test),
- négy dimenzióban a szabályos 4-szimplex (5-cella), a 4D kocka (8-cella), a 4D kereszt-politóp (16-cella), a 24-cella, a 120-cella, és a 600-cella (6 test),
- d -dimenziós terekben ($d \geq 5$) csak a szabályos d -szimplex, a d -dimenziós hiperkocka és a d -dimenziós keresztpolitóp a szabályos testek (3 test).

A szabályos testek minden lapja (akárhány dimenziós lapja, pl. hiperlapja, 2D lapja) szabályos test (persze egy kisebb dimenziós térbeli szabályos test). Ha egy 4-dimenziós szabályos testet n -cellának neveznek valamely n számra, akkor ez azt jelenti, hogy n darab hiperlapja (azaz n darab 3-dimenziós lapja) van.

A 4-dimenziós szabályos politópokról pár jellemző:

- a szabályos 4-szimplex (5-cella) cellái tetraéderek, egy csúcsban 4 cella találkozik, egy élre 3 cella illeszkedik (azaz egy élet 3 cella tartalmazza),
- a 4D kocka (8-cella) cellái kockák, egy csúcsban 4 cella találkozik, egy élre 3 cella illeszkedik,
- a 4D keresztpolitóp (16-cella) cellái tetraéderek, egy csúcsban 8 cella találkozik, egy élre 4 cella illeszkedik,
- a 24-cella cellái oktaéderek, egy csúcsban 6 cella találkozik, egy élre 3 cella illeszkedik,
- a 120-cella cellái dodekaéderek, egy csúcsban 4 cella találkozik, egy élre 3 cella illeszkedik,
- a 600-cella cellái tetraéderek, egy csúcsban 20 cella találkozik, egy élre 5 cella illeszkedik.

Megjegyzendő, hogy 4D politópok esetében bármely 2D lapra 2 cella illeszkedik (azaz egy 2D lapot 2 cella tartalmaz).

Mindegyik szabályos testnek van egy duális politópja (pl. a hiperlapközéppontok konvex burka), az is szabályos test. Duális politóp duálisa önmaga (hasonlóság erejéig), így a dualitás szimmetrikus reláció. A szabályos tetraéder duálisa szabályos tetraéder, a kocka duálisa oktaéder. Dodekaéder duálisa ikozaéder. A szabályos 4-szimplex duálisa önmaga, a 4D kocka duálisa 4D keresztpolitóp. A 24-cella duálisa önmaga. A 120-cella duálisa 600-cella. Szabályos d -szimplex duálisa önmaga, a d -dimenziós hiperkocka duálisa d -dimenziós keresztpolitóp.

A következő fejezetben a 120-cella szerkezetét írjuk le részletesebben.

2. A 120-cella

A 4-dimenziós szabályos politópok laphálójait már azok a lokális tulajdonságok is egyértelműen meghatározzák, hogy melyik poliéder laphálójával ekvivalensek a celláinak laphálói, mennyi cellája található egy csúcsban és mennyi cellája illeszkedik egy élre. Azonban ezek csak lokális tulajdonságok, azaz az egy csúcsra illeszkedő, vagy legfeljebb az egy adott cellával legalább egy közös pontot tartalmazó cellák elrendezését lehet egyszerűen meghatározni az előbb említett összefüggésekből, az egész lapháló szerkezetét nem írják le.

Főleg a sok cellából álló szabályos 4D politópok esetében (120-cella, 600-cella) elég komplex a lapháló struktúrája – ezekben az esetekben nem is ismert olyan ábrázolása a laphálónak, vagy akárcsak az élgráfnak (a csúcsokat és az éleket tartalmazó gráfnak), amely egy ábrában, és áttekinthető módon ábrázolja az illeszkedéseket.

A fejezet további részében leírjuk a 120-cella szerkezetének fontosabb jellemzőit.

A 120-cella alaptulajdonságai: 120 szabályos dodekaédercella alkotja, minden csúcsban 4 dodekaéder találkozik, minden élre 3 dodekaéder illeszkedik. 600 csúcsa, 1200 éle és 720 darab 2-dimenziós lapja van.

A 120-cella celláinak családját csoportokba, „rétegekbe” oszthatjuk úgy, hogy egy tetszőleges celláját kiválasztjuk, és a cellák szimmetriaközéppontjainak a távolságait tekintjük a kiválasztott cella szimmetriaközéppontjától. Ekkor az azonos távolságra levő cellaközéppontokhoz tartozó cellák alkotnak egy réteget. A távolságok szerinti növekedő sorrendben indexeljük az egyes rétegeket. 9 réteg adódik.

Egy réteg cellaközéppontjai egy 3-dimenziós konvex poliéder csúcsaira illeszkednek (ezek a 3D poliéderek egymással párhuzamos affin hipersíkokban helyezkednek el, melyek a 120-cellának egy szimmetriatengelyére merőlegesek), kivéve az 1. és 9. réteget, amelyek 1-1 cellából állnak. A rétegek a következőképp jellemezhetők, a cellaközéppontjaik konvex burkával (ld. [1], [3]):

- 1. réteg (1 cella): a kiválasztott cella,
- 2. réteg (12 cella): ikozaéderes elrendezés,
- 3. réteg (20 cella): dodekaéderes elrendezés,
- 4. réteg (12 cella): ikozaéderes elrendezés,
- 5. réteg (30 cella): ikozidodekaéderes elrendezés,
- 6. réteg (12 cella): ikozaéderes elrendezés,
- 7. réteg (20 cella): dodekaéderes elrendezés,
- 8. réteg (12 cella): ikozaéderes elrendezés,
- 9. réteg (1 cella): a kiválasztott cellával átellenes cella.

Tovább pontosítható a rétegek cellaközéppontjainak az elhelyezkedése a következőképp. Jelölje D_0 a kiválasztott dodekaédercellát, I_0 jelölje a D_0 cella lapközéppontjai által meghatározott ikozaédert, F_0 pedig jelölje a D_0 cella élfelezőpontjai által meghatározott ikozidodekaédert (egy dodekaéder élfelezőpontjai pontosan egy ikozidodekaéder csúcsait

adják ki). Ekkor D_0 , I_0 , és F_0 egyaránt a 120-cellának ugyanabban a támaszhipersíkjában vannak a 4-dimenziós euklideszi térben. Legyen f az az egyenes, amely merőleges a támaszhipersíkra és átmegy D_0 szimmetriaközéppontján.

Ekkor a 2., 4., 6. és 8. rétegek mindegyikében a 12 cellaközéppont konvex burka egy olyan ikozaéder, amely középpontosan hasonló képe az I_0 ikozaédernek, az f egyenes egy megfelelő pontját hasonlósági középpontnak választva.

A 3. és 7. rétegek mindegyikében a 20 cellaközéppont konvex burka egy olyan dodekaéder, amely középpontosan hasonló képe a D_0 dodekaédernek, az f egyenes egy megfelelő pontját hasonlósági középpontnak választva.

Az 5. rétegben a 30 cellaközéppont konvex burka pedig egy olyan ikozidodekaéder, amely középpontosan hasonló képe az F_0 ikozidodekaédernek, az f egyenes egy megfelelő pontját hasonlósági középpontnak választva.

Ha a 120-cellának az élgráfját síkban ábrázoljuk úgy, hogy a csúcsokat valamilyen módon (de általános helyzetben) elhelyezzük a síkon, és az éleket csúcspárokat összekötő egyenesszakaszokként ábrázoljuk, akkor a nagyszámú csúcs és él (600 csúcs, 1200 él) miatt eléggé áttekinthetetlen ábrát kapunk, még ha a csúcsokat szimmetrikus módon helyezzük is el, ld. [1]. (Általános helyzetű síkgráfon azt értjük, hogy nem esik egybe két csúcs, és nincs harmadik csúcs két, éllel összekötött csúcs összekötő szakaszán.) A 120-cella egyes ötszöglapjainak az élei olykor meghatározhatók, de a cellák élvázának az alakja általában eléggé átláthatatlan. A duális 600-cellánál (120 csúcs, 720 él) is hasonló a helyzet, nem lehet az élgráfját a síkban úgy ábrázolni, hogy a cellarendszer szerkezetét jól szemléltesse, ld. [2].

A dualitás miatt a 600-cella jellemzését nem szükséges részleteznünk, mert a 120-cella fentebb említett tulajdonságai könnyen átfogalmazhatók a 600-cella tulajdonságaira. A 600-cella számunkra legfontosabb tulajdonságait azért a 4. fejezet elején összefoglaljuk.

3. A 120-cella 3D reprezentációi

A 3-dimenziós térben olyan, konvex poliéderekből vagy azok komplementereiből álló parkettázást szeretnénk előállítani, amelynek a laphálója ekvivalens a 120-cella laphálójával. Megjegyezzük, hogy parkettázáson olyan konvex poliéderekből vagy komplementereiből álló fedését értjük a 3D térnek, amelyben a celláknak páronként nincs közös belső pontjuk, és bármely két poliéder metszete azok egy közös, valahány dimenziós lapja, vagy az üres halmaz. Parkettázás laphálóján pedig a parkettázás elemei és azok lapjai által meghatározott algebrai háló térjük a tartalmazás relációra nézve. Előnyös minél több szimmetriával rendelkező cellarendszert tekintenünk, hogy minél kevesebb különböző alakú cella legyen a parkettázás cellarendszerében, ez az ábrázolás könnyebb áttekinthetőségét is segíti.

Ha a 120-cellát párhuzamos vetítéssel képezzük le egy 3-dimenziós affin alterére, akkor a 120-cella vetületét a celláinak a vetületei kétszeresen fedik: a cellái feloszthatók látható és nem látható cellákra (néhány, a vetítősugárral párhuzamos cella képe elfajuló – azaz 2-dimenziós – lehet). Ezért párhuzamos vetítéssel nem kapunk a 120-cella laphálójából a 3-dimenziós tér konvex poliédereiből álló parkettázást, de azért ilyenkor is kapunk a lapháló egyik felét ábrázoló cellarendszert (ld. [3]), valamint hasonlóan, a duális 600 cella-esetén is kapunk a lapháló egyik felét ábrázoló cellarendszert (ld. [4]).

A 120-cella centrális vetülete esetén, ha a vetítés az egyik cella által kifestett 3-dimenziós hipersíkra történik, és a vetítés centruma elég közel van a cellának egy belső pontjához, akkor az összes többi cella vetülete abba a cellába esik bele. A vetítéskor fixen maradt cellára mondhatjuk, hogy annak képe legyen a cella 3-dimenziós hipersíkjának a külseje, ekkor a 120-cella laphálójával ekvivalens laphálójú, a teret parkettázó cellarendszert kapunk. Egyszerűbben átlátható struktúrát kapunk dodekaéderes szimmetriájú centrális

vetület esetén – ehhez szükséges, hogy a vetítés centruma a szabályos dodekaédercella középpontján átmenő, a dodekaédercellára merőleges egyenesen legyen rajta, így ekkor egyetlen paramétertől függ a vetület alakja. A sok cella miatt lesznek olyan cellák, melynek vetülete már nagyon kicsi a legkülső dodekaédercellához képest, ezért a vetületen a 120-cella egészének a szerkezete nem átlátható.

Sztereografikus projekcióval is ábrázolható a 120-cella: először a körülírt gömbjének a felszínére vetítjük a gömbközepptől a celláit, majd egy gömbfelületi pontból (egy gömbi cella relatív belső pontjából) centrális vetítéssel az átteljes pont gömbi támaszhipersíkjára vetítjük a gömbi cellákat. Ekkor az egyik cella képe nem korlátos tartomány, a cellák vetületei kiadják az egész síkot, de sajnos a cellák képei nem poliéderek, hanem másodrendű felületdarabok által határolt, olykor nem konvex testek.

A következőkben olyan 3D cellarendszereket tekintünk, amelyek általánosítják azt az esetet, amikor dodekaédes szimmetriával rendelkező centrális vetítést alkalmazunk a 120-cellára, és ebből kapjuk a 3-dimenziós térnek egy parkettázását. Ezért a 3-dimenziós euklideszi térnek olyan parkettázásait vizsgáljuk, melyben minden cella egy, a szabályos dodekaéder laphálójával ekvivalens laphálójú konvex poliéder vagy annak komplementere, mindegyik csúcsban 4 cella találkozik és mindegyik élre 3 cella illeszkedik.

Ekkor a cellarendszer laphálója ekvivalens a 120-cella laphálójával, a cellarendszer szimmetriaközéppontját (jelöljük ez O -val) tartalmazó cellához (továbbiakban: központi cellához, a 2. fejezet D_0 jelölését használva rá) viszonyítva a cellákat, 9 rétegre bomlik fel a 3D cellarendszer, aszerint, hogy a celláknak megfeleltethető 120-cellabeli hiperlap melyik rétegbe tartozik a központi cella hiperlapjához viszonyítva. A szimmetria miatt az egyes rétegekben a cellák egymással egybevágnak.

A 2-8. réteg cellái olyan szimmetriákkal rendelkeznek, melyek egy dodekaédert fixen hagynak, és melyek ezen felül a dodekaéder egy lapját, vagy csúcsát, ill. élet is fixen hagyják. Tehát ezek a szimmetriák egy síkbeli alakzatot önmagába visznek, és a sík féltéreit fixen hagyják, a következőképp:

- az 1. réteg egy szabályos dodekaéder,
- a 2., 4., 6., és 8. réteg cellái egy szabályos ötszög szimmetriáival rendelkeznek,
- a 3. és 7. réteg cellái egy szabályos háromszög szimmetriáival rendelkeznek,
- az 5. réteg cellái egy síkba ágyazott szakasz szimmetriáival (tehát pl. egy nem egyenlő oldalú téglalap szimmetriáival) rendelkeznek,
- a 9. réteg egy szabályos dodekaéder külseje.

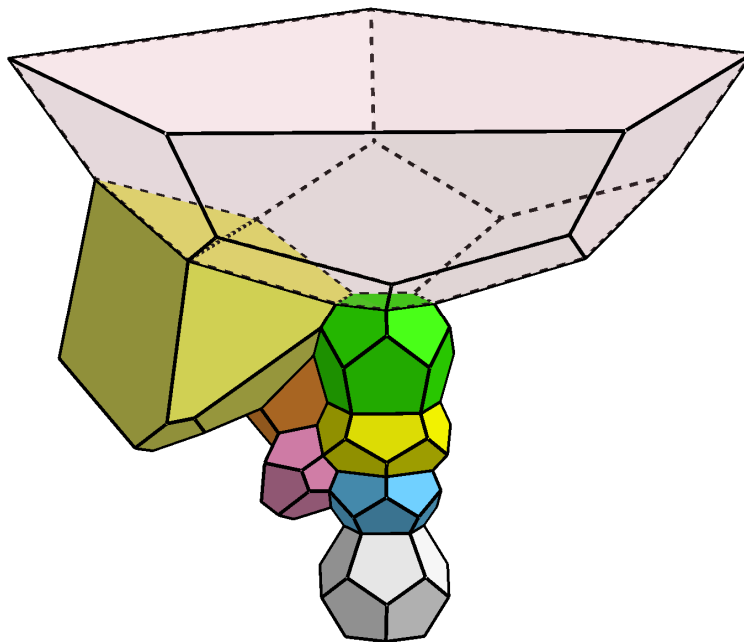
Az ötszöges, háromszöges és téglalap szimmetriájú, dodekaéderrel ekvivalens laphálójú konvex poliéderek alakját (egybevágnóság erejéig) befolyásoló független paraméterek számát megkapjuk, ha egy ilyen poliéder lapsíkjainak a szimmetriatengellyel bezárt szögeit, valamint ezen síkoknak a tengely egyik végpontjától vett távolságait tekintjük, és az egymástól független, nem konstans szögek, ill. távolságok maximális számát vesszük. (Szimmetriatengelyen azt a szakaszt értjük, amely a poliéder olyan szimmetriáinak a fixpontjaiból áll, melyek az adott síkidom – szabályos ötszög, szabályos háromszög, téglalap – síkjának a féltéreit fixen hagyják.) Így adódik, hogy ötszöges szimmetriájú poliéder esetében 5, háromszöges szimmetriájú poliéder esetében 7, téglalap szimmetriájú poliéder esetében 9 független paramétertől függ a cella alakja (csak a szimmetriafeltételt és a dodekaéderrel ekvivalens laphálót megkövetelve a konvex poliédertől – így azt, hogy ez a poliéder egy térbeli parkettázás egyik rétegének az eleme legyen, még nem vettük figyelembe).

A cellaparkettázás feltétele az egyes cellák konstrukcióinál a fentebbi szabadsági fokokat csökkenti. Ha ugyanis az 1. réteg D_0 szabályos dodekaéderét fixnek tekintjük, és a 2-8. rétegek poliédereit egymás után, a rétegek növekvő indexei alapján készítjük el, akkor az egyes rétegek celláinak a konstrukcióikor figyelembe kell venni a korábban elkészített

rétegekkel közös lapokat, és hogy az egyes rétegeken belül a cellák sokszor közös lapokkal rendelkeznek. Így a cellaparkettázásra összesen 13 szabad paraméter adódik úgy, hogy a 2., 3. és 5. rétegnek 3 szabadsági foka van, a 4., 6., 7. és 8. rétegnek 1 szabadsági foka van. Persze a síklapok tengellyel bezárt szögei és tengely végpontjától vett távolságai helyett más paraméterek is használhatók, pl. a cellák élhosszai, oldallapjainak szögei közül a megfelelően kiválasztott mennyiségek Attól, hogy egy mennyiség szabad paraméter, még vannak rá korlátozó feltételek, és a többi paraméter értékétől is függ, hogy milyen intervallumon vagy intervallumokon választható meg úgy az értéke, hogy a kívánt tulajdonságú konvex poliédercellát kapjuk.

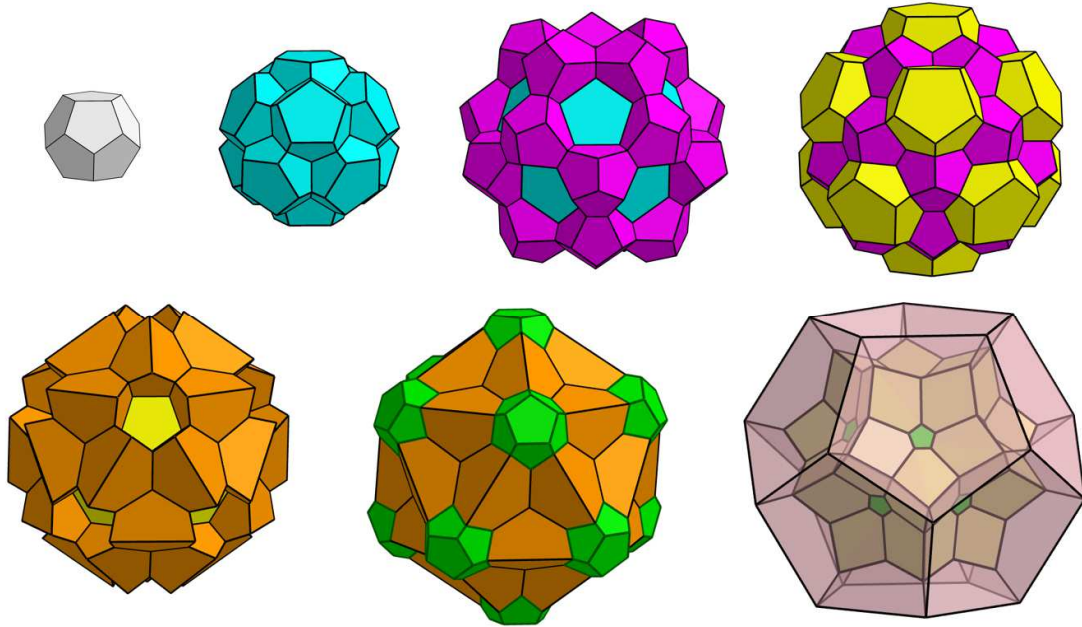
Amennyiben az ötszöges szimmetriájú cellákat, azaz a 2., 4., 6. és 8. rétegek poliédereit készítjük el először, azokhoz is 13 szabad paraméter rendelhető, így ekkor a 3., 5. és 7. rétegek poliéderei már egyértelműen adóttak. A 2., 4., 6. és 8. rétegek összes cellája (48 darab) lefog a 120-cella 600 csúcsa közül 560-at, a maradék 40 csúcs közül 20 darab a 3. és 5. rétegek celláira, 20 darab pedig az 5. és 7. rétegek celláira illeszkedik. Az 1. ábrán láthatók az 1-8. réteg poliédercellái – a szabad paraméterek variálásával persze másféle alakú cellák is kaphatók. A 2. ábrán mutatjuk be a modellezési fázisokat, amikor az egyes rétegeket egymás után, indexeik szerint növekvő sorrendben adjuk hozzá a cellarendszerhez (az utolsó fázisban a 7. és 8. réteget egyszerre adtuk hozzá a cellarendszerhez, mert a 8. réteg áttetszősége miatt a 7. réteg is jól látszik ilyenkor).

Egy geometriai feltétel is adható a cellákra: ha a 2., 4., 6. és 8. rétegek ötszöges szimmetriájú poliédereit elkészítjük úgy, hogy közös lapjaik legyenek a 2. és 4., a 4. és 6., valamint a 6. és 8. rétegek poliédereinek, akkor azok egy olyan végtelen gúlában kell, hogy elhelyezkedjenek, melynek csúcsa a dodekaéderes szimmetria O középpontja, és a gúlát az 1. réteg D_0 szabályos dodekaéderének az egyik ötszöglapja feszíti ki. A 2. és 8. réteg poliédereinek is vannak lapjaik (5-5 darab) a végtelen gúla határán, így lesz a D_0 központi cella éleinél, valamint a 9. réteg dodekaéder éleinél a cellarendszer parkettázás (azaz így lesz ott hézagmentes a cellaelrendezés).



1. ábra. Az 1-8. réteg konvex poliéderei a 120-cella dodekaéderes szimmetriájú 3D reprezentációjában

Érdekes lenne megvizsgálni, hogy a 3., 5. és 7. rétegek poliédereinek az alakja hogyan változik a 2., 4., 6. és 8. rétegek ötszöges szimmetriájú poliédereinek az alakja függvényében. De még az sem világos, hogy milyen mérőszámokkal (pl. térfogat, beírt gömb sugara, köré írt gömb sugara, szimmetriatengelyek hossza valamelyikével, vagy más mennyiségekkel) lenne érdemes jellemezni a poliédercellák alakját, hogy ilyen összefüggéseket kapjunk.



2. ábra. A 120-cella dodekaédes szimmetriájú 3D reprezentációjának felépítése az egyes rétegek indexeik szerinti növekvő sorrendben történő hozzáadása után

4. A 600-cella élgráfjának a 3D reprezentációi

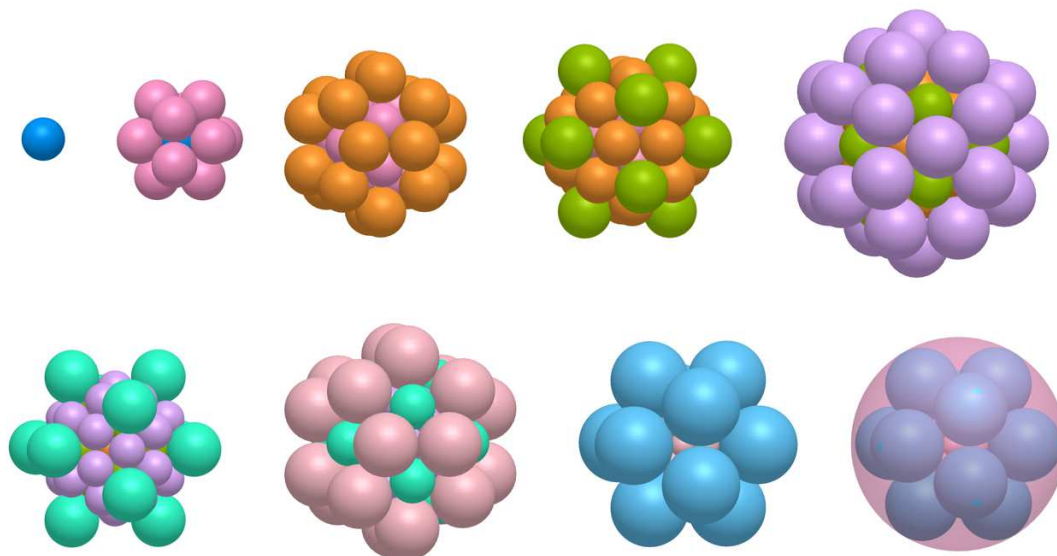
Ebben a fejezetben a 600-cella élgráfjának két 3D reprezentációját is megadjuk.

