

Az általánosított oktonióalgebrák egy új felépítéséről

Péntek Kálmán

ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az általános Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárással a valós számok R testéből kiindulva felépíthetjük az általánosított komplex számok C_α kommutatív és asszociatív algebráját. Ennek megkettőzésével nyerhetjük az általánosított kvaterniók $H_{\alpha\beta}$ nem kommutatív, de asszociatív algebráját. Innen pedig ismételt megkettőzéssel adódik az általánosított oktoniók $O_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebrája.

Közismert, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával. Ám az általános oktoniók $O_{\alpha\beta\gamma}$ algebrája nem asszociatív, ezért nem reprezentálható mátrixokkal. E probléma megoldására M. Zorn 1933-ban kidolgozta a split oktoniók reprezentációját vektor-mátrixok segítségével. Az előadás utolsó részében ezt az eredményt általánosítva teljesen általánosán megadjuk az általánosított oktoniók algebrájának egy, a vektor-mátrixok fogalmának általánosításán alapuló reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper with the use of generalized Cayley-Dickson process we construct the commutative and associative algebras of generalized complex numbers C_α , the non commutative, but associative algebras of generalized quaternions $H_{\alpha\beta}$ and the non commutative, non associative algebras of generalized octonions $O_{\alpha\beta\gamma}$.

Any finite dimensional associative algebra is algebraically isomorphic to a subalgebra of a total matrix algebra, but the algebras of octonions $O_{\alpha\beta\gamma}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix representation for split octonions algebra in 1933.

In the last section of the paper we construct the generalized vector-matrix representation of generalized octonions $O_{\alpha\beta\gamma}$.

1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) fedezte fel 1843-ban a \mathbb{H} valós kvaterniók 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív algebráját (*HAMILTON 1844, 1847*). Még ebben az évben alkotta meg John Thomas Graves (1806-1870) az \mathbb{O} valós oktoniók 8-dimenziós nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját. Eredményeit azonban nem publikálta, csupán Hamiltonnal folytatott baráti levelezésében írta le. Arthur Cayley (1821-1895) 1845-ben jutott el szintén az oktoniókhoz és publikálta is az elliptikus függvényekről írt dolgozatának függelékében (*CAYLEY 1889*), ezért nevezik ezeket Cayley-féle számoknak.

Leonard Eugene Dickson (1874-1954) 1912-ben értelmezte egy test feletti $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebra fogalmát, 1919-ben pedig megalkotta a neutrális elemes algebrák későbbiekben Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásnak nevezett módszerét. Ennek felhasználásával a Hamilton-féle kvaterniók \mathbb{H} algebrájának megkettőzésével építette fel a Cayley-féle számok, a valós \mathbb{O} oktoniók algebráját (*DICKSON 1912, 1919*).

A Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárást Dickson tanítványa Abraham Adrien Albert (1905-1972) általánosította (*ALBERT 1942*), ezzel lehetővé vált a valós számok \mathbb{R} algebrájából kiindulva az általánosított komplex számok \mathbb{C}_α , majd az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrájának egységes szemléletű tárgyalása. Ennek részletes magyarnyelvű bemutatását találhatjuk például (*PÉNTEK 2018*) dolgozatában.

Ebben a munkában e megkezdett utat folytatva az általánosított kvaternióalgebrák $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrájából kiindulva felépítjük az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebráját. Jól ismert, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a megfelelően választott teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy minden ilyen algebrának megadhatjuk a mátrix-reprezentációját. Így megadható a \mathbb{C}_α és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák mátrix-reprezentációja, például (*PÉNTEK 2018*). Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrája azonban nem asszociatív, így e struktúra mátrixokkal nem reprezentálható.

Max August Zorn (1906-1993) 1933-ban megadta a split oktoniók algebrájának vektor-mátrix-reprezentációját (*ZORN 1933*). Módszere némi módosítással alkalmazható a klasszikus oktoniók \mathbb{O} stuktúrájának vektor-mátrix-reprezentációjára is (*EBBINGHAUS ET AL. 1991, KATARAS – HALICI 2018*). Dolgozatunk fő eredményeként e módszert általánosítva megadjuk az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúrájának vektor-mátrix-reprezentációját.

