

Elsőrendű differenciálegyenletes modellek

Horváth-Szováti Erika

Soproni Egyetem Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Sok tudományterületen fordulnak elő olyan problémák, amelyek megoldásához differenciálegyenletek használata szükséges. Ennek szemléltetése nem egyszerű, mivel hallgatóink csupán egy-két differenciálegyenlet-típusról tanulnak, csak a legfontosabb integrálási módszereket ismerik, és legtöbbször a differenciálegyenletek felírásához nélkülözhetetlen fizikai, kémiai, stb. ismeretekkel sem rendelkeznek. Az itt összegyűjtött egyszerű modellek rávilágítanak a differenciálegyenletek alkalmazásának módjára és szükségességére.

ABSTRACT. These simple practical models highlights the practical application of differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises students can see that differential equations are essential in different sciences.

1. Bevezetés

A természettudományokban, gazdaságtudományokban, és még sok más területen gyakran fordulnak elő olyan problémák, amelyekkel kapcsolatban a változás és annak üteme kerül a vizsgálat középpontjába, azaz differenciálegyenlettel oldhatók meg. Napjainkban az agrár-műszaki felsőoktatásban, illetve a műszaki felsőoktatás nem klasszikus (pl. faipari mérnök, mechatronikai mérnök, stb.) szakjain BSc képzésben legtöbb intézményben a matematika óraszámok csökkenése tapasztalható. Emiatt egyre kevesebb idő jut a differenciálszámítás, integrálszámítás és differenciálegyenletek témakörére. Az integrálási módszerek közül csak a fontosabbakat tanítjuk, és a differenciálegyenletek témakörét is csak érintőlegesen, csupán egy-két típus erejéig tárgyaljuk. Az itt bemutatásra kerülő viszonylag egyszerű feladatok differenciálegyenlettel történő megoldása hallgatóink matematikai ismereteivel is lehetséges. A szükséges fizikai, kémiai, és egyéb ismereteket a feladatok szövegében röviden összefoglaltuk. A folyamatot leíró differenciálegyenlet a példában adott, csupán annak értelmezése és megoldása, valamint az esetleges további kérdések megválaszolása a feladat. Az itt összegyűjtött modellek segítségével rávilágíthatunk a differenciálegyenletek alkalmazására, használatuk szükségességére. A feladatokban szereplő ismeretlen függvények különböző jelölései (pl.: $v(t)$, $p(z)$, $T(t)$, stb.) segíthetik a hallgatókat abban, hogy ne csak a szokásos $y(x)$ alakban legyenek képesek a differenciálegyenleteket megoldani, hanem a tudás elsajátításának egy magasabb szintjére lépjenek.

2. Elsőrendű, szétválasztható változójú differenciálegyenlettel megoldható feladatok

1. Egy $30 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel magára hagyott motorcsónak sebessége az indulástól számított 30 másodperc időpillanatban $15 \frac{m}{s}$. Jelöljük $v(t)$ -vel a motorcsónak sebesség-idő függvényét. A test sebessége minden időpillanatban a pillanatnyi sebesség négyzetével arányosan csökken: $-v'(t) = k \cdot v^2(t)$, ahol $k (\in \mathbb{R})$ arányossági tényező, neve közegellenállási együttható. Mekkora lesz a csónak sebessége az indulástól számított 60 másodperc múlva?

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenlethez indulunk ki, amely szétválasztható változójú:

$$-\frac{v'(t)}{v^2(t)} = k,$$

$$\int -\frac{v'(t)}{v^2(t)} dt = \int k dt,$$

$$\frac{1}{v(t)} = kt + C,$$

$$v(t) = \frac{1}{kt+C}, \quad k, C \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényben lévő két szabadon választható paraméter (k és C) értékét a kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Adott volt, hogy a test sebessége a $t = 0$ s időpillanatban $30 \frac{m}{s}$, és $t = 30$ s időpillanatban pedig $15 \frac{m}{s}$:

$$\begin{aligned} v(0) &= 30, \\ v(30) &= 15. \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve az általános megoldásba az

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k \cdot 0 + C} &= 30 \\ \frac{1}{k \cdot 30 + C} &= 15 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszeret kapjuk. Az első egyenletből $C = \frac{1}{30}$, ezt beírva a másodikba $k = \frac{1}{900}$ adódik. Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$v(t) = \frac{900}{t+30},$$

amelyből kiszámoljuk a csónak sebességét az indulástól számított 60 másodperc elteltével:

$$v(60) = \frac{900}{90} = 10 \left(\frac{m}{s} \right).$$

2. Egy $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé kilőtt rakéta sebesség-idő függvényét jelöljük $v(t)$ -vel. A sebesség csökkenését minden időpillanatban a rakétára lefelé ható gravitációs gyorsulás ($g \approx 10 \frac{m}{s^2}$), illetve a közegellenállás okozza, ez utóbbi a rakéta pillanatnyi sebességének négyzetével egyenesen arányos, azaz: $-v'(t) = g + k \cdot v^2(t)$, ahol a $k (\in \mathbb{R})$ arányossági tényező neve közegellenállási együttható. (Feltesszük, hogy a rakéta mozgását akadályozó légellenállás állandó.) A pálya legmagasabb pontján a rakéta sebessége $0 \frac{m}{s}$. Határozzuk meg a $v(t)$ függvényt és azt a T időpillanatot, amikor a rakéta eléri pályájának lemagasabb pontját!