Mivel a 600-cella a 120-cella duálisa, ezért a 600-cella absztrakt élgráfja megkapható egy olyan gráfként, melynek csúcsai a 120-cella celláinak felelnek meg, két csúcs pedig akkor van összekötve éllel, ha a 120-cellában a nekik megfeleltetett celláiknak közös 2D lapjuk van. A 600-cella absztrakt laphálójának a további elemei, a 2D lapoknak és celláknak megfelelő laphálóelemek pedig azon csúcshármasok, ill. csúcsnégyesek, melyek eseteiben bármely két csúcs éllel van összekötve az élgráfban.

Ha a 120-cella szabályos dodekaéder hiperlapjainak középpontjait gömbközepponthoknak vesszük a 4-dimenziós euklideszi térben, olyan maximális gömbsugarakat használva, hogy gömbpakolást kapjunk, akkor a 120 gömb mindegyikének 12 szomszédja lesz (azaz 12 másik gömb érint egy gömböt a maradék 119 gömbből) a 4-dimenziós euklideszi térben (két gömb pontosan akkor lesz érintő, ha a gömbközepponthok celláinak van egy közös 2-dimenziós lapja, az érintési pontok a cellaközepponthok által meghatározott 600-cella élfelező pontjaiban lesznek).

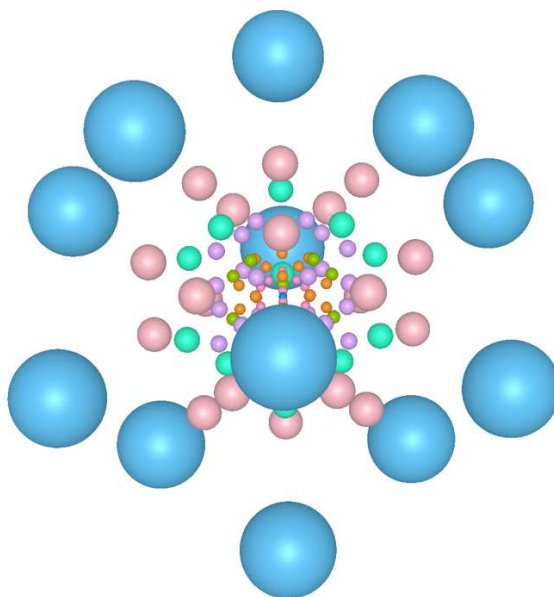
Ekkor a gömbök érintési pontjai egy F gömbfelületen helyezkednek el, és azt a 120 gömb mindegyike merőlegesen metszi. Alkalmazzunk egy olyan inverziót, melynek a középpontja az egyik gömb középpontjának az F gömbfelület középpontából az F gömbfelületre történő vetítéssel kapható meg! Ekkor 120 olyan gömböt kapunk, melyek középpontjai egy hipersíkon fekszenek, mellyel lemetszve a gömböket, egy 3D gömbelrendezést kapunk

dodekaédes szimmetriával. Ebben minden gömbnek 12 szomszédja van, egy gömb tartalmazza az összes többit, a maradék 119 gömb pedig gömbpakolást alkot – az egymást érintő gömbök érintési síkjai cellarendszert határoznak meg, a cellarendszer dodekaédes szimmetriával rendelkezik. Mind a 119 korlátos cella beírt gömbje a gömbpakolás eleme.



3. ábra. A 600-cella dodekaédes szimmetriájú 3D gömbelhelyezésként történő reprezentációjának felépítése az egyes rétegek indexeik szerinti növekvő sorrendben történő hozzáadása után

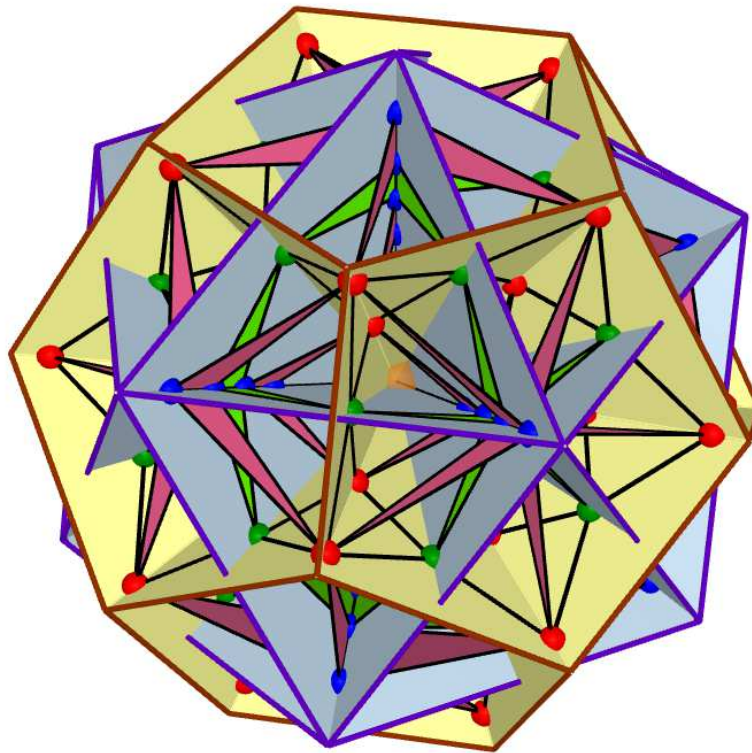
Ezért a 120 darab 3D gömb 9 különböző sugarú gömbből áll, az egyforma sugarú gömbök egy-egy rétegben helyezkednek el, 9 rétegre osztva fel a gömbelhelyezést (ld. 3. és 4. ábra). Ez a gömbelhelyezés a 600-cella élgráfjával ekvivalens: a gömböknek feleltethetők meg a 600-cella csúcsai, az éleknek pedig a gömbök páronkénti érintési pontjai (amelyek két-két gömbre illeszkednek).



4 ábra. Azonos arányban lekicsinyített gömbök a 600-cella dodekaédes szimmetriájú 3D gömbelhelyezésként történő reprezentációjából

Az általunk készített modellben közvetlenül a 600-cella csúcsainak a 4-dimenziós koordinátáiból számítottuk ki a 3D gömbök középpontjait és sugarait, inverziót és merőleges vetítést alkalmazva – ugyanis így egyszerűbb elkészíteni a gömböket, mint közvetlenül a 3D gömbkonfiguráció érintési tulajdonságai alapján rétegenként megszerkesztteni a gömböket (mivel ilyenkor több réteg gömbjeinél is szükséges 3D inverzió alkalmazása a szerkesztésekhez).

A következőkben a 600-cella élgráfjának egyetlen ábrában történő, átlátható vizualizációját adjuk meg. Ehhez érdemes a 120-cella dodekaéderes szimmetriájú 3D reprezentációjának a duálisát elkészíteni: a 600-cella élgráfjának a 3D reprezentációjában a 600-cella csúcsaihoz 3-dimenziós térbeli csúcsok tartozzanak, és a csúcshalmaz dodekaéderes szimmetriájú legyen. Ekkor a gráf csúcsai ikozaéderek, dodekaéderek, és egy ikozidodekaéder csúcsaiban helyezkednek el (kivéve az 1. és 9. osztály egyelemű halmazait). A csúcsokat 9 osztályba sorolhatjuk (ld. [2], [4]): az 1. osztály egypontú – a dodekaéderes szimmetria középpontja, a 2., 4., 6. és 8. osztály csúcsainak a konvex burka ikozaéder, a 3. és 7. osztály csúcsainak konvex burka dodekaéder, az 5. osztály csúcsainak konvex burka ikozidodekaéder, a 9. osztály egyelemű, ez a végtelen távoli pont (a 3-dimenziós euklideszi teret jelen esetben egy végtelen távoli ponttal kibővített, ezáltal kompaktifikált euklideszi térnek kell tekintenünk – a dodekaéderes szimmetria következtében a 600-cellának a szimmetriaközépponthoz tartozó csúcsával átellenes csúcsát a 3D térben már nem tudjuk reprezentálni).



5. ábra. A 600-cella élgráfjának 3D reprezentációja takaró lapokkal

Az egyes csúcsok iránya a szimmetria egy fixen hagyott dodekaédere által meghatározott lapközepponatok, csúcsok, ill. élfelezőponatok irányába kell, hogy essen, így hasonlóság erejéig összesen 6 szabadsági foka van a 3D reprezentáció csúcshalmazának (mivel ekkor a csúcsok 1. és 2. osztályának halmaza adottnak tekinthető).

Megfelelő 2D síkidomok berajzolásával (a szimmetriaközéppontból dodekaéder-élekig, ill. ikozaéder-élekig terjedő sárga, valamint világoskék háromszöglapokkal) segítjük a vizualizációt: a létrejövő takarások miatt nem lesz kusza az ábrázolás, és a szimmetriák hangsúlyozása is megtörténik ezáltal. Ezek a háromszöglapok tehát nem a 600-cella lapjai, az oldalaik sem a 600-cella élei.

A 600-cella 2D lapjainak összességét nem ábrázoljuk, csak megjegyezzük, hogy pontosan a háromszögekhez (azaz azon csúcshármasokhoz, melyekben bármely két csúcs között van él) tartozik 2D lap, valamint, hogy azon csúcsnégyesekhez, melyekben bármely két csúcs között van él, 3D cellák tartoznak.

A 600-cellának az 5. ábrán látható 3D reprezentációjában a narancssárga csúcs az 1. osztály csúcsa (a szimmetriaközéppont), a kék csúcsok a 2., 4., 6. és 8. osztály csúcsai (a szimmetriaközéppontból kifelé növekvő indexszel), a vörös csúcsok a 3. és 7. osztály csúcsai (szintén kifelé növekvő indexszel), a zöld csúcsok pedig az 5. osztály csúcsai (a 9. osztály csúcsa a végtelen távoli pont, nincs ábrázolva). Az egyes osztályok csúcsai egyforma távolságra vannak a szimmetriaközépponttól.

Az egyes osztályokon belüli élek a konvex burok élei, azaz a kék legközelebbi és legtávolabbi csúcsok (2. és 8. réteg csúcsai) esetén ikozaéder-élek, a vörös csúcsok esetén dodekaéder-élek, és a zöld csúcsok esetén ikozidodekaéder-élek tartoznak az élgráfhoz. Ezen élek nincsenek megjelenítve az 5. ábrán (hogy az ábra ne legyen átláthatatlan), de a világoskék, és sárga takarólapok tartalmazzák a dodekaéder-éleket, ill. az ikozaéder-éleket, és ezeknek a lapoknak a lila, ill. barna külső élei épp ilyen élhálózatokat adnak ki, csak a szimmetriaközéppontból kinagyítottan (de az ikozidodekaéder-élekre ez nem mondható el).

A szimmetriaközéppontból kiinduló, sugárirányban elhelyezkedő egymás utáni kék csúcsok élekkel vannak összekötve (ezek szerepelnek az ábrán), sőt a legbelső kék csúcsokat élek kötik össze a szimmetriaközéppontbeli csúcscsal. A sárga háromszöglapokon élek kötik össze a zöld csúcsot 4 vörös csúcscsal (ez szerepel az ábrán). Két egymás utáni kék csúcsot a szimmetriaközépponttól való távolságra nézve közöttük elhelyezkedő, hozzájuk legközelebbi sárga lapokon található csúcsokkal élek kötik össze, azaz a 2. és 4. osztály kék csúcsai és a 3. osztály vörös csúcsai, a 4. és 6. osztály kék csúcsai és az 5. osztály zöld csúcsai, valamint a 6. és 8. osztály kék csúcsai és a 7. osztály vörös csúcsai élekkel vannak összekötve ezekben az esetekben, ezeket az éleket vörös, ill. zöld háromszöglapok éleiként ábrázoltuk (ezek a 2D lapok különben ténylegesen a 600-cella 2D lapjai). Ami még hiányzik az ábráról: a 9. osztály végtelen távoli pontban levő csúcsát él köti össze a 8. osztály minden csúcsával.

5. Oktatási tapasztalat

A SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon oktatott „Számítógépes térgeometriai modellezés” kurzus egyik témaköre a poliéderek modellezése. A tapasztalatok alapján a hallgatóknak megfelelő ismereteik vannak az alaptestekről (hasáb, gúla) és a szabályos testekről. De további konvex és nem konvex poliéderekről, vagy azok tulajdonságairól az ismereteik elég hiányosak. A konvex poliéderek dualitását csak szabályos poliéderek esetében értik jól, már az archimédeszi poliéderek esetében is nehézséget okoz számukra a duális poliéder konstrukciójának a megértése.

A 120-cella 3D reprezentációja olyan feladatnak bizonyult, mely elég nagy kihívás volt a hallgatóknak, de a térbeli szerkesztési lépésekre bontott feladat már megoldható volt számukra. A 600-cella élgráfjának 3D reprezentációját a 12-szomszédos gömbpakolással a hallgatók nagyon élvezték és látványosnak találták, itt az egyszerűség kedvéért a gömbközepppontok koordinátáit egy szöveges fájlban megkapták (a koordináták GeoGebrával

lettek kiszámítva) és AutoCAD script fájlt készítettek, melynek futtatásakor készült el a gömbpakolás.

A kurzuson a 3D poliéderek modellezéséhez Cabri 3D, GeoGebra, és AutoCAD szoftvereket használunk. Geometriai módszerekkel szerkesztjük a poliédereket. A 120-cella modellezéséhez a Cabri 3D szoftvert használták legszívesebben a hallgatók, de volt, aki AutoCAD-ben szívesebben modellezte a cellákat, korábbi AutoCAD-es modellezési tapasztalatai miatt. A GeoGebrát túlságosan matematikai szintaktikát használónak találták ennek a feladatnak a megoldásához, így kissé nehézkesen tudták alkalmazni, de mivel megfelelő előkészületek után a GeoGebrában a Sorozat paranccsal nagyon látványosan megsokszorozhatók a cellák, ezért a 120-cella GeoGebrában történő modellezése is nagyon érdekelte a hallgatókat.

A cellák elkészítéséhez felhasználtuk a szimmetriákat és az alkalmazható geometriai transzformációkat. Mindez hozzásegítette a hallgatókat, hogy jobban megértsék a poliéderek kombinatorikus és metrikus tulajdonságait, és fejlődjön a térlátásuk.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak, hogy erről a témakörrel előadhattam Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2018-as programjában.

Irodalomjegyzék

- [1] 120-cell, Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/120-cell>
- [2] 600-cell, Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/600-cell>
- [3] The 120-Cell, Eusebeia, <http://eusebeia.dyndns.org/4d/120-cell>
- [4] The 600-Cell, Eusebeia, <http://eusebeia.dyndns.org/4d/600-cell>

Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről

Péntek Kálmán

ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Hamilton 1843-ban dolgozta ki a valós kvaterniók algebráját, amely lehetőséget nyújt térgeometriai problémák vizsgálatára. Dickson 1912-ben bevezette a test feletti általánosított kvaternió algebrák fogalmát. Ezek struktúráit vizsgálva bevezetjük a szimmetrikus általánosított kvaternió algebrákat és megvizsgáljuk e struktúrák egy érdekes típusát.

ABSTRACT. Hamilton worked out the real quaternion algebra theory in 1843, that enables us to examine problems of spatial geometry. Dickson introduced the generalised quaternion algebras over local fields. Based on their structures, we introduce the symmetrical generalised quaternion algebras and examine an interesting type of them.

1. Bevezetés

A klasszikus komplex számok algebrájának rendezett valós számpárokból történő felépítését 1833-ban publikálta Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus, fizikus és csillagász. Mivel a komplex számok eredményesen használhatók síkgeometriai problémák megoldására, ezért Hamilton a térgeometriai problémák analóg kezelésére a rendezett valós számhármassok algebrájának megalkotását tűzte ki célul. 1843-ban ismerte fel, hogy rendezett valós számhármassok helyett rendezett valós számnégyesekkel érhet célt és megalkotta a valós kvaterniók algebráját. A kvaterniókhoz sokban hasonló split kvaterniók struktúráját 1849-ben az angol Sir James Cockle (1819-1895) dolgozta ki. (HAMILTON 1834, 1844)

Leonard Eugene Dickson (1874-1954) 1912-ben bevezette a test feletti általánosított kvaternió algebra fogalmát és 1919-ben megalkotta a később Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásnak nevezett módszert, amellyel Hamilton-féle kvaterniókból kiindulva felépítette a Cayley-féle oktoniók struktúráját. (ROSENFELD 1997, WARD 1997)

Ebben a dolgozatban a Cayley-Dickson-féle eljárás egy általánosítását alkalmazva a valós számok $\mathbb{R}$ struktúrájából elindulva először az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ struktúráját, ebből pedig ezután az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúráját építjük fel.

2. Az általánosított komplex számok

Jelölje $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok testét és értelmezzünk műveleteket az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

KULCSSZAVAK. Általánosított komplex számok, általánosított kvaterniók, hiperkomplex számok, Cayley-Dickson eljárás

KEYWORDS. Generalized Complex Numbers, Generalized Quaternions, Hypercomplex Numbers, Cayley-Dickson Process.

direktszorzatban az alábbi módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (a, b) := (r \cdot a, r \cdot b), \quad (1)$$

$$\text{összeadás: } (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (2)$$

$$\text{szorzás: } (a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - \alpha \cdot b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c), \quad (3)$$

ahol $r \in \mathbb{R}$, $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőlegesen, továbbá $\alpha \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter.

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk, hogy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ az (1), (2) és (3) műveletekkel egy 2-dimenziós kommutatív, asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett. E struktúra összeadási neutrális eleme a $\mathbf{0} := (0, 0)$, szorzási neutrális eleme az $\mathbf{1} := (1, 0)$, továbbá mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az $\mathbf{1} := (1, 0)$ és az $\mathbf{i} := (0, 1)$ egy természetes bázist alkot.

Az $S := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazról könnyen beláthatjuk, hogy zárt az (1), (2) és (3) műveletekre, továbbá az $f : \mathbb{R} \rightarrow S, a \mapsto (a, 0)$ leképezésről megmutathatjuk, hogy egy algebra-izomorfizmus, amelynek alapján az $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \mapsto (a, 0)$ algebra-monomorfizmussal $\mathbb{R}$ beleágyazható az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ algebraiba.

A beágyazás eredményeként nyert struktúrát az *általánosított komplex számok* algebrájának nevezzük és a $\mathbb{C}_\alpha$ szimbólummal jelöljük. Speciálisan, ha $\alpha = 1$, akkor a klasszikus Gauss-féle komplex számok $\mathbb{C}$, ha $\alpha = 0$, akkor a duális komplex számok $\mathbb{C}^0$, s ha $\alpha = -1$, akkor a split komplex számok $\mathbb{C}'$ algebrájához juthatunk el. Bizonyítható, hogy minden $\mathbb{R}$ feletti 2-dimenziós asszociatív algebra izomorf az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter 1, 0, vagy -1 értékéhez tartozó $\mathbb{C}_\alpha$ struktúra valamelyikével.

Az $\mathbf{i} = (0, 1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elemről megmutatható, hogy (a) $\mathbf{i}^2 = -\alpha$, (b) $(0, b) = b \cdot \mathbf{i}$, (c) minden $(a, b) \in \mathbb{C}_\alpha$ felírható $a + b \cdot \mathbf{i}$ alakban, amelyet az általánosított komplex szám *algebrai alakjának* nevezünk. Az általánosított komplex számok algebrai alakjával a következő számolási szabályok szerint dolgozhatunk:

$$r \cdot (a + b \cdot \mathbf{i}) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot \mathbf{i}, \quad (4)$$

$$(a + b \cdot \mathbf{i}) + (c + d \cdot \mathbf{i}) = (a + c) + (b + d) \cdot \mathbf{i}, \quad (5)$$

$$(a + b \cdot \mathbf{i}) \cdot (c + d \cdot \mathbf{i}) = (a \cdot c - \alpha \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \mathbf{i}, \quad (6)$$

ahol $r \in \mathbb{R}$ és $a + b \cdot \mathbf{i}, c + d \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ tetszőleges elemek.

A $z = a + b \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ *konjugáltján* a $\bar{z} = a - b \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ számot értjük. A konjugálást az alábbi tulajdonságok jellemzik: (a) $\bar{\bar{z}} = z$ involutív, (b) $\overline{r \cdot z} = r \cdot \bar{z}$ homogén, (c) $\overline{z + t} = \bar{z} + \bar{t}$ additív, (d) $\overline{z \cdot t} = \bar{z} \cdot \bar{t}$ multiplikatív, (e) $z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a^2 + \alpha \cdot b^2 \in \mathbb{R}$ teljesül, ahol $r \in \mathbb{R}, z, t \in \mathbb{C}_\alpha$.

A $z = a + b \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ *normáján* az $N(z) := z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ valós számot értjük, amelyre teljesülnek a következő összefüggések: (a) minden $z, t \in \mathbb{C}_\alpha$ esetén $N(z \cdot t) = N(z) \cdot N(t)$, (b) a $z \in \mathbb{C}_\alpha$ invertálható akkor és csakis akkor, ha $N(z) \neq 0$, (c) ha $z, t \in \mathbb{C}_\alpha$ invertálható elemek, akkor a $z \cdot t \in \mathbb{C}_\alpha$ is invertálható és $(z \cdot t)^{-1} = z^{-1} \cdot t^{-1}$.

A $z = a + b \cdot \mathbf{i}, t = c + d \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ elempár *skaláris szorzatán* a $\langle z, t \rangle := a \cdot c + \alpha \cdot b \cdot d$ valós számot értjük. A skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyből a norma az $N(z) = \langle z, z \rangle$ alapján származtatható.

A $z = a + b \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számok reprezentálhatók az

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad (7)$$

alakú másodrendű négyzetes mátrixok $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ halmazával, mert a

$$g : \mathbb{C}_\alpha \rightarrow M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a + b \cdot \mathbf{i} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \quad (8)$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, továbbá érvényes az

$$N(z) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \quad (9)$$

összefüggés.

3. Az általánosított kvaterniók

Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ 2-dimenziós kommutatív és asszociatív algebrájából kiindulva a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha := \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\alpha\}$ direktszorzatban műveleteket értelmezünk az alábbi módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (z_1, z_2) := (r \cdot z_1, r \cdot z_2), \quad (10)$$

$$\text{összeadás: } (z_1, z_2) + (w_1, w_2) := (z_1 + w_1, z_2 + w_2), \quad (11)$$

$$\text{szorzás: } (z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := (z_1 \cdot w_1 - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}, z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1}), \quad (12)$$

ahol $r \in \mathbb{R}$, $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ tetszőlegesek, továbbá $\beta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter.

Egyszerű, bár hosszadalmas számítással beláthatjuk, $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ a (10), (11) és (12) műveletekkel egy 4-dimenziós, nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett. E struktúrában az összeadás neutrális eleme a $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0 + 0 \cdot \mathbf{i}, 0 + 0 \cdot \mathbf{i})$, a szorzás neutrális eleme $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = (1 + 0 \cdot \mathbf{i}, 0 + 0 \cdot \mathbf{i})$, továbbá mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}, \mathbf{0}) &= (1 + 0 \cdot \mathbf{i}, 0 + 0 \cdot \mathbf{i}), & (\mathbf{i}, \mathbf{0}) &= (0 + 1 \cdot \mathbf{i}, 0 + 0 \cdot \mathbf{i}), \\ \mathbf{j} := (\mathbf{0}, \mathbf{1}) &= (0 + 0 \cdot \mathbf{i}, 1 + 0 \cdot \mathbf{i}), & (\mathbf{0}, \mathbf{i}) &= (0 + 0 \cdot \mathbf{i}, 0 + 1 \cdot \mathbf{i}). \end{aligned}$$

elemek egy természetes bázist alkotnak.

A $T := \{(z_1, \mathbf{0}) : z_1 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subseteq \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ halmaz zárt a (10), (11) és (12) műveletekre, az $F : \mathbb{C}_\alpha \rightarrow T, z_1 \mapsto (z_1, \mathbf{0})$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, ez alapján az $F^* : \mathbb{C}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha, z_1 \mapsto (z_1, \mathbf{0})$ egy algebra-monomorfizmus, amellyel a $\mathbb{C}_\alpha$ beleágyazható a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrába.

A beágyazás eredményeként nyert struktúrát a továbbiakban *általánosított kvaterniók algebrájának* nevezzük és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelöljük. Speciálisan, ha $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ akkor a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$, ha $(\alpha, \beta) = (1, -1)$, akkor a split kvaterniók $\mathbb{H}'$, ha $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, a szemi kvaterniók $\mathbb{H}^\circ$, ha $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$, akkor a split szemi kvaterniók $\mathbb{H}'^\circ$, végül ha $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, akkor a kvázi kvaterniók $\mathbb{H}^{\circ\circ}$ algebráját kapjuk.