A most következő két fejezetben összefoglaljuk és kiegészítjük azokat az általánosított komplex számokra és az általánosított kvaterniókra vonatkozó legfontosabb ismereteket (*PÉNTEK 2018*), amelyek a dolgozat fő témájához, az általánosított oktoniók felépítéséhez és tárgyalásához szükségesek.

2. Az általánosított komplex számok

Jelölje $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok testét, 0 az összeadás, 1 a szorzás neutrális elemét, legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter! Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a_0, a_1) : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (a_0, a_1) := (r \cdot a_0, r \cdot a_1) \quad (1)$$

$$\text{összeadás: } (a_0, a_1) + (b_0, b_1) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1) \quad (2)$$

$$\text{szorzás: } (a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) := (a_0 \cdot b_0 - \alpha \cdot a_1 \cdot b_1, a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \quad (3)$$

ahol $r \in \mathbb{R}$, $(a_0, a_1), (b_0, b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tetszőleges elemek.

Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ direktszorzat az (1), (2) és (3) műveletekkel egy 2-dimenziós kommutatív, asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az \mathbb{R} test felett, amelyben a $0_{\mathbb{C}} := (0, 0)$ az összeadás, $1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$ a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrában, mint \mathbb{R} feletti 2-dimenziós vektortérben az $1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$ és az $i := (0, 1)$ elempár alkot természetes bázist.

Az $S := \{(a_0, 0) : a_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részalgebrát alkot az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ algebrában és az $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{R} \rightarrow S, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy algebra-izomorfizmus, így pedig az $f_{\mathbb{C}}^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát \mathbb{C}_α szimbólummal jelöljük és az *általánosított komplex számok* algebrájának nevezzük. Speciálisan az $\alpha = 1$ estben a klasszikus komplex számok \mathbb{C} algebrájához jutunk. Az általánosított komplex számok további típusait említi és tárgyalja (*ROSENFELD 1997*) művében.

Az $i = (0, 1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elemre teljesül $i^2 = -\alpha$ és minden $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elem felírható $a_0 + a_1 \cdot i$ alakban, amely előállítást az általánosított komplex szám *algebrai* alakjának nevezzük.

A $z = a_0 + a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ *konjugáltján* az $\bar{z} = a_0 - a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számot, *normáján* pedig a $N(z) := z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 \in \mathbb{R}$ valós számot értjük,

a $z = a_0 + a_1 \cdot i, t = b_0 + b_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ elempár *skaláris szorzatának* a $\langle z, t \rangle := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 \in \mathbb{R}$ valós számot nevezzük.

Az \mathbb{R} test feletti $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$ alakú mátrixok egy részalgebrát alkotnak a másodrendű kvadratikus mátrixok 4-dimenziós $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában.

A $g^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a_0 + a_1 \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított komplex számok \mathbb{C}_α algebrája reprezentálható az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával.

3. Az általánosított kvaterniók

Az általánosított komplex számok \mathbb{C}_α algebrájából kiindulva értelmezzünk műveleteket a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha := \{(z_0, z_1) : z_0, z_1 \in \mathbb{C}_\alpha\}$ direktszorzatban a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (z_0, z_1) := (r \cdot z_0, r \cdot z_1) \quad (1')$$

$$\text{összeadás: } (z_0, z_1) + (w_0, w_1) := (z_0 + w_0, z_1 + w_1) \quad (2')$$

$$\text{szorzás: } (z_0, z_1) \cdot (w_0, w_1) := (z_0 \cdot w_0 - \beta \cdot z_1 \cdot \overline{w_1}, z_0 \cdot w_1 + z_1 \cdot \overline{w_0}) \quad (31')$$

ahol $\beta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, továbbá $r \in \mathbb{R}, (z_0, z_1), (w_0, w_1) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ tetszőlegesek.

A $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ direktszorzat az (1'), (2') és (3') műveletekkel egy 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az \mathbb{R} test felett, amelyben $0_{\mathbb{H}} := (0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$ az összeadás és $1_{\mathbb{H}} := (1_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$ a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrában, mint \mathbb{R} feletti 4-dimenziós vektortérben az $1_{\mathbb{H}}, (i, 0_{\mathbb{C}}), j := (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}), (0_{\mathbb{C}}, i)$ elemnégyes egy természetes bázist alkot.

A $T := \{(z_0, 0_{\mathbb{C}}) : z_0 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrában és az $f_{\mathbb{H}}: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow T, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, így pedig az $f_{\mathbb{H}}^*: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$ egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított kvaterniók* algebrájának nevezzük. Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 1$, akkor a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók \mathbb{H} algebráját nyerjük. Az általánosított kvaterniók további típusait említi (JAFARI – YAYLI 2015) és tárgyalja is (ROSENFELD 1997) művében.

A $j = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemre teljesül $j^2 = -\beta$ és minden $q = (z_0, z_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ felírható $q = z_0 + z_1 \cdot j$ alakban, amely előállítást az általánosított kvaternió *komplex algebrai alakjának* nevezzük.

Ha $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i, z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a q kvaternió felírható a $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ alakban, amelyet a q elem *valós algebrai alakjának* hívjuk, az $1, i, j, k := i \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemeket pedig *általánosított kvaternióegységeknek* nevezzük.

Az általánosított kvaternióegységek Cayley-féle szorzási táblázata:

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	$-\alpha$	k	$-\alpha j$
j	j	$-k$	$-\beta$	βi
k	k	αj	$-\beta i$	$-\alpha \beta$

Ha $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i$, $z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor a $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ konjugáltján a

$$\bar{q} := \bar{z}_0 - z_1 \cdot j = a_0 - a_1 \cdot i - a_2 \cdot j - a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, \quad (4')$$

normáján pedig az

$$N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 \in \mathbb{R} \quad (5')$$

elemet értjük. A $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $q_1 = b_0 + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elempár skaláris szorzatának a

$$\langle q_0, q_1 \rangle := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \quad (6')$$

valós számot nevezzük.

A $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *valós részén* (skalár rész) az

$$S(q) := a_0 \in \mathbb{R} \quad (7')$$

valós számot, képzetes részén (vektor rész) a

$$V(q) := a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{R}^3 \quad (8')$$

vektort értjük.

Ha $q_0 = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $q_1 = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ két tiszta képzetes általánosított kvaternió, akkor szorzatuk

$$\begin{aligned} q_0 \cdot q_1 = & -(\alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3) + \\ & + [(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k] \end{aligned}$$

lesz. Ez alapján e két tiszta képzetes kvaternió *skaláris szorzatán* a (6') összefüggéssel összhangban a

$$q_0 \circ q_1 := \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \quad (9')$$

skalárt, *vektoriális szorzatán* pedig a

$$q_0 \times q_1 := (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k \in \mathbb{R}^3 \quad (10')$$

vektort értjük. Ekkor e kvaterniókra a $q_0 \cdot q_1 = -(q_0 \circ q_1) + (q_0 \times q_1)$ összefüggés teljesül.

A tiszta képzetes általánosított kvaterniók a skalárral való szorzással és az összeadással \mathbb{R}^3 vektorteret, továbbá a (9') skaláris szorzással az $E_{\alpha\beta}^3(\mathbb{R})$ szimbólummal jelölt általánosított euklideszi vektorteret alkotnak az \mathbb{R} test felett.

$$\text{Az } \mathbb{R} \text{ feletti } M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha \beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \text{ alakú}$$

mátrixok egy részalgebrát alkotnak a negyedrendű kvadratikus mátrixok 16-dimenziós $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában.

$$A \ g^{\mathbb{H}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}), \ a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha\beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrája reprezentálható az $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával.