A $\mathbf{j} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemről megmutatható, hogy (a) $\mathbf{j}^2 = -\beta$, (b) $(0, z_2) = z_2 \cdot \mathbf{j}$, (c) minden $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ felírható $z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j}$ alakban, amelyet az általánosított kvaternió *komplex algebrai alakjának* nevezzük. Az általánosított kvaterniók komplex algebrai alakjával a következő szabályok szerint dolgozhatunk:

$$r \cdot (z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j}) = (r \cdot z_1) + (r \cdot z_2) \cdot \mathbf{j} \quad (13)$$

$$(z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j}) + (w_1 + w_2 \cdot \mathbf{j}) = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) \cdot \mathbf{j} \quad (14)$$

$$(z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j}) \cdot (w_1 + w_2 \cdot \mathbf{j}) = (z_1 \cdot w_1 - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}) + (z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1}) \cdot \mathbf{j} \quad (15)$$

Megmutatható, hogy ha $w_1 \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor érvényes a

$$\mathbf{j} \cdot w_1 = \overline{w_1} \cdot \mathbf{j} \quad (16)$$

összefüggés, amelynek speciális eseteként

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \quad (17)$$

adódik.

Ha $z_1 = a + b \cdot \mathbf{i}, z_2 = c + d \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a q általánosított kvaternió felírható a $q = a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ alakban, s bevezetve a $\mathbf{k} := \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ jelölést minden $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ előállítható a

$$q = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \quad (18)$$

alakban, amelyet az általánosított kvaternió valós algebrai alakjának hívjuk, az $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemeket pedig általánosított kvaternióegységeknek nevezzük.

A kvaternióegységek Cayley-féle szorzótáblája:

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\alpha$	$\mathbf{k}$	$-\alpha \cdot \mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\beta$	$\beta \cdot \mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\alpha \cdot \mathbf{j}$	$-\beta \cdot \mathbf{i}$	$-\alpha \cdot \beta$

Az általánosított kvaterniók valós algebrai alakjával a következő számolási szabályok alapján dolgozhatunk:

$$r \cdot (a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot \mathbf{i} + (r \cdot c) \cdot \mathbf{j} + (r \cdot d) \cdot \mathbf{k} \quad (19)$$

$$(a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}) + (a' + b' \cdot \mathbf{i} + c' \cdot \mathbf{j} + d' \cdot \mathbf{k}) = \quad (20)$$

$$= (a + a') + (b + b') \cdot \mathbf{i} + (c + c') \cdot \mathbf{j} + (d + d') \cdot \mathbf{k}$$

$$(a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}) \cdot (a' + b' \cdot \mathbf{i} + c' \cdot \mathbf{j} + d' \cdot \mathbf{k}) = \quad (21)$$

$$= (a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ + (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot \mathbf{i} + \\ + (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot \mathbf{j} + \\ + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot \mathbf{k},$$

ahol $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}, a' + b' \cdot \mathbf{i} + c' \cdot \mathbf{j} + d' \cdot \mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$.

A $q = z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ konjugáltján a $\bar{q} := \bar{z}_1 - z_2 \cdot \mathbf{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ számot értjük. A konjugálást az alábbi tulajdonságok jellemzik: (a) $\bar{\bar{q}} = q$ involutív, b) $\overline{r \cdot q} = r \cdot \bar{q}$ homogén, (c) $\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q'}$ additív, (d) $\overline{q \cdot q'} = \bar{q'} \cdot \bar{q}$ anti-multiplikatív, (e) $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$, ahol $r \in \mathbb{R}, z_1 = a + b \cdot \mathbf{i}, z_2 = c + d \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$.

A $q = z_1 + z_2 \cdot \mathbf{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem normáján a $N(q) = q \cdot \bar{q} \in \mathbb{R}$ számot értjük, amelyre teljesülnek az alábbi összefüggések: (a) minden $q, q' \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén $N(q \cdot q') = N(q) \cdot N(q')$, (b) $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem invertálható akkor és csakis akkor, ha $N(q) \neq 0$, (c) ha $p, q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ invertálható elemek, akkor $p \cdot q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ is invertálható és $(p \cdot q)^{-1} = q^{-1} \cdot p^{-1}$.

A $q = a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}, q' = a' + b' \cdot \mathbf{i} + c' \cdot \mathbf{j} + d' \cdot \mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elempár skaláris szorzatán a $\langle q, q' \rangle := a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$ számot értjük. A skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés, ebből a norma az $N(q) = \langle q, q \rangle$ alapján származtatható.

A $q = a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaterniók reprezentálhatók az

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad (22)$$

alakú mártixok $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ halmazával, mivel a

$$G : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}), a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, érvényes továbbá az

$$N^2(q) = \det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \quad (23)$$

összefüggés.

Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra összeadása és skalárral való szorzása (10) és (11), továbbá (19) és (20) szerint azonos, tehát az összeg és a skalárszoros is független az α és β paraméterek megválasztásától. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák közötti eltérés a szorzásban van, amelyet a (12) és (21) szerint az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterpár határoz meg. E szorzást viszont az összeadásra vonatkozó disztributivitás szabálya miatt egyértelműen meghatározza az általánosított kvaternióegységek Cayley-féle szorzótáblája.

A $\tau : a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \mapsto a + c \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$ *transzpozíciós* leképezés, valamint a $\kappa : a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \mapsto a - b \cdot \mathbf{i} - c \cdot \mathbf{j} - d \cdot \mathbf{k}$ *konjugálási* leképezés is algebra-izomorfizmusok, amelyek $\kappa \circ \tau$ kompozíciója a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ kvaternióegységeinek szorzótábláját éppen a $\mathbb{H}_{\beta\alpha}$ kvaternióegységeinek szorzótáblájába viszi át. Ezért $\mathbb{H}_{\beta\alpha}$ algebra izomorf a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrával.

Legyen $E := \{-1, 0, 1\}$. Láttuk, hogy $\mathbb{C}_{\alpha}$ mindhárom alaptípusánál $\alpha \in E$ teljesül. Ha $\beta \in E$ is fennáll, akkor közvetlenül belátható, $\alpha \cdot \beta \in E$ is teljesül. Ekkor viszont az általánosított kvaternióegységek négyzeteire $\mathbf{1}^2 = 1, \mathbf{i}^2 = -\alpha, \mathbf{j}^2 = -\beta, \mathbf{k}^2 = -\alpha \cdot \beta$ miatt $\mathbf{1}^2, \mathbf{i}^2, \mathbf{j}^2, \mathbf{k}^2 \in E$ is teljesül, vagyis a kvaternióegységek szerepe szimmetrikus. Ezért az $\alpha, \beta \in E$ esetben a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebrát *szimmetrikusnak* nevezzük, amelyet az (α, β) értékpárjainak megfelelően a következő táblázatba rendezhetjük:

(1,1)	(1,-1)	(1,0)
(-1,1)	(-1,-1)	(-1,0)
(0,1)	(0,-1)	(0,0)

E 9 struktúra közül a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ és $\mathbb{H}_{\beta\alpha}$ izomorf volta miatt elegendő pl. a felső trianguláris 6 struktúrát tekinteni:

(1,1)	(1, -1)	(1,0)
	(-1, -1)	(-1,0)
		(0,0)

E struktúrák közül 5 ismert, amelyek a táblázat első sorában és harmadik oszlopában szerepelnek. Ezek éppen a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebrákra korábban példaként említett $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$, $\mathbb{H}^\circ$, $\mathbb{H}'^\circ$ és $\mathbb{H}^{\circ\circ}$ struktúrák.

Az $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$ paraméterpárral rendelkező $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ 6. struktúrában az elemeket a (19) és (20) összefüggés szerint kell skalárral szorozni és összeadni, szorozni pedig a (21) szerint az $\alpha = \beta = -1$ helyettesítéssel. Ekkor a normát a $N(q) = a^2 - b^2 - c^2 + d^2$ alapján, a skaláris szorzatot a $\langle q, q' \rangle = a \cdot a' - b \cdot b' - c \cdot c' + d \cdot d'$ összefüggéssel számolhatjuk, végül e struktúrában szereplő kvaterniókat a

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

alakú mátrixok reprezentálják.

4. Befejezés

Az előző részben az általánosított kvaternióalgebrák egy, az általánosított komplex számok algebrájára támaszkodó felépítését mutattuk be. Ennek kapcsán vezettük be és határoztuk meg a szimmetrikus általánosított kvaternióalgebrákat, s utaltunk egy, korábban a szakirodalomban nem vizsgált típusára.

Az általánosított kvaternióalgebrák más tárgyalásával találkozhatunk *JAFARI* (2016) és *JAFARI – YAYLI* (2015), valamint *PIERCE* (1982) munkáiban is.

A dolgozatban bemutatott felépítés folytatható és felépíthető e módszerrel a Cayley-féle oktoniók algebrája is, amelynek vizsgálatával a jövőben kívánunk foglalkozni.

Irodalomjegyzék

- [1] **Jafari, M.**, Quaternion Algebra and Its Application: An Overview, Intern. Journ. of Theoret. and Appl. Math. 2(2), (2016) 79-85. doi:10.11648/j.ijtam.20160202.18
- [5] **Jafari, M. – Yayli, Y.**, Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Univ. Ank. Ser. A1, 64(1), (2015) 15-27. doi:10.1501/Commua1_0000000724
- [6] **Hamilton, W. R.**, On Conjugate functions, or algebraic Couples. British Association Report, Edinburg, (1834) 519-523.
- [7] **Hamilton, W. R.**, On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 2, (1944) 424-434.
- [8] **Pierce, R. S.**, Associative Algebras. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982. doi:10.1007/978-1-4757-0163-0
- [9] **Rosenfeld, B.**, Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7
- [10] **Ward, J. P.**, Quaternions and Cayley Numbers. Springer Science, Bussines Media B.V, 1997. doi:10.1007/978-94-011-5768-1

A talajszerkezeti és spektrális tulajdonságok összefüggésének meghatározása

Kalmár János
MTA CSFK GGI
kalmar@ggki.hu

Neményi Miklós
Széchenyi István Egyetem
nemenyi.miklos@sze.hu

Nyéki Anikó Éva
Széchenyi István Egyetem
nyeki.aniko@sze.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A mezőgazdasági termőtalajok hasznosítása és művelése a talajösszetétel alapján történik. A talajparaméterek meghatározása helyszíni mintavétellel és a talajminták laboratóriumi elemzésével történik. Ez költséges és hosszadalmas eljárás, ezért megvizsgáltuk, helyettesíthető-e hiperspektrális (digitális) felvételek készítésével és kiértékelésével.

ABSTRACT. Utilization and cultivation of agricultural soils is done on the basis of the soil composition. Soil parameters are determined by on-site sampling and by laboratory analysis of soil samples. This is a costly and lengthy procedure, so we have examined whether it can be replaced by making hyperspectral (digital) images and evaluating them.

1. Bevezetés

A precíziós mezőgazdaság egy technológia, amelyik úgy segíti a mezőgazdasági termelés optimalizálását, hogy a művelési táblákat kisebb egységekre lebontva „sűrű” mérési adatok alapján támogatja a döntés-előkészítést.

Két parcellán folytattunk adatgyűjtést, összesen 21 mintavételi helyen. A talajmintákat laboratóriumban értékeltük ki 17 összetevőre (talajparaméterre) vonatkozólag, melyből a sőtartalmat állandósága miatt elhagytuk. A mintavételi helyeken hiperspektrális felvételeket is készítettünk a (350, 2500) nm hullámhosszú tartományban, 1 nm felbontással [1], [2].

Hiperspektrális felvétel műszerhiány miatt csak 13 mintavételi helyen készült, viszont pontonként két példányban: az egyik felvétel a bolygatlan (normál) talajfelszínről, a másik pedig a simítottáról készült. Műszerhiba miatt az 1835 nm és 1905 nm hullámhosszú reflexiók közül 34 darab simított és 39 darab normál talajról készült adatot töröltünk.

2. A hiperspektrális képek vizsgálata

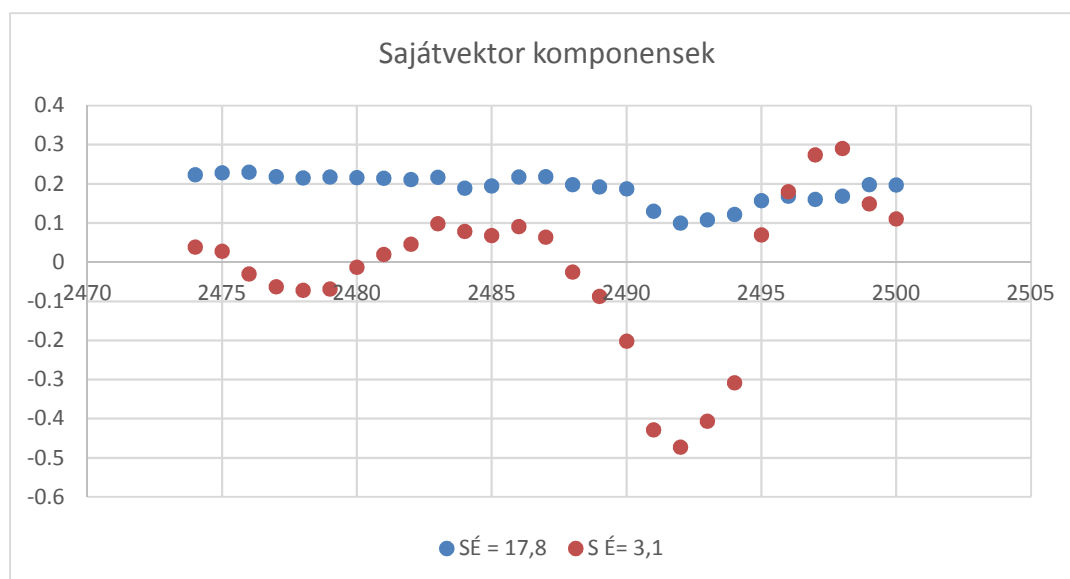
Először összehasonlítottuk a hiperspektrális reflexiók szomszédos hullámhosszait: várakozásainknak megfelelően az kaptuk, hogy a reflexiók korrelációja a szomszédos hullámhosszakon nagyon magas, csak az esetek 5 %-ban (106 mérési ponton) volt kisebb 0,99-nál. Elgondolkodtató eredményre vezetett a normál és simított reflexiók elkülönített összehasonlítása: a szomszédos adatsorok korrelációinak átlaga ugyan alig különbözik (0,9961 – 0,9963), viszont a korrelációk szórása (0,054 – 0,049), és különösen a minimuma már szignifikánsan eltér (0,304 – 0,594), ami a simított talajról felvett adatsorok előnyét (robosztusságát) mutatja.

Az un. főkomponens analízis (továbbiakban PCA) képes az adatsorok számát variancia-vesztés nélkül csökkenteni, ezért főkomponens analízissel (PCA) vizsgáltuk meg a spektrális adatsorok 20 nm szélességű összefüggő (szomszédos) nyalábjait. A PCA az adatsorok keresztkorrelációs (vagy kovariancia) mátrixán alapul, mely mátrix sajátértékei mutatják a főkomponensek fontosságát, a főkomponenseket pedig az eredeti adatsorok olyan lineáris kombinációjaként állítja elő, ahol a súlyok a sajátvektor komponensei. Tudjuk, hogy a kovariancia mátrix pozitív szemidefinit, ezért minden sajátértéke pozitív, és a sajátértékek összege megegyezik a mátrix méretével.

- Vizsgálatunkban a kovariancia mátrix sajátértékeinek összege elméletileg 20, de a legfontosabb komponens sajátértéke általában közel húsznak (>19) adódott, ezért a többi főkomponens szerepe elhanyagolható.
- A legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor koordinátái közelítőleg egyformák voltak, ami a sajátérték dominanciájával együtt azt jelenti, hogy a szomszédos 20 spektrális adatsor információ-vesztés nélkül helyettesíthető az átlagukkal.
- A kivételek közé tartozott a (2474, 2500) nm hullámhosszú intervallum: az itt elvégzett PCA szerint a 27 nm széles spektrális adatsort legalább 2 főkomponens adatsorral (sajátértékeik 17,8 és 3,1) kell helyettesíteni könyökszabály értelmében (1. ábra):
 - A domináns sajátvektor komponensei most is közel egyenlőnek bizonyultak (átlag: 0.19, szórás: 0.037, 2. ábra)
 - A második sajátvektor komponensei már nem egyformák, és előjelben is igen változatosak, a sajátvektorok egyben bázisvektorok is, ezért skaláris szorzatuk 0.



1. ábra. A domináns sajátvektorokat a sajátértékekre alkalmazott könyökszabály jelöli ki



2. ábra. (2474 - 2500) nm hullámhosszokhoz számolt PCA két domináns sajátvektora

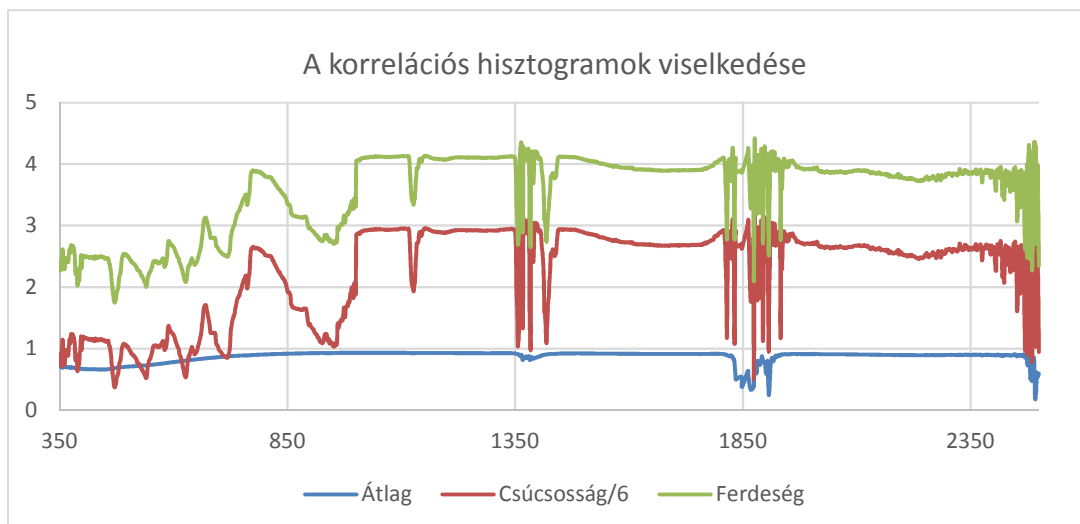
A tapasztaltak miatt tehát nem állítható az, hogy minden rövidebb spektrum-tartományban mért reflexiókat variancia-vesztés nélkül helyettesíthetünk a reflexiók átlagával, de a domináns sajátvektor komponensei közel egyenlőnek bizonyultak, vagyis a legfontosabb helyettesítő adatsor (lineáris kombináció) mindig az átlag.

Ezután meghatároztuk a 2120 db spektrális adatsor keresztkorrelációs mátrixát. A mátrix minden sorából (tehát hullámhosszanként) egy 20 oszlopos hisztogramot (gyakoriság függvényt) készítettünk. A 20 pontos gyakoriság függvényeket az átlag, ferdeség és csúcsosság/6 statisztikákkal jellemeztük (3. – 4. ábrák).

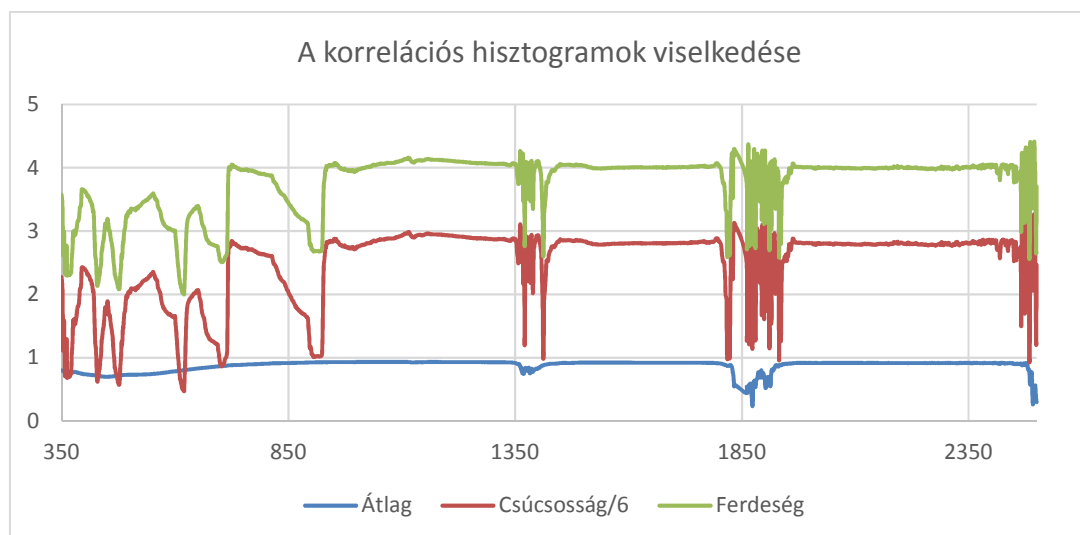
- A statisztikák diagramja rámutatott arra, hogy a görbék többnyire nyugodt, stabil szakaszokból állnak, a spektrum elején (kb. 1000 nanométerig) - az átlag kivételével - növekvő hullámzást mutatnak. Csak a simított képeken látunk intenzív kilengést az 1115-1150 nanométer hullámhossz tartományban, viszont 1350 és 1450 nanométer hullámhosszok között, 1800 és 1950 nanométer hullámhosszok között, és a spektrum végén (2400 nanométer fölött) mindegyik statisztika intenzív kilengést mutat.
- A hisztogramok a korrelációs mátrix sorai alapján készültek, ezért a kilengések arra utalnak, hogy a spektrum csak a jelzett hullámhossz tartományokban érzékeny a mérési pozícióra, tehát a talaj tulajdonságainak változására.

3. A talaj-összetevők laboradatainak vizsgálata

- A mért 16 talajparaméterre is főkomponens analízist alkalmaztunk, hogy feltárjuk a közöttük található rejtett összefüggéseket.
- A könyökszabály szerint (5. ábra) a laboradatok már három főkomponenssel leírhatók.
- A 6. ábrán láthatók a legnagyobb sajátértékekhez tartozó sajátvektorok.
- A 7-8. ábrákon a talajösszetevők már fontosságuk (sajátértékkel szorzott sajátvektor komponensek összegeként meghatározott) sorrendjében láthatók.



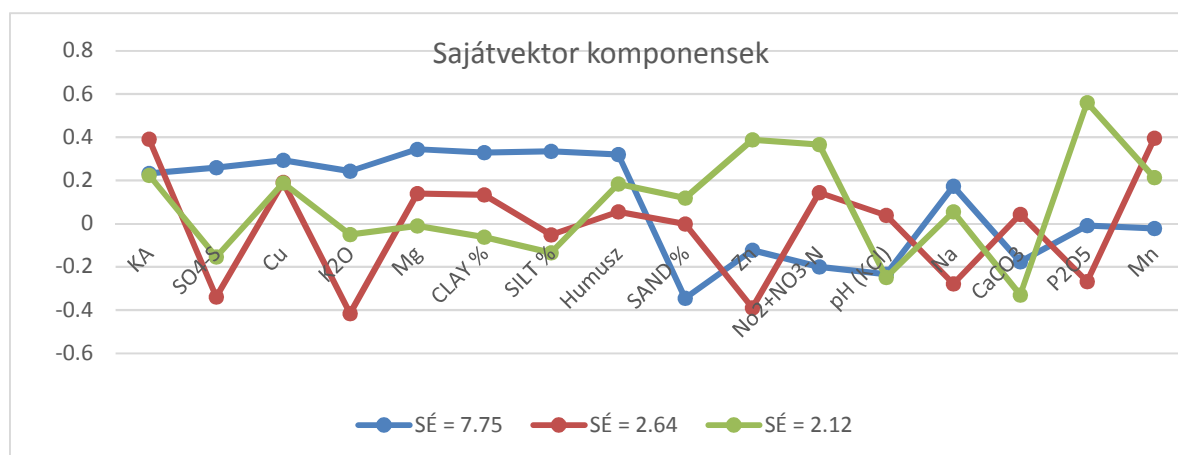
3. ábra. A simított talajú képek statisztikái



4. ábra. A normál talajú képek statisztikái



5. ábra. A domináns sajátvektorokat a sajátértékekre alkalmazott könyökszabály jelöli ki



6. ábra. A laboradatokból számolt PCA legfontosabb sajátvektorai

4. A hiperspektrális és a laboradatok kapcsolata

A képi és laboradatok kapcsolatát úgy határoztuk meg, hogy korrelációt számítottunk minden hullámhossz-reflexió és minden labor adatsor (a komponensek mérési-hely függők) között. A korrelációk csak szűk hullámhossz tartományokban mutattak (abszolút értékben) 0,5-nél nagyobb értékeket, ezért a spektrummal kapcsolatos korábbi PCA-k alapján feltételeztük, hogy a spektrális adatok legfeljebb tíz hullámhossznyi összefüggő tartománya helyettesíthető a spektrális adatok átlagával. Minden labor-adatsorhoz megkerestük azon 1, 2, ..., 10 hosszú hullámhossz tartományt, ahol a labor-adatsor és a reflexiók átlagának korrelációja (abszolút értékben) maximális volt. A 10 maximum tartomány közül választottuk ki ezután a legjobb korrelációjút. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze, és a 7. – 8. – 9. ábrákon szemléltettük – természetesen a normál és a simított talajról készült felvételeket végig megkülönböztettük. Látható, hogy csak N és Mn talajparaméterek esetén korrelál lényegesen jobban (≈ 0.1) a labor adat a normál talajról készült képpel, mint a simított talajjal. Ettől eltekintve a laboradatok és a simított talajról készült felvételek átlagosan 0.075-tel jobb korrelációt mutatnak, mint a normál talaj esetén.