4. Az általánosított oktoniók

Az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva értelmezzünk műveleteket a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{(q_0, q_1): q_0, q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\}$ direktszorzatban a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (q_0, q_1) := (r \cdot q_0, r \cdot q_1) \quad (1'')$$

$$\text{összeadás: } (p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1) \quad (2'')$$

$$\text{szorzás: } (p_0, p_1) \cdot (q_0, q_1) := (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \bar{q}_1 \cdot p_1, p_1 \cdot \bar{q}_0 + q_1 \cdot p_0) \quad (3'')$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, valamint $r \in \mathbb{R}, (p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőlegesek.

Hosszadalmas, bár nem túl nehéz számításokkal bizonyítható a következő

1. Tétel. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ direktszorzat az $(1'')$, $(2'')$ és $(3'')$ műveletekkel egy 8-dimenziós nem kommutatív, nem asszociatív, de neutrális elemes algebrát alkot az \mathbb{R} test felett, amelyben $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrának, mint 8-dimenziós vektortérnek természetes bázisa az $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{H}}), (j, 0_{\mathbb{H}}), (k, 0_{\mathbb{H}}), E := (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}), (0_{\mathbb{H}}, i), (0_{\mathbb{H}}, j), (0_{\mathbb{H}}, k)$ elemrendszer.

2. Tétel. Az $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{H}}): q_0 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ részalgebrát alkot a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrában, mivel zárt az $(1'')$, $(2'')$ és a $(3'')$ műveletekre nézve. Az $f_{\mathbb{O}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ leképezés egy algebra-izomorfizmus, ezért az $f_{\mathbb{O}}^*: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított oktoniók* algebrájának nevezzük. Speciálisan, ha $\alpha = \beta = \gamma = 1$, akkor a klasszikus Cayley-féle oktoniók \mathbb{O} algebráját nyerjük. Az általánosított oktoniók további típusait említi és tárgyalja (ROSENFELD 1997) művében.

3. Tétel. Az $E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elemre teljesülnek a következő összefüggések:

(a) $E^2 = -\gamma$

(b) bármely $q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén $(0_{\mathbb{H}}, q_1) = q_1 \cdot E$

(c) minden $(q_0, q_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem felírható $q_0 + q_1 \cdot E$ alakban.

A (c) pontban szereplő előállítást az általánosított oktonió *kvaternió-algebrai* alakjának nevezzük, a vele történő számolás szabályait tartalmazza a következő

4. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}, p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(a) skalárral való szorzás: $r \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (r \cdot q_0) + (r \cdot q_1) \cdot E$,

(b) összeadás: $(p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E$,

(c) szorzás: $(p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \bar{q}_1 \cdot p_1) + (p_1 \cdot \bar{q}_0 + q_1 \cdot p_0) \cdot E$.

A $p_0 := 0_{\mathbb{H}}, p_1 := 1_{\mathbb{H}}, q_0 := q, q_1 := 0_{\mathbb{H}}$ értékadással a fenti tétel (c) pontja alapján érvényes az

5. Következmény. Bármely $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén teljesül: $E \cdot q = \bar{q} \cdot E$.

Megjegyzés. Speciálisan ezért igazak az $E \cdot i = -i \cdot E, E \cdot j = -j \cdot E, E \cdot k = -k \cdot E$ összefüggések.

6. Tétel. Ha $f \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}_{\alpha}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(f \cdot i) \cdot E = f \cdot (i \cdot E)$.

(a) Ha $g \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(g \cdot j) \cdot E = g \cdot (j \cdot E)$.

(b) Ha $h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $(h \cdot k) \cdot E = h \cdot (k \cdot E)$.

A 3. tétel és a 6. lemma alapján könnyen adódik a

7. Tétel. Ha $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a $q_0 + q_1 \cdot E$ oktonió felírható az $a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5(i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$ alakban.

Vezessük be a következő egyszerűsítő jelöléseket! Legyen a továbbiakban

$$e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E,$$

amely azonos az oktonióknak e fejezet elején az 1. tétel végén említett természetes bázisával. Ekkor a 7. tétel állítása szerint minden oktonió felírható

$$\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$$

formában. Ezt az előállítását az általánosított oktonió *valós algebrai alakjának*, az ezen előállításban szereplő $\{e_i\}_{i=0}^7$ elemeket *általánosított oktonióegységeknek* nevezzük.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrában a szorzás disztributív az összeadásra nézve, így a szorzás műveletét egyértelműen meghatározza az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblája. A 6. lemma folytatásaként egyszerű direkt számolással igazolható (*EBBINGHAUS ET AL. 1991*) nyomán a következő

8. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ és $e_4 = E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ esetén érvényesek a következő azonosságok:

(a) $(u + 0 \cdot e_4) \cdot (v + 0 \cdot e_4) = u \cdot v,$

(b) $(u + 0 \cdot e_4) \cdot (0 + v \cdot e_4) = u \cdot (v \cdot e_4) = (v \cdot u) \cdot e_4,$

(c) $(0 + u \cdot e_4) \cdot (v + 0 \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot v = (u \cdot \bar{v}) \cdot e_4,$

(d) $(0 + u \cdot e_4) \cdot (0 + v \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot (v \cdot e_4) = e_4^2 \cdot (\bar{v} \cdot u).$

Megjegyzés: Az (a) rész alapján látható, hogy az olyan oktoniókkal, amelyek „képzetes része” 0, úgy kell számolni, mint a közönséges általánosított kvaterniókkal.

9. Tétel. Az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblájának belső tartománya:

e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-\alpha e_0$	e_3	$-\alpha e_2$	e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	αe_6
e_2	$-e_3$	$-\beta e_0$	βe_1	e_6	e_7	$-\beta e_4$	$-\beta e_5$
e_3	αe_2	$-\beta e_1$	$-\alpha \beta e_0$	e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$-\alpha \beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-\gamma e_0$	γe_1	γe_2	γe_3
e_5	αe_4	$-e_7$	αe_6	$-\gamma e_1$	$-\gamma \alpha e_0$	$-\gamma e_3$	$\gamma \alpha e_2$
e_6	e_7	βe_4	$-\beta e_5$	$-\gamma e_2$	γe_3	$-\gamma \beta e_0$	$-\gamma \beta e_1$
e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$\alpha \beta e_4$	$-\gamma e_3$	$-\gamma \alpha e_2$	$\gamma \beta e_1$	$-\gamma \alpha \beta e_0$

Bizonyítás. A műveleti táblázat bal felső 4×4 -es parcellája a 8. tétel (a) része szerint azonos a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaterniók egységeinek szorzótáblájával. A műveleti táblázat jobb felső 4×4 -es parcellája a 8. tétel (b) részének felhasználásával egyszerű közvetlen számolással igazolható. A műveleti táblázat bal alsó 4×4 -es parcellája a 8. tétel (c) része alkalmazásával számolható ki. Végül pedig a műveleti táblázat jobb alsó 4×4 -es parcellája a 8. tétel (d) része felhasználásával látható be. \square

A 4. tétel, az oktoniók valós algebrai alakja, a 9. tétel műveleti táblázata felhasználásával érvényesek a következő számolási szabályok az oktoniók között, igaz ugyanis a következő

10. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}$, $o_0 := \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$, $o_1 := \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(a) skalárral való szorzás: $r \cdot (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) = \sum_{i=0}^7 (r \cdot a_i) \cdot e_i$,

(b) összeadás: $o_0 + o_1 = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^7 (a_i + b_i) \cdot e_i$,