További érdekes megfigyelés, hogy a normál talajról készült képeknél az optimális korrelációhoz 10 talaj-összetevőnél csak egy hullámhosszat szabad figyelembe venni, és 5 esetben két szomszédost. A simított talajnál a spektrális környezet jobban korrelál a talaj-összetevővel, 7 esetben kell egy hullámhosszat figyelembe venni, 3 esetben pedig legalább kettőt, de 7 hh is előfordul (KA).

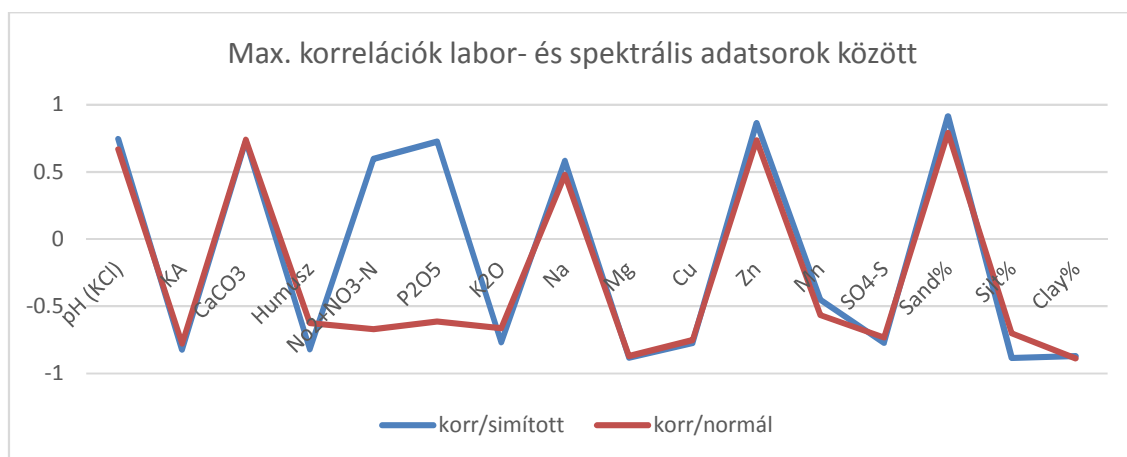
Vegyük észre, hogy K₂O és SO₄-S talaj-összetevőket ugyanazon az 1849-es hullámhosszon a legbiztosabb észlelni, sőt, ugyanazon korrelációval. Ugyanezt figyelhetjük meg az Mg és Clay összetevőknél is – vajon nincs közöttük valami direkt kapcsolat? A korrelációs számítás szerint igen, mert a korrelációjuk 0.93-nál nagyobb. Hasonló megállapítást tehetünk, ha megvizsgáljuk Sand és Silt összetevők kapcsolatát. Sand talajparaméter hullámhossz tartománya tartalmazza Silt-ét, és korrelációjuk összege közelítőleg 0. Ebben az esetben az adatsorok közötti korreláció (-0.97) még erősebb is, mint az előző példákban.

Végeredményben a szerzők azt javasolják, hogy a spektrális mérések csak simított talajon történjenek, mert:

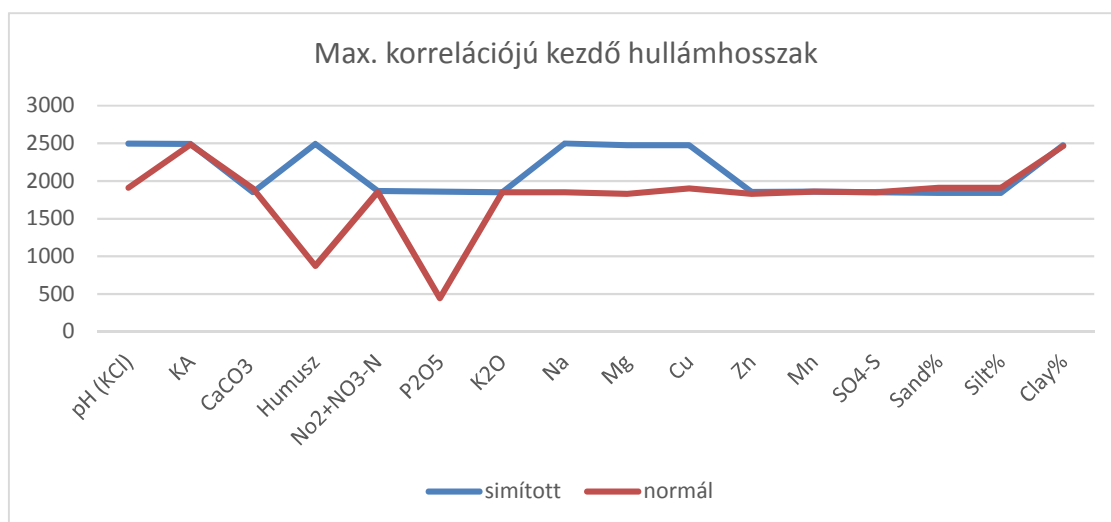
- a mérések (illetve átlaguk) jobban korrelálnak a laboradatokkal,
- a szélesebb optimális hullámhossz tartományok átlagolása nagyobb hibatűrést (robusttusságot) eredményez,
- csak az (1841, 1870) és (2474, 2500) hullámhossz tartományokat érdemes mérni, viszont normál talajon a (1831, 1910) és (2463, 2482) tartományokon kívül szükség van a 446 és 873 nanométeres hullámhosszakra is.

Labor adat	korrr/simított	kezdő hh	utolsó hh	korrr/normál	kezdő hh	utolsó hh
pH (KCl)	0,74404744	2494	2494	0,66945753	1909	1909
KA	-0,82240143	2493	2499	-0,77818156	2482	2482
CaCO ₃	0,75805876	1851	1853	0,73946585	1901	1901
Humusz	-0,82147033	2492	2497	-0,62540187	873	873
No ₂ +NO ₃ -N	0,57043033	1869	1870	-0,6714987	1855	1858
P ₂ O ₅	0,71732301	1858	1858	-0,61360923	446	446
K ₂ O	-0,76824831	1849	1849	-0,66255002	1849	1849
Na	0,58352248	2498	2500	0,47748388	1851	1852
Mg	-0,88173063	2475	2475	-0,87102881	1831	1831
Cu	-0,77196251	2474	2475	-0,75079347	1900	1901
Zn	0,77043110	1857	1858	0,73627430	1831	1832
Mn	-0,46224779	1859	1859	-0,56489117	1858	1859
SO ₄ -S	-0,77323049	1849	1849	-0,73280416	1849	1849
Sand %	0,91297538	1841	1845	0,79055039	1909	1910
Silt %	-0,88239173	1841	1844	-0,70036498	1910	1910
Clay %	-0,87035868	2475	2475	-0,88816105	2463	2463

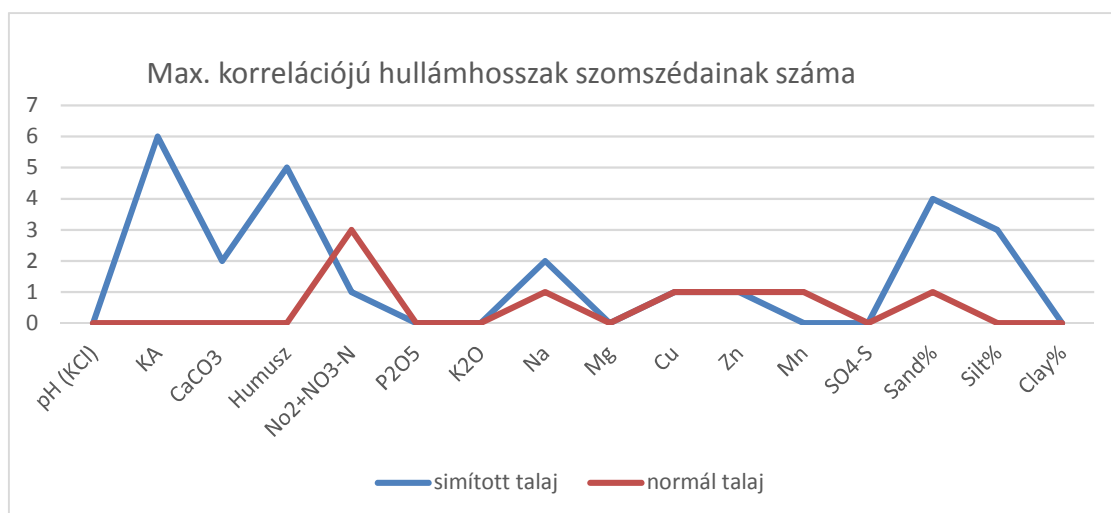
1. táblázat. A legjobb korrelációk a labor és a spektrális adatok között



7. ábra. A labor- és spektrális adatsorok legerősebb kapcsolatai



8. ábra. A labor adatra leginkább érzékeny hullámhosszak simított/normál talaj esetén



9. ábra. A max. korrelációnál figyelembe vett szomszédos hullámhosszak száma

5. A laboradatok becslése a hiperspektrális adatokból

Az előző fejezetben láttuk, hogy bizonyos spektrális adatsorok (illetve azok átlaga) jól korrelálnak a labor-adatokkal. A jó korreláció viszont közelítőleg lineáris kapcsolatot feltételez az adatsorok között, ami regressziós egyenes illesztéssel meghatározható. A kutatás zárásaként meghatároztuk a simított talaj és a talajparaméterek legjobb korrelációjánál érvényes egyenes-illesztés (lineáris regresszió) paramétereit és hibáját, amit a 2. táblázatban foglaltunk össze:

Talaj attribútum	kezdő hh	utolsó hh	korreláció	m* intenzitás	+ konstans	átlagos hiba
pH (KCl)	2494	2494	0,744047445	0,945893825	7,17114112	0,086870166
KA	2493	2499	-0,822401438	-41,38217159	55,002649	2,589002186
CaCO ₃	1851	1853	0,758058768	14,27983081	11,3285781	2,048742253
Humusz	2492	2497	-0,821470332	-3,611737425	3,33340928	0,199029439
No ₂ +NO ₃ -N	1870	1870	0,570430331	9,2108647	3,36817544	4,757651887
P ₂ O ₅	1872	1872	0,717323014	147,3655419	134,48017	33,58685803
K ₂ O	1849	1849	-0,768248319	-277,4079628	384,851677	67,88898619
Na	2498	2500	0,583522484	91,4145948	29,1253924	17,5190072
Mg	2475	2475	-0,881730636	-1371,854066	651,107612	37,22532888
Cu	2474	2475	-0,771962518	-23,91006587	12,307372	1,002542246
Zn	1908	1912	0,770431108	4,54802179	1,09366512	0,350396624
Mn	1868	1868	-0,46224779	-19,02886049	32,5268205	11,83677712
SO ₄ -S	1849	1849	-0,773230494	-17,0688913	31,3539888	4,111215183
Sand %	1841	1846	0,912975388	53,92367293	4,75521429	5,204997516
Silt %	1842	1845	-0,88239173	-33,17047645	69,0639769	4,36215317
Clay %	2475	2475	-0,870358686	-73,32830072	40,716835	2,104065309

2. táblázat. A lineáris regresszió paramétereit és hibáját

Már utaltunk rá, ha szélesebb összefüggő tartományban detektálunk, akkor a spektrális adatok átlagolása javítja a hibátűrést. A talajparaméterek többségénél a legjobb korrelációt egyedi, nem szomszédos hullámhosszakon kaptuk, ezzel ez a hibajavító opció kiesett. Megvizsgáltuk ezért, ha megelégszünk az optimálisnál legfeljebb 0,1-el kisebb korrelációval, tudjuk-e növelni a detektáló tartomány hosszát. A válasz természetesen igen, és az eredményeket a 3. táblázat tartalmazza.

A regisztrálható spektrális tartományok - természetesen most is simított talajnál - (1826, 1916) és (2476, 2500)-ra nőttek. Az alacsonyabb korreláció miatt a lineáris becslés átlaghibája ugyan nőtt, de az eljárás robusztusabb lett; az átlagszámítás miatt kevésbé érzékeny az egyedi mérési hibákra.

Talaj attribútum	kezdő hh	utolsó hh	korreláció	m * intenzitás	+ konstans	átlagos hiba
pH (KCl)	2492	2496	0,7141035	0,965679365	7,15539451	0,091019558
KA	2491	2500	-0,746042	-37,98773274	53,7732071	3,030392961
CaCO ₃	1826	1835	0,5611566	25,33492736	7,8283256	2,478766134
Humusz	2490	2499	-0,8414135	-3,482238028	3,31550214	0,188607857
No ₂ +NO ₃ -N	1869	1872	0,6546498	10,4461466	3,10281759	3,176786172
P ₂ O ₅	2479	2481	0,6254813	520,5185891	27,350564	37,61195169
K ₂ O	1848	1849	-0,7385674	-322,6904595	406,782762	71,49766462
Na	2497	2500	0,585624	97,00546181	28,3045939	17,48634292
Mg	2473	2476	-0,8411375	-1285,975252	620,6395504	42,67538593
Cu	2490	2499	-0,7376959	-13,79582055	8,4239765	1,064784557
Zn	1907	1916	0,6555008	4,634827774	1,10977595	0,415071272
Mn	1868	1869	0,5099243	28,00535249	14,5632884	11,72269405
SO ₄ -S	1848	1849	-0,7438687	-19,86878481	32,7100108	4,332948023
Sand %	1841	1850	0,822889	43,71973523	8,96588654	7,24849115
Silt %	1841	1850	-0,8030664	-31,00772199	69,1223839	5,524497619
CLAY %	2473	2476	-0,8115942	-67,19020033	38,55142629	2,496333399

3. táblázat. A bővített tartományú lineáris regresszió és hibája

6. Összefoglaló

A talajmintákat vettünk és hiperspektrális felvételeket készítettünk mezőgazdasági művelésű parcellák ugyanazon mintavételi helyein. Korrelációs számítással határoztuk meg, hogy az egyes talaj-összetevők mely hullámhossz tartományokon mutathatók ki a legbiztosabban, illetve regresszió-analízissel következtettünk a hiperspektrális képekből a talajparaméterek mennyiségére. Ajánlást adtunk a felvételek készítésének körülményeire is. Megállapítottuk, hogy a felvételek pontosságvesztés nélkül készíthetők olcsóbb multi-spektrális kamerákkal is.

Köszönetnyilvánítás.

Kutatásainkat a VKSZ_12-1-2013-0034 Klíma2 pályázat támogatta.

Irodalomjegyzék

- [1] **E Ben-Dor, Y Benyamini, N Goldschleger, M Agassi:** The Spectral Reflectance Properties of Soil Structural Crusts in the 1.2- to 2.5- μm Spectral Region, in Soil Science Society of America Journal 67(1), January 2003. doi:10.2136/sssaj2003.0289
- [2] **G Grandjean, I Cousin, M Seger, J Thiesson, S Lambot, B Van Wesemael, A Stevens, K Samyn, A Bitri, S Bernardie,** 2009. From geophysical parameters to soil characteristics, Report N°BRGM/FP7-DIGISOIL-D2.1, 52 pages. https://esdac.jrc.ec.europa.eu/public_path/Digisoil-D2.1.pdf

Kettős Awrami függvény alkalmazása

Csanády Viktória
SOE Matematikai Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az időbeli folyamatok, összefüggő fizikai, biológiai jellemzők kapcsolatának regressziós vizsgálata során a statisztikai programok adta lehetőségek végett, számos bonyolult matematikai modell alkalmazására nyílik mód. Az alábbiakban egy speciális modell kerül bemutatásra, annak sokoldalúságát kiemelve, példákkal illusztrálva.

ABSTRACT. Statistical programs enabled us to apply several complex mathematical models for regression analysis in the investigation of the relationships of physical and biological properties in time processes. In what follows, we present a special model and emphasize its versatility by introducing examples.

1. Bevezetés

A regressziós elemzések esetén a számítógépes statisztikai programok lehetőséget kínálnak arra, hogy viszonylag bonyolult modellek kerüljenek alkalmazásra, melyek a folyamatot nemcsak megfelelő pontossággal írják le, hanem számos feltételnek is eleget tesznek. Érdekes talán megemlíteni, hogy az úgynevezett exponenciális görbék alkalmazásával – és itt nem a hagyományos értelemben vett exponenciális függvényről van szó – már a XIX században is foglalkoztak, például különböző biológiai folyamatok leírásánál. Ezeket a függvényeket lehetne az Awrami függvény elődjeinek nevezni, amely függvények kezdetleges telítési modelleknek tekinthetők. Mivel illesztésük meglehetősen számolásigényes és bonyolult művelet volt, alkalmazásuk nem igazán terjedt el. Napjainkban viszont újra felfedezték a telítési modelleket és egyre gyakoribb a használatuk a már említett kedvező tulajdonságaik végett – a teljesség igényétől eltekintve csak néhány ezek közül - zérusból indítható, korlátos, aszimptotikus. Az említett függvénytípusok kedvező felhasználhatósága további modellfejlesztésekre ösztönöz, így került sor egy olyan modell létrehozására, ami két eltolt helyzetű Awrami függvény szuperponáltja. Az alábbiakban bemutatásra kerül az alkalmazott modell, valamint néhány konkrét alkalmazás, melyhez a vizsgált adatsor a Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából került kiválasztásra.

A vizsgálat az 1995-2017 éves időszak egyes éveiben felmért teljes juh, sertés és szarvasmarha állomány adatainak statisztikai regressziós elemzésére terjedt ki. Az adatok az 1. táblázat: Állatlétszám tartalmazza.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modell. A lehetséges kutatás végett, törekedve a teljességre az alábbiakban bemutatásra kerül a vizsgált adatsor. A táblázat első oszlopában az évek, első sorában a sorszámozott vizsgálati adatsorok kerültek feltüntetésre. Így:

- 1: Juh állomány.
- 2: Sertés állomány.
- 3: Szarvasmarha állomány.

	1 Év	2 Juh (ezer)	3 Sertés (ezer)	4 Szarvasmarha (ezer)
1	1995	977	5032	421
2	1996	872	5289	414
3	1997	858	4931	403
4	1998	909	5479	407
5	1999	934	5335	399
6	2000	1129	4834	380
7	2001	1136	4822	368
8	2002	1103	5082	362
9	2003	1296	4913	350
10	2004	1397	4059	345
11	2005	1405	3853	334
12	2006	1298	3987	322
13	2007	1232	3871	322
14	2008	1236	3383	324
15	2009	1223	3247	312
16	2010	1181	3169	309
17	2011	1120	3044	329
18	2012	1185	2989	339
19	2013	1214	3004	345
20	2014	1185	3135	359
21	2015	1190	3124	368
22	2016	1141	2907	383
23	2017	1146	2870	395

1. táblázat. Állatlétszám

Az alkalmazott regressziós modell

- hagyományos matematikai alakja:

$$y = b_8 - b_7 \cdot e^{(-1 \cdot (b_6 \cdot (x - b_5))^{b_4})} - b_3 \cdot e^{(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (x - b_1))^{b_0})}$$

- a számítógépes alak:

$$\text{var2} = b_8 - b_7 * \exp(-1 * (b_6 * (\text{var1} - 1 * b_5))^{b_4}) - b_3 * \exp(-1 * (-1 * b_2 * (\text{var1} - 1 * b_1))^{b_0}).$$

Kezdőértékek meghatározása.

b8=a maximális vagy minimális var2 érték,

b7=a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a kezdő var2 érték,

b6=a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),

b5=a var1 kezdőértéke, vagy annál relatív kisebb,

b4=az esetek többségében 3 (5),

b3=a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a végső var2 érték,

b2=a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),

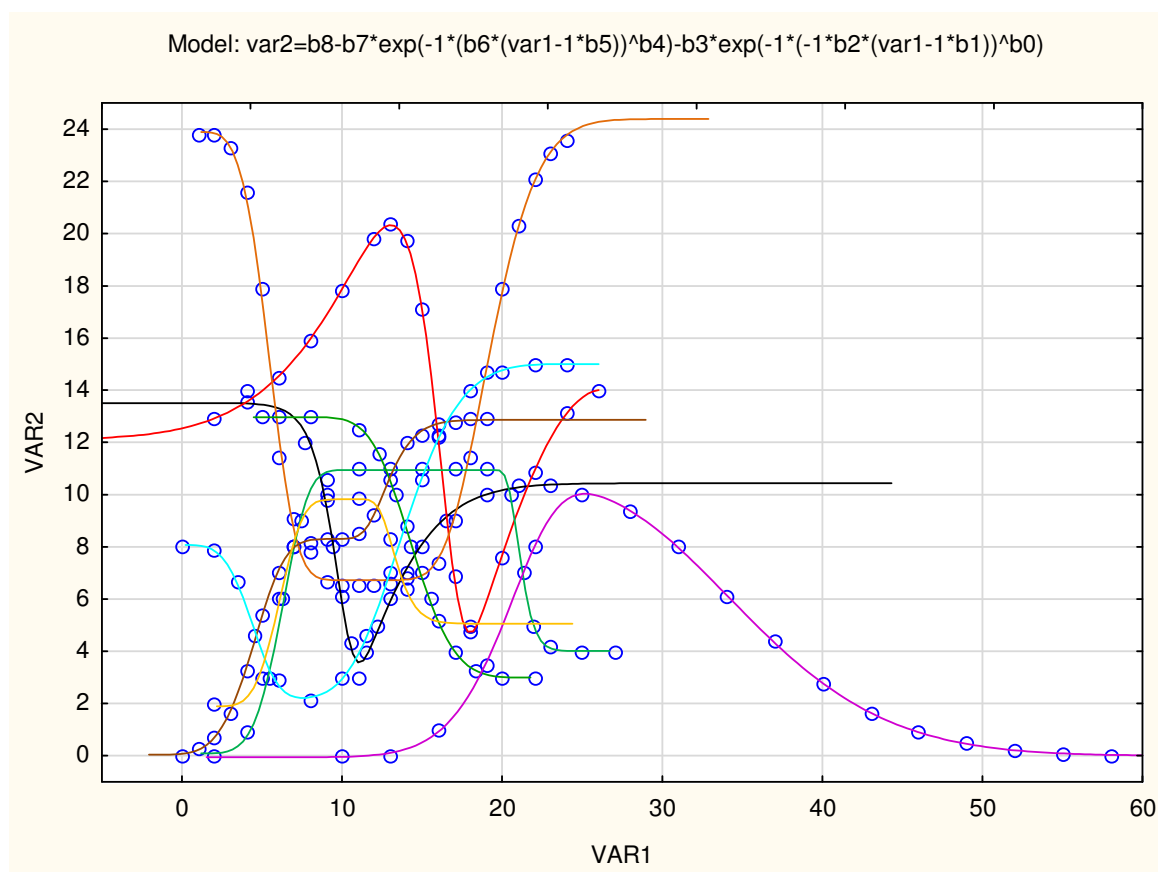
b1=a var1 végsőértéke, vagy annál relatív nagyobb,

b0=az esetek többségében 3 (5).

A modell levezetése.

Az alkalmazott függvény egy normál helyzetű transzformált és egy y-tengelyre tükrözött megfelelően transzformált Awrami függvény összegéből került kialakításra, zárt értelmezési tartomány feltételével. A modell levezetése megtalálható Csanády V.: Gazdasági változások regressziós vizsgálata c. cikkében (Dimenziók 2017).

Az alkalmazott modell rendkívüli rugalmasságát néhány kísérleti adatsorra történő illesztés igazolja. Az illesztéseknél alkalmazott adatsorok nem kerülnek feltüntetésre, ahogy a kapott paraméterek értékeinek táblázata sem. A korrelációs együttható minden esetben meghaladta a 0,995-ös értéket, ami szoros korrelációra utal. A már említett rugalmasságot legszemléletesebben a kapott regressziós modellek ábrája mutatja. Az alábbi 1. ábra: Modellek kilenc különböző adatsorra történt illesztés regressziós modelljének grafikonját mutatja. Az ábra önmagáért beszél, igazolva a modell hihetetlen rugalmasságát, amit a kilenc paraméter értékének változatossága okozza.