(c) szorzás: $o_0 \cdot o_1 = (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) \cdot (\sum_{j=0}^7 b_j \cdot e_j) = \sum_{i,j=0}^7 (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j) =$
 $= (a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha \beta a_3 b_3 - \gamma a_4 b_4 - \gamma \alpha a_5 b_5 - \gamma \beta a_6 b_6 - \gamma \alpha \beta a_7 b_7) \cdot e_0 +$
 $+ (a_0 b_1 + a_1 b_0 + \beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2 + \gamma a_4 b_5 - \gamma a_5 b_4 - \gamma \beta a_6 b_7 + \gamma \beta a_7 b_6) \cdot e_1 +$
 $+ (a_0 b_2 - \alpha a_1 b_3 + a_2 b_0 + \alpha a_3 b_1 + \gamma a_4 b_6 + \gamma \alpha a_5 b_7 - \gamma a_6 b_4 - \gamma \alpha a_7 b_5) \cdot e_2 +$
 $+ (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 + \gamma a_4 b_7 - \gamma a_5 b_6 + \gamma a_6 b_5 - \gamma a_7 b_4) \cdot e_3 +$
 $+ (a_0 b_4 - \alpha a_1 b_5 - \beta a_2 b_6 - \alpha \beta a_3 b_7 + a_4 b_0 + \alpha a_5 b_1 + \beta a_6 b_2 + \alpha \beta a_7 b_3) \cdot e_4 +$
 $+ (a_0 b_5 + a_1 b_4 - \beta a_2 b_7 + \beta a_3 b_6 - a_4 b_1 + a_5 b_0 - \beta a_6 b_3 + \beta a_7 b_2) \cdot e_5 +$
 $+ (a_0 b_6 + \alpha a_1 b_7 + a_2 b_4 - \alpha a_3 b_5 - a_4 b_2 + \alpha a_5 b_3 + a_6 b_0 - \alpha a_7 b_1) \cdot e_6 +$
 $+ (a_0 b_7 - a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 - a_4 b_3 - a_5 b_2 + a_6 b_1 + a_7 b_0) \cdot e_7.$

Ezután megadjuk az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrájának egy reprezentációját általánosítva a (KARATAS – HALICI 2018) dolgozatban a Cayley-féle számok \mathbb{O} algebrája reprezentációs tételét.

A $\gamma \in \mathbb{R}$ paraméterrel konstruáljuk meg a 2. fejezetben bemutatott módon az általánosított komplex számok \mathbb{C}_γ algebráját! A tetszőleges $o := \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonióhoz rendeljük hozzá azt a \mathbb{C}_γ elemeiből felépülő

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

alakú hipermátrixot, ahol

$$\begin{aligned} A_{11} &:= a_0 + a_4 \cdot i, A_{22} := a_0 - a_4 \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma, \\ A_{12} &:= (-a_1 + a_5 \cdot i, -a_2 + a_6 \cdot i, -a_3 + a_7 \cdot i) \in \mathbb{C}_\gamma^3, \\ A_{21} &:= (a_1 + a_5 \cdot i, a_2 + a_6 \cdot i, a_3 + a_7 \cdot i) \in \mathbb{C}_\gamma^3. \end{aligned}$$

Látható a konstrukció szerint, hogy A_{22} az A_{11} konjugáltja, A_{21} komponensei pedig rendre az A_{12} megfelelő komponenseinek negatív konjugáltjai.

A \mathbb{C}_γ elemeiből felépülő és e feltételeknek eleget tevő hipermátrixokat *általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok*nak nevezzük és ezek halmazát az $M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

Az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmazában műveleteket értelmezhetünk a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1''')$$

$$\text{összeadás: } A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}, \quad (2''')$$

$$\begin{aligned} \text{szorzás: } A * B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \\ &\begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}. \quad (3''') \end{aligned}$$

Látható, hogy az $r \in \mathbb{R}$ skalárral való szorzást és az összeadást természetes módon komponensenként értelmeztük, a szorzás emlékeztet némileg a mátrixok klasszikus szorzására, de itt \circ és \times a \mathbb{C}_γ rendezett elemhármasaiból képzett $E_{\alpha\beta}^3(\mathbb{C}_\gamma)$ struktúra (9') és (10') összefüggésekkel analóg \mathbb{C}_γ felett definiált skaláris, illetve vektoriális szorzása.

Nem túl nehéz, de nagy figyelmet igénylő és hosszadalmas számítással belátható, hogy ha $r \in \mathbb{R}$, $A, B \in M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor $r \cdot A$, $A + B$ és $A * B \in M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$, vagyis az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt mindhárom műveletre nézve, így $M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ algebrai struktúrát alkot e műveletekkel.