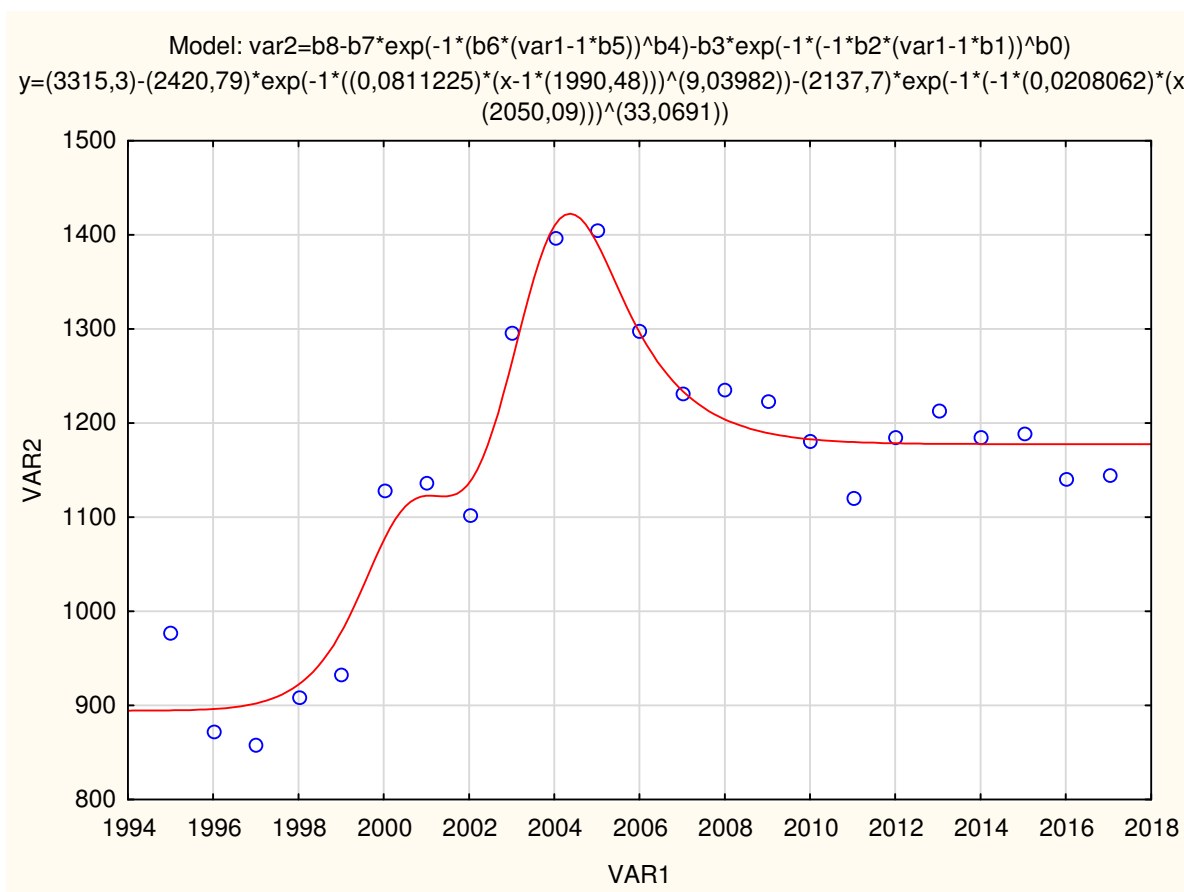


1. ábra. Modellek

2. Számított eredmények, kiértékelés

2.1. A regressziós eljárással nyert eredmények

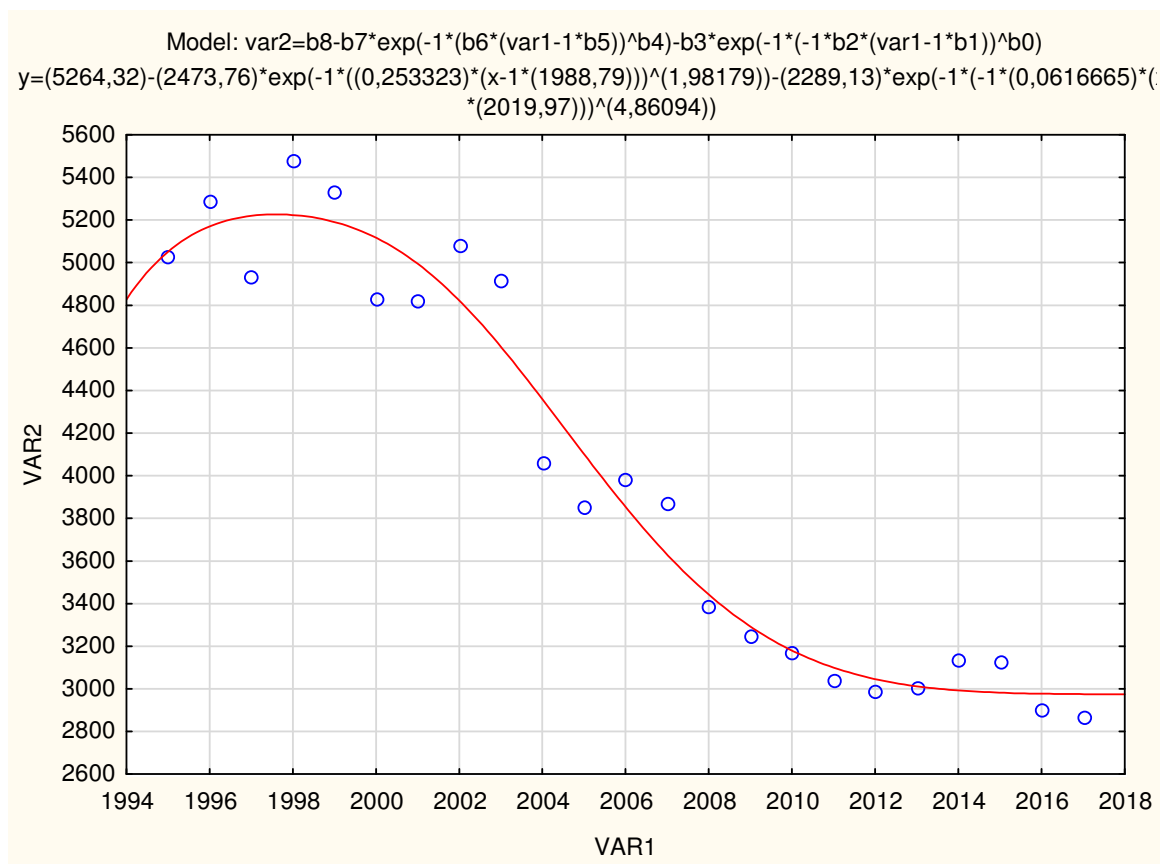
A már említett Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából letöltött adatokra történő illesztés eredményét és azok grafikonjait az alábbiak mutatják.



2. ábra. Juh állomány

N=23	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b b_4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b b_0)$ (Juhok száma)							
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2							
	Final loss: 26453,852404 R= ,97311 Variance explained: 94,694%							
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
Estimate	3315,29	2420,78	0,08112	1990,47	9,03982	2137,70	0,02080	2050,09

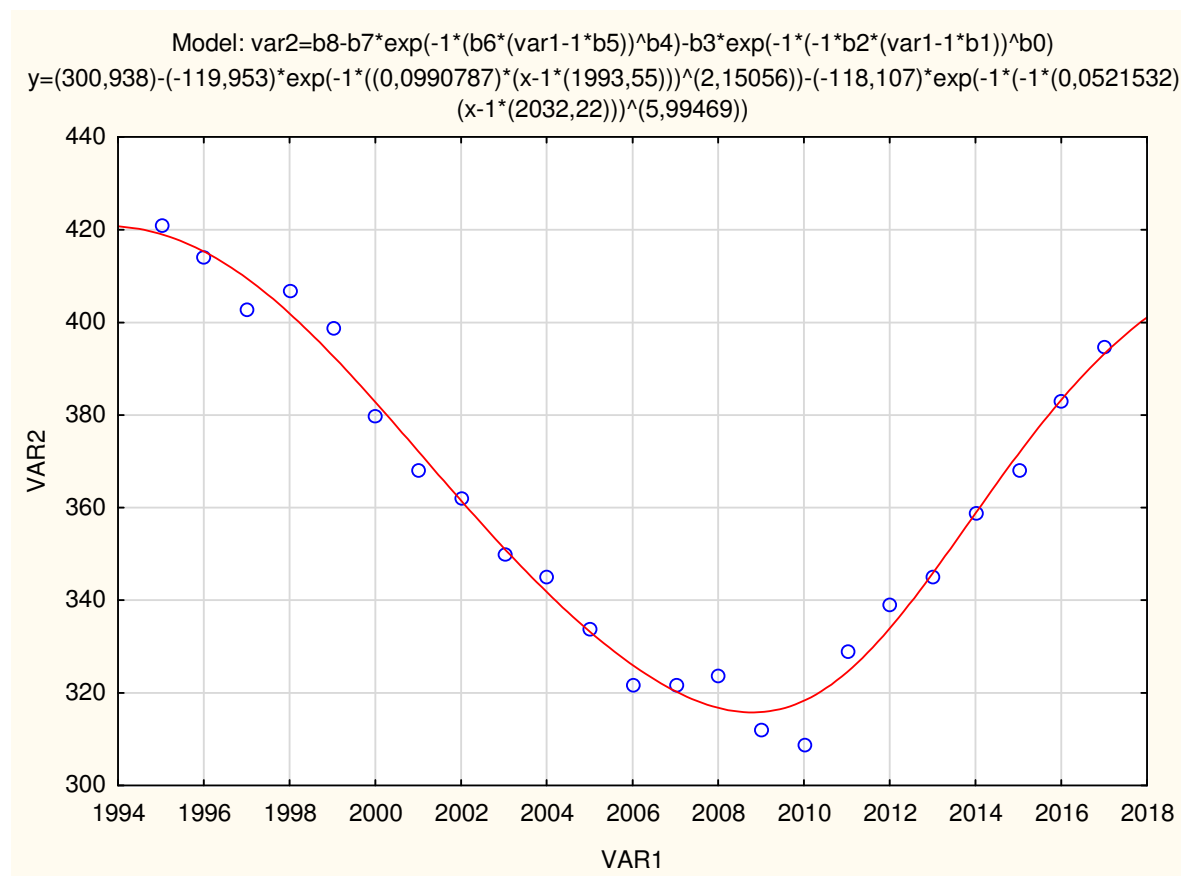
2. táblázat. Juh állomány



3. ábra. Sertés állomány

N=23	Model: $\text{var2} = b8 - b7 \cdot \exp(-1 \cdot (b6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b5))^{b4}) - b3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b1))^{b0})$ (Sertések száma)							
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2							
	Final loss: 751274,14209 R= ,98058 Variance explained: 96,153%							
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
Estimate	5264,32	2473,75	0,25332	1988,79	1,98179	2289,12	0,06166	2019,97

3. táblázat. Sertés állomány



4. ábra. Szarvasmarha állomány

N=23	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^b_4) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^b_0)$ (Szarvasmarhák száma)							
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2							
	Final loss: 386,33192451 R= ,99260 Variance explained: 98,526%							
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
Estimate	300,937	-119,95	0,09907	1993,54	2,15055	-118,10	0,05215	2032,21

5. táblázat. Szarvasmarha állomány

2.2. Elemzés, értékelés

A regressziós vizsgálat elemzése és kiértékelése állományonként a következő:

Juh állomány

Az illesztés eredményéből a következő alapvető megállapítások tehetők:

- 1.) A kapott $R=0,97311$ érték jelzi az időbeli folyamat bizonyos időszakonként ingadozó jellegét.
- 2.) A függvénygörbe három alapvetően eltérő jellegű időbeli folyamatot mutat.
- 3.) Az első tartomány az 1995-2001 év időszaka, jól jelzett erősödő növekedéssel, az inflexió elérésével.

- 4.) A második tartomány a 2001-2005 év intenzív növekedéssel és, maximum elérésével.
- 5.) A harmadik tartomány a 2005-2017 év erősen ingadozó gyengülő csökkenéssel, a végső érték továbbiakban maradandó előjelzésével.

Értékelés:

A fentiek igazolják, hogy az alkalmazott függvény, hasonló jellegű adatsorok vizsgálatára egyszerűen alkalmazható, és teljes körű pontos, részletes tájékoztatást ad.

Sertés állomány

Mivel a nyert paraméterek között a $b_4=1,9818$ jóval kisebb mint 3, ezért a fentebb bemutatott értékek alapján elsősorban a görbe részletes elemzése segítségével tehetők a következő megállapítások:

- 1.) Az 1995-2017 időszakban legnagyobb sertéslétszám időpontja $var1_{max}=1998$ év, mértéke $var2_{max}=5240$ ezer fő.
- 2.) Az 1995-2017 időszakban a kezdőlétszám időpontja $var1_{kez}=1995$ év, mértéke $var2_{kez}=5030$ ezer fő.
- 3.) Az 1995-2017 időszakban a végsőlétszám időpontja $var1_{vég}=2017$ év, mértéke $var2_{vég}=2960$ ezer fő.
- 4.) Az 1995-1998 időszakban kismértékű létszámnövekedés mutatkozik $5240-5030=210$ ezer fővel.
- 5.) Az 1998-2013 időszakban monoton létszámcsökkenés mutatkozik $5240-3000=2240$ ezer fővel.
- 6.) A 2013-2017 időszakot bizonytalan kisebb mérték létszámingadozás jellemez 130 ezer fővel.
- 7.) A korrelációs együttható értéke szoros kapcsolatra utal $R=0,98058$.

Értékelés:

A választott függvény kiemelkedő pontosságú illeszkedése a vizsgált folyamatról részletes tájékoztatást ad. A felsorolt megállapítások összefoglalóan jelzik a sertésállomány nagymértékű csökkenését az 1995-2017 évi időszakban.

Szarvasmarha állomány

A nyert görbe és paraméterek részletes értékelése alapján a következő alapvető meghatározások tehetők:

- 1.) A $R=0,9926$ érték a görbeillesztés kiemelkedő pontosságát jelzi.
- 2.) Az 1995-2009 éves időszakban az állomány létszáma 419 ezerről 316 ezerre csökkent ingadozás nélküli folyamattal.
- 3.) A tehénállomány létszáma a minimumot a 2009-2010-es évben érte el 316 ezer értékkel ingadozás jelleggel.
- 4.) A 2010-2017 éves időszakban az állomány létszáma 316 ezerről 392 ezerre növekedett ingadozás nélküli folyamattal.
- 5.) A kapott $b_1=2032$ paraméter a függvény matematikai jellege miatt 2017 utáni időszakra még növekedést jelez.
- 6.) A b_6*b_4 és b_2*b_0 kapott paraméter értékek alapján megállapítható, hogy a létszámnövekedés az intenzívebb.
- 7.) A korrelációs együttható értéke szoros kapcsolatra utal $R=0,99260$.

Értékelés:

A fentiek igazolják, hogy az alkalmazott függvény, különböző jellegű adatsorokra egyszerűen, kedvezően és nagy pontossággal illeszthető, kiemelkedő rugalmassága miatt.

3. Összefoglaló

A bemutatásra került adatsorok különbözősége jól mutatja az összegzett Awrami függvény sokoldalú használhatóságát, annak rugalmassága végett. A magas korrelációs együttható érték jelzi az illesztés pontosságát. A paraméter értékek alapján fontos jellemzők számíthatók, a függvény jól mutatja az adathalmaz egyes szakaszainak menetét, a szélsőértékek esetleges inflexiós pontok behatárolhatók megfelelő pontossággal. Mindezen ismeretek arra utalnak, hogy a függvény alkalmazása szélsőséges adatsorok esetén is indokolt.

Irodalomjegyzék

- [1] **Csanády V., Horváth-Szováti E., Szalay L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.
- [2] **Csanády V.**, Gazdasági változások regressziós vizsgálata, *Dimenziók* V. (2017), 39–49. doi:10.20312/dim.2017.06
- [3] Központi Statisztikai Hivatal. <https://www.ksh.hu/stadat>

Mathematical model for describing the universe

István Bán

Retired Forestry Engineer and Applied Mathematician
istvan.ban.dr@gmail.com

In remembrance of Stephen Hawking

ÖSSZEFOGLALÓ. Az univerzum az észlelhető-, tudottan létező, de nem észlelhető- és általunk elképzelhetetlen állapotjellemező értékek, relációk és mindezek sajátosságainak összességéből áll. Az univerzum kialakulásában nagy szerepe lehet az úgy nevetett PMSB matematikai modellen.

ABSTRACT. Natural phenomena consist of the entirety of the following: existent and known state characteristics and their values; existent but unknown state characteristics and their values; state characteristics inconceivable by us and their values; existent and known relations as well as relation features; existent but unknown relations and relation features, relations and relation features inconceivable by us.

We assume that the entirety of the above creates objects by existing organising principles, with these objects constituting non-empty subsets of a certain entirety of natural phenomena. Creation may also happen with the so-called PMSB method. The PMSB method is of very high significance for calculating optima in expert systems. The entirety of past, present and future natural phenomena constitutes the universe.

1. Introduction

Man has always been interested in the universe. Today, a number of new discoveries is made with the help of space probes. Geysers were detected on the surface of Sirius. On Mars and Saturn, organic molecules were found. On the moon, signs of water were discovered. Nearly all scientific disciplines turn towards the universe, and this is true for mathematics as well.

2. Extending state characteristics in the universe

Be all the possible state characteristic values of the states occurring in nature $(a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \dots, a_{i,n})$, where $i = 1, 2, \dots$ is the index of the state characteristic, $n = 1, 2, \dots$ is the indicating index of the observed value ([1], pp. 16–23; [2], pp. 14–36; [9], pp. 16–33; [10], p. 41), where in case of i_0 and n_0 the state characteristics and values are known, in case of $\underline{i}$ and $\underline{n}$ a different part is existent but unknown, in case of $\alpha = i - (i_0 + \underline{i})$ and $\beta = n - (n_0 + \underline{n})$, the remaining part is inconceivable and

$$i_0 \subset i, n_0 \subset n, \underline{i} \subset i, \underline{n} \subset n,$$

$$i_0 + \underline{i} + / i - (i_0 + \underline{i}) / = i, \quad n_0 + \underline{n} + / n - (n_0 + \underline{n}) / = n,$$

$$\left(\bigcup_{\forall i_0 n_0} a_{i_0 n_0} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\forall \underline{i} \underline{n}} a_{\underline{i} \underline{n}} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\forall \alpha \beta} a_{\alpha \beta} \right) = \bigcup_{\forall i n} a_{i n}$$

Definition 2.1. Out of all the possible state characteristic values the state characteristic values observed within the possibilities given by the observation system should be:

$$(a_{1, m}, a_{2, m}, a_{3, m}, \dots, a_{j, m}),$$

where $j \leq i, m \leq n$.

Definition 2.2. Relation means the arbitrary adequacy between the state characteristic values.

The following types of relations between state characteristics must be distinguished: relations that correspond theoretically to all combinatorial possibilities among the state characteristics above, relations existing in reality, and relations perceivable within the possibilities of the observing system.

Definition 2.3. Be $b_r = R_r(a_{i, n})$ ($r = 1, 2, \dots$) the relations corresponding to all theoretically possible combinations of the former state characteristics $a_{i, n}$.

Definition 2.4. Be $b_s = R_s(a_{i, n})$ ($s = 1, 2, \dots, n < r$) the really existing relations among the former state characteristics $a_{i, n}$.

Definition 2.5. Be $b_t = R_t(a_{i, m})$ ($t = 1, 2, \dots < s$) the relations perceivable on the basis of the possibilities of the observing system among the state characteristics $a_{i, m}$.

Definition 2.6. The peculiarities of the state characteristic values and relations detectable by mathematical methods are called specific features.

In all of the specific features deducible from the values and relations of the former state characteristics, one has to distinguish between all theoretically possible relations, the really existing features and those that can be interpreted within the possibilities of the observing system.

Definition 2.7. Be $F_c(a_{i, n}; R_r(a_{i, n}))$, ($c = 1, 2, \dots$) all the theoretically possible specific features of the state characteristics $a_{i, n}$ and of the relations $b_r = R_r(a_{i, n})$.

Definition 2.8. Be $F_d(a_{i, n}; R_s(a_{i, n}))$, ($d = 1, 2, \dots$) the specific features existing on the basis of the state characteristics $a_{i, n}$ and the relations $b_s = R_s(a_{i, n})$.

Remark. An effect is a special case of relation ([2], pp. 28–35, 256, 260; [9], pp. 27–32).

Definition 2.9. Be $F_e(a_{j, m}; R_t(a_{j, m}))$, ($e = 1, 2, \dots$) the specific features interpretable on the basis of the state characteristics $a_{j, m}$ and the relations $b_t = R_t(a_{j, m})$ within the possibilities of the observing system ([10], p. 42).

Definition 2.10. On the basis of the foregoing, the natural phenomenon $\overline{T}$ is the set of the state characteristic values $a_{i, n}$, $i = 1, 2, \dots$ and $n = 1, 2, \dots$ of all the possible relations $R_r(a_{i, n})$, $r = 1, 2, \dots$ as well as of all specific features $F_c(a_{i, n}; R_r(a_{i, n}))$, $c = 1, 2, \dots$, i.e.:

$$\bar{T} = \left[a_{i,n}; R_r(a_{i,n}); F_c(a_{i,n}; R_r(a_{i,n})) \right], \quad (1)$$

where $i = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$ and $c = 1, 2, \dots$

Definition 2.11. The natural phenomenon $\bar{T}_0$ is called closed if the defining state characteristics a_{i_0} , the a_{i_0, n_0} state characteristic values, the relations $R_{r_0}(a_{i_0, n_0})$ between the state characteristics and their features $F_{c_0}[a_{i_0, n_0}; R_{r_0}(a_{i_0, n_0})]$ are known ([11], p. 32).

Definition 2.12. The entity of natural phenomena is closed if each natural phenomenon constructing it is also closed.

Definition 2.13. There exists a $\bar{T}_h$ natural phenomenon inconceivable by man ([11], p. 33).

Definition 2.14. The natural phenomenon $\bar{T}_{\rightarrow}$ is open if its defining state characteristics, state characteristic values $a_{i,n}$ and the relations $R_r(a_{i,n})$ between its state characteristics are known, a part of their features $F_c[a_{i,n}; R_r(a_{i,n})]$ is known in case of i_0, n_0, r_0, c_0 , i.e. $\bar{T}_0$, a different part is existent but unknown in the cases of $\underline{i}, \underline{n}, \underline{r}, \underline{c}$, i.e. $\bar{T}_u$, and the remaining part is inconceivable in the cases of $i - (i_0 + \underline{i}), n - (n_0 + \underline{n}), r - (r_0 + \underline{r}), c - (c_0 + \underline{c})$, i.e., $\bar{T}_h$. $\bar{T}_{\rightarrow} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_u \cup \bar{T}_h$.

Definition 2.15. The entity of the natural phenomenon is open if there exists at least one natural phenomenon that is open.

Definition 2.16. The entirety of natural phenomena of the past, the present and the future defines V (universe) ([11], p. 22), essential features of which are completeness and porousness ([11], p. 22—27).

Definition 2.17. The universe concept V is open if it has a subset V_h consisting of inconceivable natural phenomena.

Definition 2.18. The subset $V_u \cup V_h$ of the open universe concept V which consists of V_u imaginable but unknown and of V_h inconceivable natural phenomena is called black hole, i.e. BH . $BH = V_u \cup V_h$.

Be V universe notion and $V = V_0 \cup V_u \cup V_h$, where V_0 is the existing known, V_u the existing unknown and V_h the inconceivable subset ([11], p. 36).

V^1 universe and V^2 universe are different $V^1 \neq V^2$ if V_0^1 and V_0^2 existing known universe subsets are different. Over time, we will have more and more information about V_u^1 and V_u^2 existing unknown and V_h^1 and V_h^2 inconceivable subsets that will extend V_0^1 and V_0^2 subsets.

Definition 2.19. The entirety V^n of two or more ($n = 2, 3, \dots, \infty$) universes that differ from each other is called multiverse MV .

$$MV = \bigcup_{n=2}^{\infty} V^n$$

Definition 2.20. It is a fact that V universe has a living subset. Let its sign be L .

$$L \subset V$$

Remark. L living subset has an existing known subset – let its sign be L_0 –, has an existing unknown subset – let its sign be L_u – and has an inconceivable subset – let its sign be L_h .

$$L = L_0 \cup L_u \cup L_h$$

The state characteristics, the values of the state characteristics, the relations and the features of the L_0 existing known subset are necessary but not sufficient prerequisites of life. This is true, for example, for the existence of carbon molecules. The state characteristics, the values of the state characteristics, the relations and the features of the L_u existing unknown subset are special concomitants of life, the existence of which we know of, but the essence of which we do not know. This is true, for example, for the Black Bear Effect (BBE), the existence of which we know about, whilst we have no idea about its effect mechanism. ([12], pp. 7–10) Of the state characteristics, the values of the state characteristics, the relations and the features of L_h inconceivable subset we do not even have a notion. Probably, these constitute the majority of the necessary and sufficient prerequisites of life.

3. Mathematical organisation in the universe

Definition 3.1. Non-empty subsets of the entirety of natural processes are called objects. Let their sign be O .

Definition 3.2. It follows from observing the universe that there are organising principles in the universe that create objects from other objects, such as the “effect” referred to in connection with relations.

It is a large blank spot in mathematical organisation that with our human concepts we are unable to give precise answers to the questions of the creation of the universe. All we can do is accept as a definition the principle of “from nothing to something”.

Definition 3.3. All we can do is assume that there were, are and will be state characteristics and values of state characteristics inconceivable by us, that there are relations inconceivable by man between them, and all these have features inconceivable by us, the entirety of which create objects.

Remark. With progress in observing the universe, we get to know more and more elements of the mathematical organisation of the universe.

Definition 3.4. An organising principle that exists because of a particular interest or for a particular goal is called an advantageous principle ([10], pp. 42–53). The goal to be achieved is called wanted entity.

Definition 3.5. Of natural phenomenon $\bar{T}$ the set of states perceivable by living and non-living observation systems and of interpretable relations and deducible specific features, i.e. the wanted entity C_Σ is ([10], p. 42), as follows from Equation (1):

$$C_\Sigma = \left[a_{j,m} \cup R_t(a_{j,m}) \cup F_e(a_{j,m}; R_t(a_{j,m})) \right],$$

where $j < i$, $m < n$, $t < r$ and $e < c$.

One element of the wanted entity C_Σ is the wanted element C , i.e.

$$C_{j,m,t,e} = \{(a_{j,m}); R_t(a_{j,m}); F_e[a_{j,m}; R_t(a_{j,m})]\}$$

as given for a fixed, arbitrary subscript j, m, t, e .

Consequence 3.1. With regard to implementing an interest or goal, the optimum is the wanted entity.

Consequence 3.2. The optimum is the special case of the wanted entity.

Consequence 3.3. The optimum is the special case of the object.

Definition 3.6. Of all specific features determined on the basis of the known relations $R_t(a_{j,m})$ as interpreted over the values of the given state characteristics $a_{j,m}$, $j = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$, the most advantageous one is called *optimum* and denoted by

$$Opt_{j,m,t,e_0} = \{a_{j,m}; R_t(a_{j,m}); F_{e_0}[a_{j,m}; R_t(a_{j,m})]\}, \quad e_0 < e.$$

Theorem 3.1. *Theorem of the optimum wanted entity* ([10], p. 43): Be the state characteristic values $a_{j,m}$, $j = 1, 2, \dots$ and $m = 1, 2, \dots$.

The relations $R_t(a_{j,m})$, where $t = 1, 2, \dots$, should be existent. The specific features detected by the mathematical methods in the state characteristic values $a_{j,m}$ and relations $R_t(a_{j,m})$ should be

$$F_e[a_{j,m}; R_t(a_{j,m})], \quad e = 1, 2, \dots$$

The most advantageous specific feature should be

$$F_{e_0}[a_{j,m}; R_t(a_{j,m})], \quad e_0 \text{ is fixed } \geq 1.$$

Statement. The optimum wanted entity Opt_{j,m,t,e_0} is that of the existing wanted entities that has the most advantageous specific feature.

Proof. [10], p. 44.

Consequence 3.4. The implementation of a particular interest or the achieving of a particular goal can be regarded most of all as an object optimum.

Consequence 3.5. In a universe set consisting of uncountable state characteristics the optimum can also be determined or achieved with the PMSB method. Thus, the realisation or coming into being of a particular object may also happen with the PMSB method.

In case of practical human application, the generalisation of the PMSB is performed by the user on the basis of his specific interest relations. In nature, the generalised wanted entity or the optimum, respectively, is determined by the mechanism of action resulting from the extended state characteristics ([1], p. 62; [2], pp. 28—35; [7], pp. 27—32).

The mechanism of action may constitute a complicated system and represents a given regularity. As already explained, it is not necessary to explore the regularity by modelling as it is represented by the entirety of the extended state characteristic values.

The existence of the advantageous principle follows from the mechanisms of action.

Type 1 PMSB task. Selection entity $C_{select} \rightarrow$ identity entity $C_{select} \rightarrow$ advantageous principle $\rightarrow Opt$ as the solution.

Type 2 PMSB task. Advantageous principle $\rightarrow Opt \rightarrow$ entity pertaining to the entity C_{opt} as the solution.

Complex PMSB task. The entirety of the type 1 and type 2 PMSB task, for example: partial 1 selection entity $C_{select}^I \rightarrow$ identity entity C_{opt}^I advantageous principle $\rightarrow Opt^I \rightarrow$ entity pertaining to the optimum C_{opt}^I as the solution.

For that matter, there are philosophies and religions that attribute supernatural ordering principles to a certain belief or ideal, and the advantageous principle follows from it.

Since selection is planned by the advantageous principle, the method was named Planned Method of Selection, with the first letter of Bán being attached to it later as a result of its applications.

Consequence 3.6. Two objects, O_1 and O_2 , are different or miss each other, if

$$O_1 \cap O_2 = 0.$$

Definition 3.7. The attribute of an object consisting in its existence is called balanced inertia.

Definition 3.8. An object O_n , $n = 1, 2, 3, \dots, K$ is absolutely stable, if a $Q(O_f)$ finite fixed environment pertaining to an f fixed index exists, part of which is an O_n , $n = 1, 2, 3, \dots, k$ object. The $Q(O_f)$ fixed environment is called limit of equalisability, $k \leq f$ ([1], pp. 14–23, 56–59, 62–65; [2], pp. 14–35, 69–72, 256–257, 260–261; [11], pp. 37–39).

Thus, $O_n \subset Q(O_f)$, $n = 1, 2, 3, \dots, k$ and f fix index $k \leq f$.

Consequence 3.7. Above the f fix index as so-called critical index, the given object is no longer part of the limit of equalisability, i.e., it “leaves” it, which means that it is not absolutely stable. $O_{n+m} \notin Q(O_f)$, $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

The O_{n+m} object is called unstable or critical object ([9], p. 31).

4. Application in practice

The above mathematical model for describing the universe helps in choosing the most suitable strategy, determining the optimum and working out expert systems in an arbitrary subset of the universe, for example, in everyday practice.

5. Acknowledgements

Direct analysis of sets of states introduced half a century ago brought about a major change of approach. The first screening of any new idea, concept or method was always performed by my extraordinarily sharp-witted wife Andrea Sikos. Then I discussed the significance, the flaws, the development potential and the applicability of the algorithms with authorities in the respective fields, among them: László Bezzegh, Ferenc Béldi, Antal Bondor, Csaba Csáky, László Dala, János Fischer, Vilmos Frenyó, Csaba Forgács, Pál Gregus, Sándor Györgyi, Lajos Jánossy, Béla Keresztesi, András Madas, János Magyar, György Marx, Artúr Moór, Bálint Nagy, Ernő Nemky, Lénárd Pál, András Prékopa, Alfréd Rényi, Egon Roxer, Rezső Solymos, Gábor Soós, Albert Stasney, Sándor Szalay, Ferenc Szidarovszky, József Szőke, Kálmán Tompa, and István Vincze. I would like to thank all of them for their help and support.

I would particularly like to thank Alfréd Rényi who supported the elaboration of this method even back when it was still entirely new and regarded as unusual.

Special thanks to Piroska Draskóczy for her fast and accurate translation.

6. Summary

In this article, the universe is described with state characteristics, values of state characteristics, relations and their features. The existent known, existent unknown and inconceivable entirety of all these makes up the natural process. The entirety of the past,

present and future natural processes constitutes the universe. For the creation of the universe, we assume the existence of the definition of “from nothing to something”, of which the PMSB method can also be a part.

References

- [1] **BÁN, István:** Új utak a növényvédelmi vizsgálatokban [New paths in plant protection investigations]. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1973, p. 275.
- [2] **BÁN, István:** Biomatematika és alkalmazása a növénytermesztésben [Biomathematics and its application in plant cultivation]. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 1977.
- [3] **BÁN, István:** Talajerő-utánpótlási szaktanácsadás számítógéppel (Computer-aided technical consultancy on soil replenishment], in: *Magyar Mezőgazdaság*, Vol. 33 (1978), No. 33.
- [4] **BÁN, István:** A kiválasztási matematikai modell felhasználása a trágyázási szaktanácsadáshoz [Using the mathematical model of selection in technical consultancy on manuring], in: *Agrokémia és Talajtan*, No. 28 (1979).
- [5] **BÁN, István, RISKÓ, László:** Interaktív számítógépes talajerő-utánpótlási szaktanácsadó rendszer [Interactive computerised technical consultancy system on soil replenishment] (Summary of a lecture), in: *Számítástechnika*, 1979.
- [6] **BÁN, István, RISKÓ, László:** Számítógépes talajerő-utánpótlás [Computerised soil replenishment], in: *Magyar Mezőgazdaság*, Vol. 34 (1979), No. 7.
- [7] **BÁN, István:** A növénytermesztés szolgálatában [In service of plant cultivation], in: *Számítástechnika*, 1980.
- [8] **BÁN, István:** Kiválasztási algoritmusok és alkalmazásuk az agrárgazdaságban [Selection algorithms and their application in agriculture], in: *Alkalmazott Matematikai Lapok*, Vol. 10 (1984), pp. 413—426.
- [9] **BÁN, István:** Biomathematics and its Application in Plant Cultivation. Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo, 1988, p. 204.
- [10] **BÁN, István:** Mathematical Exploration of the Environment. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1995, p. 116.
- [11] **BÁN, István:** Biomathematics. PMSB Methods in Forestry. EP Systema Kiadó, Debrecen, 2002, p. 222.
- [12] **BÁN, ISTVÁN:** Biophysics. Graphicom, Budapest, 2004, p. 200.

Középkori számolási eljárásokról

Porubszky István

Cseh Tudományos Akadémia Informatikai Kutatóintézete, Prága
sporubsky@hotmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban bemutatunk néhány módszert arra, ahogyan a négy alapműveletet használták középkorban, és dióhéjban körvonalazzuk a történelmi hátterüket.

ABSTRACT. In the paper, several medieval algorithms for four basic arithmetic operations are presented together with a short outline of their historical background.

1. Bevezetés

A különféle nézetek szerint a 14 – 17. század közötti időszakban ért véget a középkor. Több nagy jelentőségű esemény is az európai tudományok fejlődését segítette, és Európa a tudományos és kulturális vezető szerepet átvette Kína és az arab világ helyett. A tudományos gondolkodásban új, fontos szerepet kaptak a kísérletek, és új technológiai ötletek vezettek a káoszból az új rend felé.

A tudomány és a matematika még a 14. században is részben a hittudomány szolgálatában állt. A számolást gyakorlati céloktól vezérelve tanították, például egyházi ünnepnapok kiszámításához. Szent Ágoston (354-430) hangsúlyozta a számok ismeretének fontosságát és számokról *A keresztény tanításról* című művében írja [2, XXXIX,56]: ... *a számtant sem az emberek hozták létre, hanem csak rájöttek és kipuhatolták szabályait ... hogy háromszor három ne legyen kilenc, ... hogy a hármas számhoz viszonyítva ne legyen háromszoros, a hatoshoz mérve egyszer és félszer akkora, hogy valamely számnak a kétszerese legyen, mivel a páratlan számoknak fele nincsen ... változatlan szabályok vannak, melyek semmiképp sem emberi alkotások, hanem csupán a tehetségesek éleselméjűségének leleményei.* A hagyományos vélekedés szerint Ágoston a matematikát mindennél jobban gyűlölte, és a matematika nála nem tudomány, mert több helyen megtalálható ez a fordítás (A Genezisről szó szerinti értelemben, 2, XVII, 37): *Jó keresztények óvatosak legyenek a matematikusokkal és minden más tanítóval, kik üres dolgokat hirdetnek. A veszély már régóta valóságos, hogy a matematikusok szövetséget kötöttek az ördöggel az ember lelke elhomályosítására, és az ember pokolhoz láncolásában.* Nagyon valószínűtlennek tűnik, hogy Sz. Ágoston, mint a kereszténység és különösen a nyugati gondolkodás egyik központi személyisége, és az első középkori és utolsó ókori gondolkodónak tekintendő, ilyen negatív kapcsolatban állna a matematikával. Nagyon valószínű, hogy a helytelen hivatkozás rossz fordításból ered. Az ágostoni időben a *mathematici* állat a numerológusokat vagy az asztrológusokat jelentették.

Persze, korábban és később is találhatunk kiemelkedő tudósokat, akik nem szerették a matematikát. Al-Gazáli (1058-1111) arab nyelvű perzsiai muszlim teológus és filozófus, az

egész iszlám világ egyik legnagyobb gondolkodója szerint a számok manipulálása az ördög munkája.

Aurillaci Gerberttet (940-1003), a későbbi II. Szilveszter pápát (999 – 1003) boszorkánysággal gyanúsították matematikai és rendkívüli számolási képessége miatt. Őneki, aki a Szent István királyunknak koronát küldött, pontosabban a mai korona felső részét és megalapította Magyarország első (Esztergomi) érsekségét, tulajdonítjuk az arab számjegyeknek bevezetése Európában. Azok használatát Spanyolországban, az arab műveltség európai központjában Cordobában tanulta meg. Mint első nyugat európai tudós honosította meg a nyugat Európában a mórok által közvetített szanszkrit számjegyekkel való számolási eljárásokat, melyeket másfél évszázaddal korábban Al-Khvarizmi fejlesztett ki. Olyan számításokat tudott fejben elvégezni, amelyek nagyon nehezek voltak azok számára, akik csak római számokat használtak. Ez *pedig nincsen az ördöggel való cimboraság nélkül*.



1. ábra. II. Szilveszter és az ördög *Chronicon pontificum et imperatorum* (1277) szerint

A középkori idő végének egy lényeges vonásának a matematika kiemelkedése bizonyult. Thomas Bradwardine (1290 – 1349), középkori angol matematikus, csillagász, az Oxfordi Egyetem magisztere, teológiai doktor és rövid ideig canterbury érsek, már abban az irányba érvel, hogy a számok az alapja az egész természetfilozófiának. *A matematika a kinyilatkoztatója minden valódi igazságnak.*

Nem mind arany, ami fénylik. Jacques Le Goff (1924 – 2014) a híres francia történész, a középkorra orientált szakértő, egyik könyvében [1] így jellemezte a középkori népi számítási képességet: *A középkor nem számol a 12. századig, vagy legalábbis nem szereti a számokat. Amikor a középkori emberek számokat használnak, azok szimbólumok számukra: 3, 7, 12 és többszöröseik, vagy nagy szám, ezer vagy millió. ... A középkori falusiak nem írnak. A forrásokban csak közvetve jelennek meg, abban amit a papság mond róluk. De a középkori Európa nyolcvan százaléka falusi.*

2. Matematika a középkori egyetemeken

Az az egyetemi világ és egyetemi rendszer, amit ma ismerünk, középkori alapokon nőtt fel. Az első európai egyetemek katedrálisok mellett jöttek létre. A középkori egyetemek viszont egyedülálló intézmények voltak, teljesen másképpen szerveződtek, mint a korábbiak. Bár egyházi alapításúak voltak, mégis teljes önállósággal rendelkező szervezeteknek

számítottak, és a pápát kivéve minden egyházi és világi hatalomtól függetlenek voltak. II. Szilveszter volt az atya az úgynevezett quadrivium négy tudományágának bevezetésével, ami az aritmetikából, a geometriából, a zenéből és az asztrológiából (csillagászatból) állt össze. Ő bővítette ki addigi trivium (a grammatika, a dialektika és a retorika) tárgyakat. Gerbert ezeket a tudományokat még az arabok szomszédságában működő ibériai kolostorokban sajátította el. Azt megelőzően Gerbert a trivium alapján tanított.

A legelső szintű egyetemi végzettség, a baccalaureus (“babérkoszorús”) cím volt – ezzel a fokozattal taníthattak az alsóbb iskolákban. Két-három évi további tanulás után a magister (“mester”) fokozatot lehetett elérni, amely jogot adott előadások tartására a szabad művészetek karán.

Az alapítást követő években a prágai Károly Egyetem hallgatóinak a baccalaureus cím eléréséhez Joannis de Sacro-Bosco *Algorismus* című (más néven *De arti numerandi*) könyvéről szóló előadásokat kellett hallgatniuk. Ez a könyv jelentősen befolyásolta Európában az arab számok használatát a 13. század végén. A könyv versekbe volt írva az aritmetikai szabályok egyszerűbb memorizálása érdekében (természetesen latinul). A 11 fejezetet mindegyike egy-egy aritmetikai művelettel foglalkozott: numeráció (az indiai számok olvasása és írása), összeadás, kivonás, felezés, kettőzés (duplázás), szorzás, osztás, a számtani sorozat összegzési képlete, négyzet- és köbgyökvonás, stb., abban az időben ezek mindegyike különálló művelet jelentett.

Előadásokon a hallgató megtanulta azt is, hogy kell az abakuszon kavics segítségével számolni. Hallgatónak 3 heti előadásért fél prágai garast kellett fizetni.

Különböző módszerek maradtak fenn az ókori Egyiptomból, Babilonból, Görögországból, az Indus-völgyből, és Kínából. Kétszerezést először az egyiptomiak használták a szorzáshoz. Az egyiptomi matematika számírása és a számolás additív volt. Számírásuk 10-es alapú, és a 10 hatványaira különböző jeleket használtak. A szorzást kezdetben kettőzésre vezették vissza (később tízszeresre is). Az egyiptomiak igyekeztek mindent összeadásra vezetni vissza, és csak három aritmetikai műveletet ismertek:

- összeadás,
- kivonás,
- kettőzés.

A kettőzés nem a kettővel való szorzást jelenti a mai felfogásban, mert a kettővel való szorzás elvégezhető az egyszeres ismerete nélkül, hiszen elegendő összeadni a számot önmagával. Az egyiptomi módszer a Jahmesz által írt Rhind-papirusz szerint sorozatos kettőzésen és összeadáson alapul. Például a 13 és 21 egyiptomi összeszorozása kettőzésekkel (mai jelölésekkel, bal tábla):

✓	1	21	✓	13	21
	2	42		6	42
✓	4	84	✓	3	84
✓	8	168	✓	1	168
	13	273			273

Az egyiptomi számológépmester addig folytatta a kétszerezést, ameddig elérte, hogy az első tényező, jelen esetben a 13, összehozható a bal oldali oszlopban álló kettes hatványokból, ezeket a kétszerezés közben megjelölte, és a végén az alkalmas szorzatokat a jobb oldalon összeadta.

Ahogy itt leírtuk, ezt az óegyiptomi szorzási módot még a középkorban is tanították Európa-szerte. Az egyiptomi műveletekhez hozzátartozik még a felezés. Az egyiptomi szorzás a középkorban a „kétszerezés és felezés” módszerévé fejlődött ki. Megjegyezzük, hogy bár az utóbbi két művelet meglepő számunkra, a középkorban szerepelnek az aritmetikai

műveletek listájában. Például, 1400 körül a cseh matematikus, csillagász és orvos Prachatic Christian (Křišťan z Prachatic) írta az *Algorismus prosaycus* elnevezésű tankönyvet a prágai Károly Egyetem hallgatói számára, amelyben így írt: *megpróbáltam röviden összeállítani a számítási művészet alapjait*. A munka megkülönböztet kilenc aritmetikai műveletet a fent említett de Sacro-Bosco könyvben leírtak szerint.

A fenti felezést az ún. *orosz parasztok szorzás* használta, amelynél csak ismételt kettőzésre és felezésre van szükség (jobb tábla), és ezért előnyös volt az tanulatlan orosz muzsikok számára. Egymás mellé írjuk a két összeszorzendő számot. Az egyiket (leginkább a nagyobbikat) duplázzuk, de a másikat felezzük. Ha kapunk maradékot, azt elhagyjuk. Ezt addig végezzük, amíg a felezéssel el nem jutunk 1-ig. Az így duplázással kapott olyan számokat, amelyik a felezéses oszlopban páros számot tartalmaznak, kihagyjuk. A megmaradt számokat összeadjuk, és az összeadás eredménye a adott két szám szorzata.

3. Ujjak – a legrégebbi digitális számítógép

A középkori ember toll és papír nélkül végzett minden számítást (elszigetelt esetekben részeredményeket jegyzett le), de nem segédeszközök nélkül. A legfontosabb, elengedhetetlenek és mindig elérhetők voltak a saját kezei és a saját ujjai. A kéz ujjai mint egy több golyós számláló eszköz működtek (a golyók mint ujjízületek szerepeltek, a kéz tenyér, és ha szükség volt rá, erre a célra használta az ujjbegyeket, tenyérrészeket, stb.). A számoló gyakran mnemotechnikai verseket használt, amelyeket a számításnál hangosan mondott fel magának fejből, és amelyik a numerikus értékeket kódolták.

Erről a tényről, hogy az ujjakkal való számolás valamikor fontos szerepet játszott az életben, tanúskodik a nyelvünk. A számjegyeket angolul *digits* és a franciául *doigts* szavak jelölik. Mindkét kifejezés a latin *digitus* (ujj) szóból származik.

A számok ábrázolása ujjak segítségével (jelenleg is használt rendszer) a benedekrendi szerzetestől, tiszteletre méltó Szent Bédától (Venerabilis) (672/673 – 735) származik. A rendszert leírta Az *idő számításáról* (De temporum ratione) című munkájába. Mégpedig annak az első fejezetében, az *Tractatus de computo, vel per loquela gestusok digitorum*-ban. Ez az első írásban fennmaradt ábrázolás az ujjakon való számolásról. A rendszer lehetővé teszi a két kézzel való számolást 9999-ig, de nehézkes a 100 feletti értékekkel. Béda rendszerét az egész középkorban használták. Valószínűleg Béda nélkül az ujjakon számolás, mint egy európai középkori kulturális-történelmi kategória, feledésbe merülne, mivel minden későbbi írás visszatér a Béda fejtegetéséhez. Az ujjakkal való számolásra figyelmet szentelt Fibonacci is a *Liber Abbaci* művében. Az első fejezetének végén egy részletes leírást ad az ujjakkal történő számolásról. Az olasz ferences rendi szerzetes, egyetemi tanár, és matematikus Luca Pacioli (1445? – 1514), Leonardo da Vinci matematikatanára, részben módosított Béda rendszerét a nagy enciklopédikus könyvében, az egyik leghíresebb műben, és az egyik első nyomtatott könyvben: *Summa de arithmetica, geometrica, propotioni et proporcionalita*, (Az aritmetika, a geometria, az arányok, és az aránylatok összefoglaló tárgyalása), amely 1494-ben jelent meg Velencében, ráadásul nem latin, hanem olasz nyelven. A Béda-féle rendszerben, az ujjak mozgatása és pozícionálása jelzi a különféle számokat, különbözőképpen behajlított ujjak jelölték az egyeseket, tízeseket, stb.

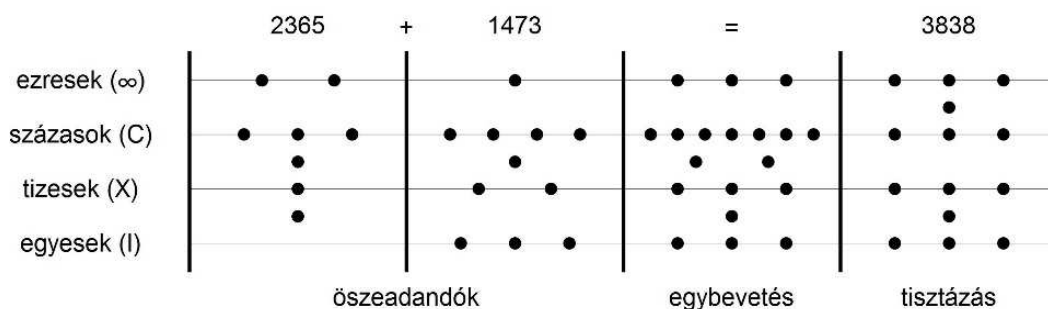
Európában a középkorban gyakorlat volt az ujjakon történő számlálás. Ujjaink nem csak összeadni és kivonni segítenek nekünk, hanem szorzáshoz is használhattuk. Az egyik ilyen rendszert, a *regula ignavi*-t, néha cigány (egy másik módosítása: pillangó) szorzásnak is nevezik. Az eljárás a következő: mindkét kezünkön annyi ujjat egyenesítünk ki, amennyivel a tényező nagyobb, mint 5. Ekkor az egyenes ujjak összege adja a tízek számát és a fel nem emelt ujjak (a kéz tenyerében rejtett ujjak) szorzata eredményezte az egyeseket. Ennek a módszernek létezik szinte egy „negatív” változata is: Mindkét kezünkön annyi ujjat hajlítsunk

be, amennyivel a tényező nagyobb, mint 5. A behajlított ujjak összege adja a tízesek számát, az emelt ujjak szorzata pedig az egyeseket. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy lecsökkenti az egyszerű szorzótábla ismereteit a negyedrésze, 5×5 -ösre. Az eljárás bizonyítása nagyon egyszerű: $(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 - a)(5 - b)$.