Tekintsük most már az

$$F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow M^Z(\mathbb{C}_\gamma),$$

$$\sum_{j=0}^7 a_j \cdot e_j \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_4 \cdot i & (-a_1 + a_5 \cdot i, -a_2 + a_6 \cdot i, -a_3 + a_7 \cdot i) \\ (a_1 + a_5 \cdot i, a_2 + a_6 \cdot i, a_3 + a_7 \cdot i) & a_0 - a_4 \cdot i \end{pmatrix}$$

leképezést! Mivel F^{-1} is leképezés, így F maga bijektív. Hosszalmas direkt számítással igazolható, hogy az F egy művelettartó leképezés is, azaz érvényes az

- (a) homogén: $F(r \cdot o) = r \cdot F(o)$,
- (b) additív: $F(o_1 + o_2) = F(o_1) + F(o_2)$,
- (c) multiplikatív: $F(o_1 \cdot o_2) = F(o_1) * F(o_2)$,

ha $r \in \mathbb{R}$, $o, o_1, o_2 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek.

Ezért érvényes a dolgozat legfontosabb eredményét összegző következő

3. Tétel. A fentiekben definiált $F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ leképezés egy izomorfizmus, így az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája az általánosított oktoniók algebrájának egy reprezentációja.

5. Összefoglalás

Az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás felhasználásával a valós számok \mathbb{R} testéből kiindulva megkonstruáljuk az általánosított komplex számok \mathbb{C}_α kommutatív és asszociatív algebráját. E struktúra újabb megkettőzésével nyerhetjük az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív, de asszociatív algebráját. Végül e struktúra ismételt megkettőzésével kaphatjuk meg az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját.

Tudjuk, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával, ám az általánosított oktoniók algebrája nem asszociatív, s így nem reprezentálható mátrixokkal. E probléma megoldására dolgozta ki Zorn, M.A. 1933-ban a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. Eljárását általánosítva a dolgozat fő eredményeként megadhatjuk az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra általánosított vektor-mátrixokkal történő reprezentációját.

Köszönetnyilvánítás

A szerző hálás és őszinte köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak támogatásáért és szakmai segítségéért.

Irodalomjegyzék

- [1] **Albert, A. A.**, Quadratic forms permitting composition. *Annals of Mathematics*, vol. 43, (1942) 161-177.
- [2] **Carley, A.**, On Jacobi's Elliptic Function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on Quaternions. In: *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, Cambridge University Press, Vol. 1, (1889). 127.
- [3] **Dickson, L. E.**, Linear algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 13(1), (1912) 59-73.
- [4] **Dickson, L. E.**, On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. *Annals of Mathematics*, 2nd. 20(3), (1919) 155-171.
- [5] Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestei, A., Remmert, R., *Numbers*. Springer, 1991. [doi:10.1007/978-1-4612-1005-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1005-4)
- [6] **Hamilton, W. R.**, On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy* 2, (1844) 424-434.
- [7] **Hamilton, W. R.**, On Quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 3 (1847) 1-16.
- [8] **Jafari, M., Yayli, Y.**, Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1* 64(1), (2015) 15-27. [doi:10.1501/Commua1_0000000724](https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000724)
- [9] **Karatas, A., Halici, S.**, Vector Matrix Representation of Octonions and Their Geometry. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1* 67(1), (2018) 161-167. [doi:10.1501/Commua1_0000000839](https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000839)
- [10] **Péntek, K.**, Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. *Dimenziók - Matematikai Közlemények* VI. (2018) 25-30. [doi:10.20312/dim.2018.03](https://doi.org/10.20312/dim.2018.03)
- [11] **Rosenfeld, B.**, *Geometry of Lie groups*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1997. [doi:10.1007/978-1-4757-5325-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5325-7)
- [12] **Zorn, M. A.**, *Alternativkörper und quadratische Systeme*. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer Berlin/Heidelberg, (1933) 395-402.