4. Abakusz

Az *abakusz* az első számolóeszköz, amelynek ősi formáit majdnem minden ókori kultúrában, és valószínűleg egymástól függetlenül, használták. Megnevezésére sokszor helyi nevét használták: *számvető* (magyar), *szcsoti* (orosz), *szuan-pan* (kínai), *szoroban* (japán), stb. Érdekes az orosz *szcsoti* abakusz verzió. A középkor vége felé a kínai abakusz eljutott Oroszországba és ott az európai hatás alapján módosulva terjedt el, és mostanáig használatban van.

Rómában kőből, bronzból vagy agyagból készített *abakuszt* használtak, amelyeken kavicsokkal (*calculi*) számoltak. A számolás latin eredetű neve *calcularé*, amely a számológépek angol eredetű kalkulátor elnevezésének is az eredete, a kavics azaz *calculus* szóból származik (innen származik tehát a latin *calculus* (számolás) szó). Másik formája több, vékony rudat vagy pálcát tartalmaz, amelyek mindegyikén esetleg különböző színű, meghatározott számú és rendű csúsztatható korong vagy golyó található. Gyakran csak egy hét barázdával ellátott agyagtábla volt, mindegyik barázda a római számok egyikét képviselte. A golyókat ezekben a barázdákban lehetett mozgatni. Ezek segítségével végezte el a kezelő az összeadás és a kivonás műveletét.



2. ábra. Összeadás abakusszal

Szorzás és osztás elvégzésére csak bonyolult szabályokkal alkalmazható. Például, az elsődleges probléma a szorzásnál, amely a legmagasabb hatványtól kezdődik, abban áll, hogy azt a legmagasabb 10 hatványt meg kell határozni, vagyis az abakusz szempontjából azt a barázdát kitűzni, amelybe szorzat első golyója kerül. Ehhez egy kényelmes szabály van, hogy ez $c = a + b - 1$ barázda lesz, ahol a a szorzandó által elfoglalt barázdák száma, b a szorzóval elfoglalt barázdák száma, és c a szorzat barázdáinak száma. Ezt a szabályt már Arkhimédész (kb. i.e. 287 – i. e. 212) is ismerte, és a középkori abakuszisták használták.

Középkori Európában használtak még egy 30 oszlopba osztott sima falapot, általában az első hármat törtszámokkal való számoláshoz, a megmarad oszlopokat a természetes számokkal történő számolására (egységek, tízesek, százaskok, stb). Aurillaci Gerbert bevezetett egy érdekes abakusz módosítást: ahelyett hogy a kavicsokat rakta a megfelelő helyre vagy oszlopokba, számolási bélyegeket (apex, apices) használt a keleti arab számjegyekkel (úgynevezet *ghubar* („homoktábla” vagy „portábla”)). Így valójában a tizedes helyiértékes rendszert (nulla nélkül) alkalmazta, és később csak a kolostori iskolákban jelent meg. Egyébként a 15. század végéig az abakuszt a római számjegyekkel használták.

A 12. század végétől az abakuszt az asztalra rajzolt vonalakkól álló táblázat váltotta fel. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy nincs szükség semmilyen eszközre. Elég volt több párhuzamos vonalat megrajzolni és minden vonalhoz egy nagyságrendet (egyesek, tízesek, százaskok, stb.) hozzárendelni. A kavicsokat vagy a vonalakra vagy a köztük lévő hézagokban (ahol a fele értékük volt) helyezték el. Ezt még a 16. században is sikeresen használták. A számvető táblák a középkori kereskedők nélkülözhetetlen eszközei voltak. Később a számvetők vagy letörölhető táblákon számokkal, vagy abakuszon számoló pénzekkel számoltak. A számoló asztalok vagy táblák mellett használták még ún. számoló-terítőket vagy számoló-szőnyegeket. Ezek tulajdonképpen egy textíliára hímzett vagy rajzolt abakuszt alkotnak, melyet bárhol le lehetett kiteríteni és használni. A régi francia *bure*, *burel* szóból, amely "*durva gyapjú*"-nak felel meg, származik a bureau, Büro, stb.

A római számokat a 14. századig használták, amikor a matematikai és gazdasági számításokban lassan de visszavonhatatlanul kiszorították őket az indiai-arab számok. Fibonacci (1180? – 1250), aki jelentősen segített az arab számok európai felhasználásában, a *Floss* című művében az $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ egyenletet tárgyalja. Anélkül, hogy jelezne, hogyan találta meg az egyenlet egy közelítő megoldását, váratlanul a hexadecimális rendszerben adja meg azt: $1^{\circ}22'7''42'''33^{iv}4^{v}40^{vi}$. Azt a tényt, hogy az arab számok általános használata lassan terjedt el, mutatja, hogy pl. Kopernikusz kétféle módon írta a számokat. A hatvanas alapú rendszerben írt és fokokba mért szögeket római számokkal jegyezte, ugyanakkor az egész számokban mért hosszúságokat arab számokkal.

5. Aritmetikai műveleteket

A középkorban még a négy alapművelet elvégzése sem volt egyszerű feladat. A 15. század végén a nagyobb írásbeli feladatok még inkább előtérbe helyezték a vonalakon történő számolást. A tizedes helyiértékes rendszer elterjedésével az aritmetikai műveleteket kezdték írásban végrehajtani és a használt módszereket fokozatosan tökéletesítették. Maga számítás balról jobbra haladt, ami azt jelentette, hogy a legmagasabb helyiértékű helyen kezdték. Ez okozta azt, hogy a részleges eredményeket a számítás során gyakran kellett korrigálni, mert az alsóbbrendű jegyek befolyásolták a már kiszámított felsőbb rendű részeredményeket. Ezek az eljárások általában Indiából terjedtek el, ahol poros- vagy homoktáblákon végezték el őket, lehetővé téve a részleges eredmények egyszerű törlését és azonnali módosítást. Európában ezeket a eljárásokat papíron kezdték végrehajtani, és emiatt a eredmények törlése nem volt ennyire egyszerű. Ezért az eredmények törlését a szükségtelen számjegyeknek áthúzás váltotta fel. A számítás eredményét azután a megmaradt számjegyekből állították össze.

5.1. Összeadás

A számoló felírta az összeadandókat egymás alá, az eredményt pedig általában fölője írta. Például $3478 + 5673 + 9784 = 1893$. Összeadni a legmagasabb helyiértékű helyen kezdték:

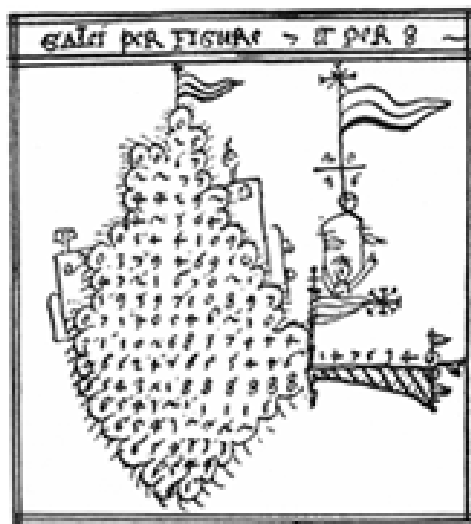
$$\begin{array}{r}
 8 \quad 9 \quad 3 \\
 1 \quad \cancel{7} \quad \cancel{7} \quad \cancel{7} \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \\
 5 \quad 6 \quad 7 \quad 3 \\
 9 \quad 7 \quad 8 \quad 4
 \end{array}$$

Ezt az összeadási módszert megtalálhatjuk még a 16. századi tankönyvekben, és időnként később is.

$$\begin{array}{ccccccccc|cccc} & & & & 3 & & & & & & & & & \\ & & & \pm & 5 & & & & & & & & & \\ & & 3 & 4 & 3 & & & & & & & & & \\ \pm & 9 & 5 & 4 & & & & & & & & & & \\ 5 & \pm & \pm & 8 & 5 & & & & & & & & & \\ \pm & 9 & 5 & 6 & 7 & | & 6 & 2 & 3 & & & & & \\ & 8 & 4 & 4 & 4 & & & & & & & & & \\ & 3 & 8 & 8 & & & & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

5.4. Osztás

A legelterjedtebb középkori módszer a több számjegyű számok osztására egy olyan eljárás volt, amely ugyanolyan nevet kapott, mint egy szorzás: *galea* vagy *battello*. Ez az algoritmus is Indiából származik, melyet poros táblákon végeztek el. A $239567:384 = 623$ maradékkal 335 maradékos osztás az előző ábra jobb oldalán látható.



3. ábra. Egy 16. századi osztásnak a sziluettje

6. Összefoglaló

A középkor egy forduló korszakot jelentett a ma használt négy alapművelet elvégzésének kialakításában. A hatékonyság növekedésében alapvető tényező volt az Indiában kidolgozott tízes helyiértékes rendszer átvétele, továbbá az arab tudósok által alkalmazott számolási eljárások hozzáillesztése az európai körülményekhez. A dolgozatban néhány ilyen alapvető számolási módszert mutattunk, kitérve a szóban forgó korszak rövid történelmi hátterére.

Köszönetnyilvánítás.

A szerző szeretné kifejezni köszönetét a meghívásért Szalay László tanár úrnak, hogy részt tudott venni és hozzájárulni Sopronban a *Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium* (MOKUS) 2018-as munkájához. Szeretné még kifejezni mély köszönetet a Dimenziók szerkesztőségnek jelen szöveg a grammatikai korrekciójáért. Végül, de nem utolsó sorban, a szerzőt az RVO 67985807 stratégiai fejlesztési finanszírozás támogatta.

Irodalomjegyzék

- [1] **Le Goff, J.**, À la recherche du Moyen Âge (avec la collaboration de Jean-Maurice de Montremy), Louis Audibert, Paris, 2003.
- [3] **Városi, I.**, Szent Ágoston a keresztény tanításról, Szent István Társulat, Budapest, 1944.

Probléma megoldási módszerek egy térgeometriai feladat kapcsán

Barta Edit

Soproni Egyetem Matematikai Intézet
barta.edit@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Egy térgeometriai feladaton keresztül szeretném bemutatni azokat a probléma megoldási módszereket, gondolkodási módokat, amelyeket az élet különböző területein dolgozó, munkájuk során konstruktív gondolkozást igénylő feladatokkal találkozó emberek alkalmaznak, ha egy-egy problémával találkoznak. A példán keresztül arra is szeretnék rámutatni, hogy egy-egy kézzelfogható feladattal hogyan tehetjük szívesebbé, érdekesebbé az integrálszámítás oktatását.

ABSTRACT. We show how people working in different fields use different thinking methods and problem solving skills for figuring out the same spatial geometrical exercise. We also point out that a real life problem can give a challenge in teaching integral calculus.

1. Bevezetés

Ennek a cikknek az ötletét egy magam által megélt történet adta. Néhány évvel ezelőtt közvetlen kollégáim körében valaki felvetett egy térgeometriai feladatot, amelynek az eredete számomra nem ismert. Egy kockát két lappárjára merőlegesen átfúrunk egy-egy hengerrel úgy, hogy a henger palástja érinti a kocka másik négy oldalát. Mekkora az így megmaradó test térfogatának és az eredeti kocka térfogatának a hányadosa? Többünk fantáziáját megmozgatta a feladat, de végül csak hárman foglalkoztunk a problémával, és jutottunk el a megoldásig: a technikus, a faipari mérnökhallgató és a matematika-fizika szakos tanár. Megoldásunk szinte viccebe illő, legalább is alátámasztja azokat a vicceket, amelyek a matematikusok körülményes gondolkodásmódját állítják középpontba szemben a mérnök frappáns megoldásaival. Oldalakat számoltam teleírva integráljelekkel, többször is mellékútra tévedve, míg kikristályosodott a legrövidebb megoldás. A technikus rövid matematikai próbálkozás után elkészítette a kérdéses testet, és tömegméréssel jutott helyes eredményre. A mérnökhallgató pedig leült a számítógép elé, és egy tervezőprogram segítségével megrajzolta az átfúrt kockát, majd kiszámoltatta a megmaradó rész térfogatát. Itt elsősorban a saját, matematikai megoldásaimat szeretném ismertetni a mellékutak nélkül. Egyik célom az, hogy rámutassak arra, hogy a túlságosan száraznak tűnő integrálszámítási tananyagot igenis van lehetősége az oktatónak élettől feltölteni, érdekesebbé, szívesebbé tenni egy-egy ilyen feladattal.

2. A feladat és a megoldások ismertetése

A feladat

Egy kockát henger alakú lyukkal átfúrunk az egyik szemközti lappárjára merőlegesen úgy, hogy a lyuk tengelye egybeesik a kocka ezen lappárjára merőleges szimmetriatenge-

lyével, és érinti a kocka másik négy oldalát. Ezek után ugyanilyen lyukat fúrunk egy másik lappárra merőlegesen is. Hányad része a kocka így megmaradó térfogata az eredeti térfogatának?

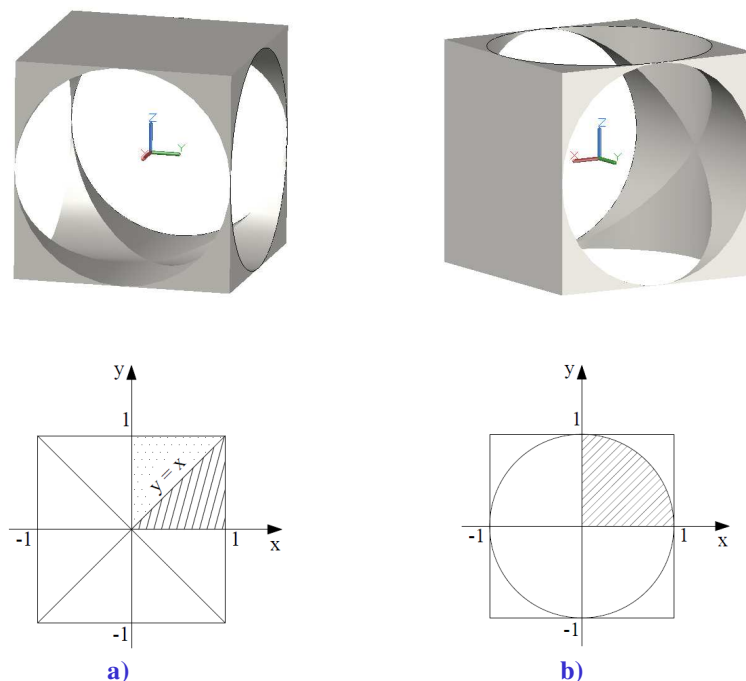
A „matematikus” megoldásai.

Először a megoldás menetét találjuk ki! Ha a kocka térfogatából kivonjuk az egyik henger térfogatát majd a másikat, akkor a két henger közös részének térfogatát kétszer vontuk ki, tehát azt még hozzá kell adni az eredményhez. Egyfajta szita-formulával:

$$V_{\text{megmaradó}} = V_{\text{kocka}} - 2V_{\text{henger}} + V_{\text{közös}}.$$

A kocka és a henger térfogata jól ismert képlettel számítható, tehát a feladat kulcsa a két henger közös részének meghatározása. Erre több lehetőség is kínálkozik, ezek közül szeretnék néhányat bemutatni. Először érdemes a testet elképzelni, vázlatosan megrajzolni. Már itt felmerül az első probléma. A háromdimenziós test két dimenzióban való szabadkézi megrajzolása kissé nehézkes, jó térlátást igényel, ámde a hallgatóknak többnyire ez az egyetlen lehetőség áll rendelkezésre, főleg ha akkor hallják először a feladatot, és ott helyben órán meg is kell oldani. Úgy vélem, pedagógiaiilag helyesebb, ha az oktató is szabadkézzel rajzolja fel a táblára. A kész ábrák kivetítése látványosabb ugyan, de hitelesebb és könnyebben követhető a valós időben felrajzolt ábra. Ennek ellenére jelen cikkben a szemléltető ábrák számítógéppel készültek.

A feladatot legkézenfekvőbb integrálszámítással megoldani. Először helyezzük el a két átható hengert a háromdimenziós derékszögű koordináta-rendszerben. Erre két lehetőség kínálkozik, melyeket az 1. ábra szemléltet.



1. ábra. A test elhelyezése a koordináta-rendszerben és vetülete az xy -síkra

Az origót mindkét esetben a kocka középpontjába helyeztük. Szimmetria okok miatt a közös rész térfogatát elegendő az xy -sík pozitív sáknegyede felett kiszámolni, így az egész rész nyolcadát kapjuk meg. Mivel a kérdés egy viszonyszám, a megoldás független a kiinduló

kocka méretétől. Célszerű tehát az oldalélét 2 egységnyinek választani, így az átfúró henger sugara 1 egység lesz. Az a) elrendezés esetén egységnyi oldalú négyzet-tartományon kell integrálni két hengerfelületet, míg a b) esetben negyedkör tartományon kell integrálni egy hengerfelületet. Szükségünk van az x -, y - és z -tengelyű hengerfelületek egyenletére, melyek a következők:

$$x\text{-tengelyű hengerfelület: } y^2 + z^2 = 1,$$

$$y\text{-tengelyű hengerfelület: } x^2 + z^2 = 1,$$

$$z\text{-tengelyű hengerfelület: } x^2 + y^2 = 1.$$

A feladat megoldását a

$$\frac{V_{\text{megmaradó}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{V_{\text{kocka}} - 2V_{\text{henger}} + V_{\text{közös}}}{V_{\text{kocka}}}$$

formula fogja szolgáltatni, amelyben

$$V_{\text{kocka}} = (2r)^3 = 2^3 = 8,$$

$$V_{\text{henger}} = r^2\pi(2r) = 2\pi.$$

1. megoldás

Nézzük először az 1. ábra a) elrendezését. Az x - és az y -tengelyű hengerek az $y = x$ és az $y = -x$ egyenletű síkokban metszik egymást, melyeknek az xy -síkra eső vetülete ugyancsak az $y = x$ és az $y = -x$ egyenletű egyenesek. Az I. síknegyed vonalkázott tartománya felett az y -tengelyű henger helyezkedik el lentebb, míg a pöttyözött tartományon az x -tengelyű. Mindkét tartomány felett ugyanakkora térfogat van, ezért elegendő az egyiket számítani, s az eredményt 16-tal szorozni. Ez most a vonalkázott tartomány feletti rész lesz. Tehát feladatunk az, hogy az 1. a) ábrán látható vonalkázott háromszög tartományon integráljuk az y -tengelyű hengerfelületet, vagyis az

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} \quad (1)$$

kétváltozós függvényt.

A két változó integrálási sorrendjétől függően kétféleképpen írhatjuk fel az integrált:

$$V = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1 - x^2} dx dy$$

vagy

$$V = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2} dy dx.$$

Az előbbi integrál esetében az

$$x = \sin t$$

helyettesítés alkalmazandó, amellyel kissé hosszabb és körülményesebb a számolás, míg az utóbbi integrál egészen egyszerűen elvégezhető.

$$V = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2} dy dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} [y]_0^x dx = \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx \quad (2)$$

Az y változó szerinti integrálás után egy klasszikusnak mondható integrált kapunk. Egyik megoldási lehetőség az

$$1 - x^2 = t$$

helyettesítés. Másik lehetőség az, hogy a kifejezést megszorozzuk -2 -vel és el is osztunk vele:

$$V = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2}dx,$$

ekkor egy

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

alakú integrált kapunk, ahol

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x^2, \\ f'(x) &= -2x, \\ n &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A megoldás:

$$V = -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}.$$

Tehát a két átható henger közös részének térfogata

$$V_{\text{közös}} = 16V = \frac{16}{3}.$$

A feladat megoldása pedig:

$$\frac{V_{\text{megmaradó}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{8 - 4\pi + \frac{16}{3}}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}}}.$$

2. megoldás

Tekintsük most az 1. b) ábra szerinti elrendezést. A z -tengelyű henger xy -síkra eső vetülete nem más, mint az

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3}$$

egyenletű kör. Elegendő most is az I. síknegyedbe eső negyed körlapon integrálni (vonalkázott tartomány). Az integrálandó függvény most is az y -tengelyű hengerfelület, azaz az (1) függvény. Az x és y változók szerinti integrálás sorrendje itt is kétféle lehet, de az előzőekben elmondottak alapján célszerű most is először y azután x szerint integrálni. Ez esetben az integrálási tartomány határvonalát jelentő negyed körív egyenletét a (3)-ból kifejezett

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

függvény adja.

A kiszámolandó kétváltozós integrál a következő:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx.$$

A számolás menete:

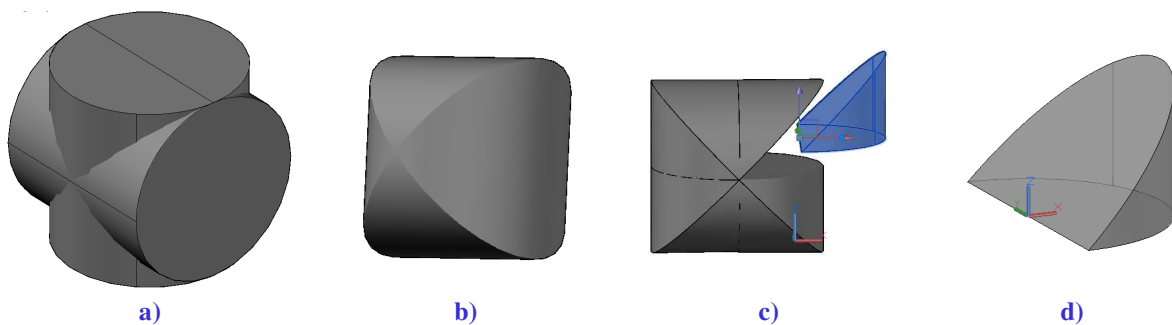
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ez a nyolcada a két henger közös részének, tehát a teljes közös rész térfogata $16/3$.

Megjegyzés: könnyen félrecsúszhat a feladat megoldása, ha a körtartomány láttán az integrált síkbeli polárkoordinátákkal akarjuk felírni. A próbálkozást az olvasóra bízom.

3. megoldás

Egy következő megoldás további térlátást igényel. Tekintsük most csak a két átható hengert, valamint annak közös részét mint önálló testet (2. a) és b) ábra).



2. ábra. A két egymásba tolt henger (a), közös részük (b) és a közös részt felépítő elemek (c), (d)

Vegyük észre, hogy a közös rész a 2. c) ábrán látható módon nyolc egybevágó kisebb testre bontható. Egy ilyen építőelemet a következő módon származtathatunk: vesszük el az egység sugarú, egységnyi magasságú hengert egy olyan síkkal, amely az alaplapjának egy átmérőjét tartalmazza, és az alaplappal 45 fokos szöget zár be. Az így kettévágott hengernek eltávolítjuk a sík fölé eső részét. A megmaradó alsó részt térfogatának meghatározásához a 2. d) ábrán látható módon helyezzük koordináta-rendszerbe. Az xy -síkkal 45 fokot bezáró, y -tengelyt tartalmazó síkot megadó kétváltozós függvény:

$$f(x, y) = x$$

Ezt a függvényt kell integrálnunk az xy -sík pozitív síknegyedébe eső negyed körön, így a test térfogatának felét, a két henger közös részének pedig $1/16$ -át kapjuk.

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dx dy = \frac{1}{3}$$

Az eredmény levezetését az olvasóra bízom.

4. megoldás

Felmerül a kérdés, hogy ha már úgyis integrálnunk kell, miért nem írjuk fel közvetlenül – a szita formula kihagyásával – a kocka megmaradó térfogatát. Ehhez az 1. a) ábra elrendezését használhatjuk. Elegendő most is az egyik háromszög tartomány fölött számolni, ez az eredmény $1/16$ -át adja. Míg a két henger közös részének kiszámolásakor a két henger közül a lentebb elhelyezkedőnek a felülete alatti térfogatot kell kiszámolnunk, úgy most a fentebbi henger felülete és a kocka felső lapja közötti térfogatot kell meghatároznunk. Válasszuk most a pöttyözött háromszöget, mely fölött az y -tengelyű hengerfelület helyezkedik el magasabban, melynek egyenletét (1) adja, míg a kocka felső lapjának egyenlete

$$g(x, y) = 1.$$

Az integrálást célszerűen először az y aztán az x változó szerint hajtjuk végre.

$$V = \int_0^1 \int_x^1 (g(x, y) - f(x, y)) dy dx = \int_0^1 \int_x^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dy dx.$$

A számolás menete:

$$V = \int_0^1 \int_x^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dy dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) (1 - x) dx.$$

A szorzást elvégezve és rendezve az integrandust a következő három tagra bontható az integrál:

$$V = \underbrace{\int_0^1 (1 - x) dx}_{V_1} - \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx}_{V_2} + \underbrace{\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx}_{V_3}.$$

Az első tag:

$$V_1 = \int_0^1 (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

A második tagnál alkalmazhatjuk a kissé hosszadalmas $x = \sin t$ helyettesítést, de van egy más lehetőség is. Vegyük észre, hogy az integrandus nem más, mint egy origó középpontú egységsugarú kör, melyet a $[0, 1]$ intervallumon integrálva éppen a negyed kör területét kapjuk, értéke tehát $\pi/4$. A harmadik tag pedig éppen (2)-vel egyezik, értéke $1/3$. A kapott eredményekkel a feladat megoldása:

$$\frac{V_{\text{megmaradó}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{16V}{V_{\text{kocka}}} = \frac{16 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right)}{8} = \frac{8 - 4\pi + \frac{16}{3}}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}}}.$$

Ez a hosszadalmas módszer ugyan nem tartalmazza azt az ötletet, amellyel a szita-formula segítségével egyszerűbben jutunk el a megoldáshoz, mégis ugyanazt a számítást végeztük el, hiszen V_1 a kocka, V_2 a két henger, V_3 pedig a két henger közös részének a térfogatát szolgáltatja.

A „mérnök” megoldása.

A feladat első megoldása alkalmával (2010 előtt) az átfúrt kocka a Solid Edge ST2 programmal lett megszerkesztve és a térfogat kiszámolva. Most a cikk írásakor az Autodesk Inventor 2015 és az Autodesk AutoCAD 2016 tervezőprogramok diákverzióit használtuk. A minél pontosabb eredmény elérése céljából a kocka élének hosszát 2000 mm-nek választottuk, míg a lyuk átmérőjét 1999,98 mm-nek. Erre azért volt szükség, mert ha a lyuk átmérője egyezik a kocka oldalélének hosszával, akkor a kocka fizikailag szétesik résztestekre, és a program nem kezeli egy testként. A szerkesztés gyors és egyszerű volt, a számolás két gombnyomás. A kocka megmaradó térfogata:

$$V_{\text{megmaradó}} = 767054089,9292 \text{ mm}^3.$$

Vessük ezt össze a matematikai számítással kapott pontos eredménnyel:

$$V_{\text{megmaradó}} = 8 - 4\pi + \frac{16}{3} = 0,766962718 \text{ térfogategység.}$$

A mérnök által kiszámított eredmény a pontostól mindössze 0,012 %-kal tér el.

3. Összefoglaló

Írásomban négy gondolatmenet alapján ismertettem a kitűzött feladat matematikai megoldási lehetőségeit. A közös bennük az, hogy a megmaradó rész térfogatát integrálszámítással határozzuk meg. Az első három megoldás a két átható henger közös részének térfogatát határozza meg, majd a szita-formulát alkalmazva kapjuk meg a megmaradó térfogatot. A negyedik megoldás közvetlenül a megmaradó térfogatot határozza meg, de ugyanúgy a szita-formula van benne elrejtve. Jól példázza ez azt, hogy ha nincs egy jó ötletünk, tervünk a megoldáshoz, sokszor akkor is ugyanazokat a lépéseket végigjárva jutunk el a végeredményhez, de kissé hosszadalmasabban, s esetleg rejtve marad előttünk, mit is számolunk éppen. A megoldásokban szereplő integrálok technikailag nem nehezek, talán minden olyan oktatási intézményben, ahol integrálszámítást oktatnak – beleértve a középiskolákat is – a tananyag részét képezik, így elvileg kiszámolhatók a tanultak alapján. Az igazi konstruktív gondolkodást magának az integrálnak a felírása jelenti, mely igényli a test elképzelésének képességét, azt, hogy hogyan célszerű azt a testet elhelyezni a koordináta-rendszerben, valamint az alapvető felületek egyenleteinek ismeretét. Az előbbi két képesség fejleszthető, ha nem pusztán határozott integrálokat írunk fel megoldásra, hanem alapvető területeket, egyszerűbb testek, csonkolt testek térfogatát számoltatjuk a hallgatókkal, szabadkézi vázlatot készíttetve velük. Ugyanakkor remekül alkalmazhatók szemléltetésre a tervezőprogramokkal elkészített ábrák.

A történetből tanulságként levonható, hogy mindenki olyan eszközökhöz folyamodik egy-egy probléma megoldása során, amelynek birtokában van: a „matektanár” a papíron való számoláshoz, a „technikus” a fúrógéphez és a precíziós mérleghez, a „mérnök” pedig a tervezőprogramhoz.

Köszönetnyilvánítás.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani páromnak, Bakki-Nagy Imrének, aki annak idején faipari mérnökhallgatóként megrajzolta és kiszámolta a megmaradó kocka térfogatát, és most a cikk kedvéért újrarajzolta, számolta a feladatot az említett két újabb programmal. Továbbá köszönöm neki a cikk ábráinak elkészítését.

A matematikatanítás eredményességét növelő módszerek a felsőoktatásban

Horváth-Szováti Erika

Soproni Egyetem Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Megérkezett a Z-generáció a felsőoktatásba, ezért a matematika oktatás modernizálása az egyetemeken is nagyon időszerű. Milyen legyen az a matematika-oktatás, amellyel képesek leszünk megfelelni a jövő kihívásainak?

ABSTRACT. The modernization of mathematics teaching in higher education is very timely. The notation used in mathematics to learn, develop problem-solving skills and the development of mathematical thinking is the most important goal. How can this be achieved in higher education?

1. Bevezetés

A matematika fogalmai, tételei, eljárásai, jelölésrendszere biztosítja azokat az ismereteket, amelyekkel a mérnöki berendezések működését meghatározó természeti törvények, vagy a kísérletek során tapasztalt jelenségek leírhatók. A matematika másrészt intellektuális tevékenység, egy speciális gondolkodásmód. Tanulása során fejlődnek ki azok a gondolkodási képességek, amelyek nélkülözhetetlenek minden műszaki, agrár, informatikai és gazdasági területen dolgozó értelmiségi számára. Ilyenek például az ok-okozati kapcsolat felismerése, a szükséges, az elegendő, és a szükséges és elegendő feltétel fogalma, az állandó kételkedés és kérdésfeltevés, a bizonyítások szükségességének felismerése és a bizonyítások módszerei. Az sem mellékes, hogy a szaktárgyak jelentős részében hasznosítható a matematika tudományának logikája, továbbá a matematika tanulása során az önálló ismeretszerzéshez szükséges képességek is fejlődnek.

2. Új generáció, új módszerek

Napjainkban az 1995 után született Z generáció kerül be az egyetemekre. A modern technikák, az informatika, az online világ velük együtt vált nagykorúvá, és a személyiségükre hatalmas hatást gyakorol. A Z generáció tagjai kérdéseikre a választ azonnal az interneten keresik, közösségi fórumokon egymást kérdezik. A kisgyermek koruk óta használt számítógép, a virtuális világ magas fokú vizualitást, fejlett térlátást, jó figyelem megosztási képességet, gyors reakciókészséget, eredményorientáltságot alakított ki bennük. Ezzel együtt negatív tulajdonságok sorát is eredményezte, mint például a türelmetlenség, kisebb kudarc- és stressz tűrő képesség, vagy az, hogy nincs kitartásuk hagyományos módszerekkel (könyvből, jegyzetből, papírra tollal írva, sok levezetést begyakorolva) tanulni. A Z generáció tagjai „szenvetnek” a hagyományos egyetemi képzésben, sokszor több a kudarcélményük, mint a sikerélmény, így elveszítik a motivációjukat. Nem feltétlenül arról van szó, hogy a szellemi

képességeik rosszabbak az előző generációkéénál. Csupán más környezetben nevelkedtek, szocializálódtak.

Mi, egyetemi oktatók az X vagy Y generáció tudását, képességeit keressük bennük, és ugyanúgy szeretnénk tanítani őket, ahogy ezt az előző generációkkal tettük. Ezzel szemben más a belépő tudásuk, mint amit mi elvárunk, és mást vár el tőlük a munka világa is, mint amire mi jelenleg felkészítjük őket. Lehet, hogy a probléma megoldását ezek szerint a felsőoktatáson belül kell keresni?

3. A matematikai képzés rendszere a felsőoktatásban – a képzés három szintje

A felsőoktatásban a matematikai képzés rendszerében három szint elkülönítésére lenne szükség. Az első lépcsőfok a BSc képzés matematika-oktatásának alapozása lenne. Egyetemünkön néhány évvel ezelőtt még létezett ez a szintje az oktatásnak, sajnos jelenleg már nincs. A korábbi gyakorlat az volt, hogy az egyetemünkre frissen belépő elsőéves hallgatók matematika tudását a tanév legelején felmértük. Ez egy úgynevezett alapvizsga dolgozat megíratásával történt. Bizonyos szakok hallgatói csak akkor vehették fel a Matematika I. tantárgyat, ha az első szemeszter legelején sikeres alapvizsgát tettek. A sikertelen alapvizsgát tett hallgatószámára egy Alapozó matematika című, választható tárgy került meghirdetésre, amelynek célja a középiskolai tananyag vázlatos áttekintése volt.

A második szint a BSc (vagy osztatlan képzés) matematikai ismereteinek elsajátítása. Itt már viszonylag stabil középiskolai ismeretekkel és rendszerezett tudásanyaggal rendelkező hallgatókra van szükség. Ha a tanár által vezérelt, szigorúan megtervezett, jól ütemezett tanítási-tanulási folyamatban mindenki hajlandó lenne aktívan részt venni, azaz a tananyagot heti rendszerességgel elsajátítaná, a házi feladatokat megoldaná, időben kérne segítséget másoktól, akkor sokkal több sikeres hallgatónk lenne. Egy téveszme az, hogy elegendő a zárthelyi előtt egy héttel nekiállni a matematika tananyag elsajátításának, és mégis sokan elhiszik. Szerencsére azért találkozunk egy-egy lelkesen tanuló, egymást motiváló kisebb csoporttal, ők jó eredményeket érnek el. Számukra sokkal kevesebb kudarccal jár a felsőbb matematikai alapismeretek elsajátítása, sőt még örömet és sikerélményt is találnak benne, függetlenül attól, hogy kifejezetten érdeklődnek a matematika iránt, vagy sem.

A harmadik szint a matematikai alapismeretek során elsajátított tudásanyag és képességek alkalmazása a matematika későbbi, speciális fejezeteiben. Egyes szakokon már a BSc képzés során lineáris algebrát, valószínűségszámítást, statisztikát külön tantárgyként hallgatják hallgatóink, illetve az MSc és PhD képzésben is visszatér a matematika. A műszaki alapozó tárgyak, majd a mérnöki szaktárgyak elsajátítása során is nagy segítség, ha valaki a matematika tanulása során szerzett ismereteket, jártasságokat, készségeket, képességeket hasznosítani tudja. Megállapítható, hogy még a tanulmányaik elején nagyon gyenge hallgatóink is legtöbbször sikeresebbé válnak a későbbi, speciális matematika tantárgyak elsajátítása során. Valószínűleg időközben megtanulják, hogy hogyan kell a matematikát elsajátítani, illetve az első félévek sorozatos kudarcainak hatására a tárgyhöz való hozzáállásuk is megváltozik.

4. A matematika tanár munkája

Az oktatás – bármilyen tantárgyról is van szó – egy nagyon komplex feladat: az ismeretszerzési, tanítási-tanulási folyamat tervezése, irányítása és értékelése a cél. Hatékony pedagógiai eszközrendszert kell kidolgozni, azt végrehajtani, és a képzési célokat el kell érni. A tervező munkának vannak bizonyos peremfeltételei, pl. a hallgatókról (a hallgatói

csoportokról) szerzett és feldolgozott információk, a meghatározott tananyag, valamint a tanítási célja. Tudni kell, hogy a hallgatók az előtanulmányaik során milyen ismeretekre, jártasságra, készségekre tettek szert, milyenek a képességeik, milyen a munkamódszerük, mennyire önállóak, van-e önellenőrző képességük, fegyelmük (önfegyelmük), koncentrációképességük. Milyen a motivációjuk, milyenek az akarat tulajdonságai. A peremfeltételek ismeretében, a feltárt körülmények mellett kell megtervezni a közelebbi és távolabbi célok elérésének konkrét módját. Az oktatási folyamat hatékonysága attól is függ, hogy a folyamat egyes szakaszai mennyire vannak összehangolva. Figyelembe kell tehát venni az egyes szakaszok közti ugrásokat, átváltási nehézségeket is (középiskola – BSc képzés, BSc képzés – MSc képzés).

A peremfeltételek feltárása után a korábbiakban említett első és második lépcsőfok sikeres végrehajtásához a tananyagot elemezni kell, annak didaktikai szerkezetét meg kell vizsgálni (fogalmak, ezek kapcsolatrendszere, tételek, ezek kapcsolatai, bizonyítások, eljárások, szükséges előismeretek). Ezt követően a tevékenységsszintek megállapítása (a felsőoktatásban szokásos oktatási struktúra szerint: előadás anyag, gyakorlati anyag és önálló munka), és az eszerinti tagolás, majd ezeknek a szakaszokra való bontása (kb. 13 oktatási hétre történő elosztás) történik. Fontos a középiskolai és egyetemi oktatási forma közti eltéréseket is figyelembe venni, de alkalmazkodni kell a hallgatóság igényeihez is.

Az egyetemeken nagy arányban megjelenő gyenge előképzettségű tanulók fejlesztésére a felsőoktatásban kevés lehetőség van. Nincs felzárkóztató óra, legfeljebb néha egy-egy konzultációs lehetőség. Ez utóbbin nem a középiskolai hiányosságok pótlása, hanem az aktuális tananyag kapcsán felmerülő kérdések megválaszolása a cél. A diákok egyéni haladási tempóját nem tudjuk figyelembe venni. Legtöbbször nagy létszámú csoportokban zajlik a gyakorlati óra, ráadásul feszített a tananyag mennyisége miatt a munkatempó, így a táblához kihívni hallgatókat csak nagyon ritkán van lehetőségünk. A matematika óraszámokat minimalizálták, viszont a mérnöki tudományok későbbi elsajátításához szükséges minimális matematika tananyagot mégis meg kellene tanítanunk. Az oktatók leterheltek, így további csoportbontásokra nincs lehetőség. A gyenge munkafegyelmű, tanulásban alulmotivált diákokról nincs rendszeres visszajelzés, csupán a rengeteg elégtelen zárthelyi dolgozat mutatja, hogy valami nincsen rendben. A kis egységekben megfogalmazott, így teljesíthető követelmények megadhatnák a siker lehetőségét, az értelmes tanulás örömét, de ennek megvalósítása ilyen körülmények mellett nagyon nehézkes.

Tapasztalataink szerint napjainkban a hozzánk érkező hallgatók jelentős részének jóval több instrukcióra, vezetésre, gyakoribb számonkérésre lenne szüksége, mint a korábbi évek diákságának, azaz az oktatás módszereit a középiskolai módszerek irányába kell eltolni.

5. Projektpedagógia a matematika oktatásban?

A munka világában ma már egyre gyakran találkozunk a projekttervezés és projektvégrehajtás fogalmával. A projektpedagógia olyan tanulásszervezés, amelynek középpontjában valamilyen probléma (esetleg elvégzendő tevékenység) áll, és a hangsúlyt az ismeretek megszerzésének, illetve a képességek fejlesztésének folyamatára helyezik. Idetartozik az általános iskolákban, illetve középiskolákban már bevezetésre került projekt- vagy témahét fogalma is. A projektmódszer a tanulói tevékenységek tudatos tervezését igényli, a megismerés fő forrásává a tanuló tapasztalatát, érdeklődését, tevékenységét teszi. A projektpedagógiában nagyon sokszor alkalmazzák a csoportos és páros munkát. Ennek hatékonyságát azzal indokolják, hogy minden ismeretszerzési folyamatnak két oldala van: egyrészt individuális és kollektív, másrészt társadalmi tevékenység. A csoportmunka és páros munka során a matematikai probléma megoldása marad a középpontban, a tevékenység mégis érdekessége, különlegessége válik, és ez a módszer az összetettségével, újszerűségével a

figyelem fenntartásának fontos eszköze. Tehát az egyén még hatékonyabban jut ismeretekhez, ha nem csak közlés által kapja az információkat, hanem saját tevékenységével is hozzájárul az ismeretszerzéshez, illetve viták, eszmecserék által a többiektől is tanul. A csoportmunka a matematikaoktatásnak ezen a szintjén szervezeten kívül kevésbé kivitelezhető. Vannak ugyan baráti, kollégiumi tanulópárok, kisebb tanulócsoporthok, amelyek eredményesen működnek, de tanári irányítással végzett csoportmunkát eddig nem alkalmaztunk. Valószínűleg hasznos lenne, ha a hallgatók számára a jelenleginél többször tudnánk kiadni feladatokat otthoni feldolgozásra, úgy, hogy közbeiktatott közös megbeszélésekkel, tanári irányítással, kiegészítésekkel és magyarázattal, de mégis önállóan szerezzenek ismereteket. Ezt a módszert többnyire csak a kis létszámú MSc és PhD órákon használjuk, továbbá a zárthelyik és vizsgák előtti konzultációkon fordul elő kötetlen csoportos beszélgetés a matematikáról. Ez a módszer hatékony mind a tervezés, mind az ismeretszerzési folyamat irányítása szempontjából is, ugyanis megvalósul benne a visszajelzés (formatív értékelés). Ez pedig lehetőséget ad arra, hogy a tananyag tárgyalására szánt időt a hallgatói igényeknek legmegfelelőbb arányban osszuk el az egyes anyagrészek között. Haszna továbbá, hogy felkészít az önálló ismeretszerzésre, fejleszti az önellenőrző és önértékelési képességet.

6. A modern előadás és gyakorlat

A felsőoktatásban a tanórák két különböző típusa az előadás és a gyakorlat. A szakirodalom az előadásoknak három különböző típusát említi: hagyományos, problémafelvető és interaktív.

A hagyományos előadás során az előadó bizonyos információ-anyagot készít, megjegyzésre alkalmas formában közöl, a hallgatók nem vesznek részt az információk létrehozásában, munkájuk csupán az ingerek befogadása és a jegyzetelés. Ha közvetlenül az előadás után mérjük, hogy mennyire hatékony ez a módszer az ismeretelsajátítás szempontjából, akkor 10–20 százalékos eredményt kapunk. A hagyományos előadás és a középiskolai oktatás között olyan nagy a szakadék, hogy még a tehetséges hallgatóknak is nehézséget jelent az átállás.

A problémafelvető (diszkurzív) előadás lényege az, hogy társalgási stílusban, a hallgatóssággal párbeszédet folytatva ismertetjük meg a tananyagot. Ez az előbbi módszernél nagyobb aktivitást követel a diákságtól és önálló gondolkodásra tanít. A problémafelvető előadás hátránya az, hogy a kérdések megvitatására, igazi párbeszéd kialakítására – legtöbbször időbeli korlátok miatt – csak csekély mértékben van lehetőség, a hallgatók önálló gondolatai sokszor rejtve maradnak. Mérések igazolják, hogy ennek hatékonysága 40–60 százalék.

Az interaktív jellegű előadást egyes irodalmakban *konverzátorium jellegű*, vagy *konverzatorikus* előadásnak is nevezik (konverzáció=társalgás, beszélgetés). Ez azt jelenti, hogy az előadáson megpróbáljuk sokat foglalkoztatni a hallgatókat, így az érdeklődésüket végig fenntartjuk. Hallgatói tevékenység lehet például a matematika oktatás során a tárgyalt egyszerűbb tételek önálló igazolása (akár házi feladatként), és az előadáshoz kapcsolódó, tanár által kiadott típuspéldák otthoni megoldása. Ez a módszer áll legközelebb a Galilei által már több, mint 400 évvel ezelőtt megfogalmazott gondolathoz, miszerint „Az embert nem lehet valamire megtanítani, hanem csak hozzásegíteni ahhoz, hogy a tudást maga szerezzé meg.” Az interaktív előadás hatékonysága kutatások szerint 70–90 százalék.

Intézetünk oktatói igyekeznek interaktív jellegű előadásokat tartani, de mindnyájan más-más személyes megközelítésben. Önállóan bizonyítandó tételket, illetve házi feladat példákat adunk minden órán, de természetesen megfelelő előkészítést (rávezetés, instrukciók, stb.) követően. Együtt „fedezzük fel” az összefüggéseket, nehézségeket és szépségeket, amelyek a

tananyagban szerepelnek, és matematika történeti érdekességek említésével próbáljuk közelebb hozni a tananyagot a diákokhoz. A hallgatók ilyen módon tapasztalataim szerint nagyobb eséllyel szokják meg a rendszeres, tananyag követő tanulást, illetve az önálló ismeretszerzésre is fokozatosan alkalmassá válnak.

A gyakorlatokon a legfontosabb cél az előadás anyagának alkalmazása, de előadást előkészítő, ismereteket rendszerező funkciója is lehet. Az ismeretanyagot több oldalról megközelítve mélyíthetők a hallgatók ismeretei, fejleszthető gondolkodási képességük. Gyakorlaton egy kicsit több lehetőség van problémafelvetésre, kérdésfeltevésre, és az együtt gondolkodásra, de számtalan nehézség és oktatási kérdés is felmerül a gyakorlatokkal kapcsolatban, amelyekről már az előző részben szó volt.

Mind előadáson, mind gyakorlaton igyekszünk figyelembe venni a didaktikai alapelvek mindegyikét: fokozatosság, szemléletesség, arányosság, rendszeresség-szervezettség, komplexitás. Mindezek ellenére sokszor találkozunk a matematika tantárgyak követelményeit nem, vagy csak sokadszorra, az elégségeshez szükséges minimális eredménnyel teljesítő hallgatókkal. Elsősorban az oktatási módszereinket, a tananyag mennyiségét és egyéb körülmények felülvizsgálatát szoktuk ilyenkor elvégezni. Egy hatalmas dilemma a következő: ha nem engedünk az oktatás színvonalából, akkor nagy lesz a lemorzsolódás, ha kisebb követelményeket támasztunk, akkor pedig romlik az intézmény presztízse, és a végzettek alkalmatlanok lesznek a feladataik ellátására. A tananyag mennyisége véleményünk szerint sajnos tovább már nem csökkenthető, hiszen vannak minimális követelmények, amelyekre szükség van a mérnöki tudományok elsajátításához. Felmerül néhány másik tényező szerepe is ebben a kérdésben: például a hallgató képességei, szorgalma, a tantárgyhoz való hozzáállása.

7. Összefoglalás: Mi lehet a megoldás?

Modern oktatási módszerek kialakítására van szükség: problémaalapú oktatás, projektmunka, kollaboratív, kooperatív tanulás, ismeretátadás helyett kompetenciafejlesztés, az ismeretek számonkérése helyett kompetenciamérés. Sokak szerint az ismeretközlő kontaktórák számát csökkenteni, és az irányított, önálló, problémamegoldó tanulási időt pedig növelni kellene. A hagyományos, frontális oktatás nem oly mértékben készítet gondolkodásra, mint a modern, interaktív oktatás. Korszerű tanulásiirányítási módszereket kellene alkalmazni, a tanulási folyamatot szinte semleges szereplőként, facilitátorként kellene irányítani. A kérdés csak az, hogy lehet-e, és ha igen, akkor hogyan lehet matematikát oktatni a napjainkban szokásos óraszámban, nagy létszámú csoportokban, a már korábbiakban vázolt matematikai alapismeretekkel rendelkező hallgatóknak facilitátorként?

Irodalomjegyzék

- [1] **Báthory Z., Falus I.**, Pedagógiai Lexikon. I. kötet. Keraban Könyvkiadó, Budapest, 1977.
- [2] **Falus I.**, Didaktika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [3] **Póta M.**, Újszerű módszerek – eredményesebb matematikaoktatás?!
http://folyoiratok.ofi.hu/sites/default/files/article_attachments/upsz_2009_8-9_12.pdf
- [4] **Tózsér J., Magyar F., Mezei T., Káposzta J.**, Beszélgetés a felsőoktatás fejlesztéséről az agrár-, élelmiszer- és vidékgazdaság kihívásai tükrében.
<https://szie.hu/sites/default/files/valosag-beszeltunk-a-felsooktatasirol.pdf>
- [5] **Vigné Lencsés Á.**, A műszaki főiskolai matematikaoktatás eredményességének növelése. Acta Pedagogica 2001.02. 37-46.p.
http://epa.oszk.hu/00000/00031/00002/pdf/actapaed_EPA00031_2001_02_037-046.pdf
- [6] **Wincenty O.**, Felsőoktatási didaktika. Felsőoktatási Pedagógiai Kutatóközpont, Budapest, 1973.