Megoldás.

A differenciálegyenlet változóit szétválasztjuk és az integrálást elvégezzük:

$$\frac{v'(t)}{1 + \frac{k}{10}v^2(t)} = -10,$$

$$\int \frac{v'(t)}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right)^2} dt = -\int 10 dt,$$

$$\arctg\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right) = \sqrt{\frac{k}{10}}(-10t + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

A $\sqrt{\frac{k}{10}} \cdot C = C_2$ ($C_2 \in \mathbb{R}$) új konstans bevezetve

$$\arctg\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right) = -\sqrt{10k} \cdot t + C_2,$$

ebből a következő sebesség-idő függvényt kapjuk:

$$v(t) = \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot \operatorname{tg}(C_2 - \sqrt{10k} \cdot t), \quad k, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adott a feladatban, hogy a rakéta sebessége a $t = 0$ másodperc időpillanatban $100 \frac{m}{s}$, illetve a keresett T időpillanatban a sebessége $0 \frac{m}{s}$. Ezeket visszairjuk az általános megoldásba:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot \operatorname{tg}(C_2 - \sqrt{10k} \cdot 0) &= 100 \\ \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot \operatorname{tg}(C_2 - \sqrt{10k} \cdot T) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletből: $C_2 = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{1000k})$, a másodikból: $T = \frac{C_2}{\sqrt{10k}}$. Behelyettesítve C_2 -t a T kifejezésébe:

$$T = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{1000k})}{\sqrt{10k}},$$

ahol $k \in \mathbb{R}$ a közegellenállási együttható.

3. Minden vízcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Egy közelítőleg gömb alakú vízcsepp átmérője kezdetben 3 mm, 20 másodperc múlva pedig 1 mm. Jelöljük $d(t)$ -vel a vízcsepp átmérőjét az idő függvényében. Az átmérő csökkenésének sebessége tehát arányos a gömb felszínével, emiatt az átmérő négyzetével is, azaz: $-d'(t) = A \cdot d^2(t)$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező. Mekkora lesz a vízcsepp átmérője 50 másodperc elteltével?

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú. Megoldásának menete hasonló az előző feladatban leírtakhoz, így nem részletezzük:

$$\begin{aligned} -\frac{d'(t)}{d^2(t)} &= A, \\ &\vdots \\ d(t) &= \frac{1}{At+C}, \quad A, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Az A és C konstansok értékeit a kezdeti feltételekből meghatározzuk. A vízcsepp átmérője a $t = 0$ s időpillanatban 3 mm, $t = 20$ s esetén pedig 1 mm, azaz: $d(0) = 3$, $d(20) = 1$. Ezeket visszaírva az általános megoldásba egy egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása $A = \frac{1}{30}$ és $C = \frac{1}{3}$. A kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás tehát:

$$d(t) = \frac{1}{\frac{1}{30}t + \frac{1}{3}} = \frac{30}{t+10}.$$

Ebből kiszámoljuk a vízcsepp átmérőjét 50 másodperc múlva:

$$d(50) = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ (mm)}.$$

4. Egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk. A bomlási folyamat kezdetekor 100 db radioaktív atom volt, az anyag felezési ideje 1 perc. Hány darab sugárzó atom lesz a bomlási folyamat kezdetétől számított másfél perc múlva? Jelöljük $N(t)$ -vel a sugárzó (még nem el nem bomlott) atomok számát. Radioaktív bomlás során a radioaktív atomok számának csökkenési sebessége minden időpillanatban arányos a még el nem bomlott atomok számával: $N'(t) = -A \cdot N(t)$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező.

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenlet szétválasztható változójú:

$$\begin{aligned} \int \frac{N'(t)}{N(t)} dt &= \int -A dt, \\ \ln|N(t)| &= -At + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |N(t)| &= e^{-At+C}, \\ N(t) &= \pm e^C e^{-At}. \end{aligned}$$

A $\pm e^C = C_2$ ($C_2 \in \mathbb{R}$) új konstans bevezetve a következő megoldás adódik:

$$N(t) = C_2 e^{-At}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása két szabadon választható paramétert (A és C_2) tartalmaz. Ezek értékeit a feladat szövegében lévő kezdeti feltételek segítségével határozzuk meg:

$$N(0) = 100,$$

illetve a vizsgált anyag felezési ideje 1 perc, azaz 60 másodperc:

$$N(60) = 50.$$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve az általános megoldásba a

$$\left. \begin{aligned} C_2 e^{-A \cdot 0} &= 100 \\ C_2 e^{-A \cdot 60} &= 50 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C_2 = 100$, ezt visszaírva a másodikba, és kifejezve a másik konstans:

$$A = \frac{\ln 2}{60}.$$

Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$N(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{60} t}.$$

Ebből kiszámítjuk a radioaktív atommagok számát a bomlási folyamat kezdetétől számított másfél perc, azaz 90 másodperc múlva:

$$N(90) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{60} \cdot 90} \approx 35 \text{ (db)}.$$

5. A légnyomás a magasság növekedésével csökken. Jelöljük $p(z)$ -vel a légnyomás-magasság függvényt. Nagy magasságkülönbségek estén a légnyomás magasságtól való függését a $p'(z) = -Ap(z)$ differenciálegyenlet írja le (ahol $A \in \mathbb{R}$), azonos hőmérsékletű légszlopot feltételezve. (A Föld légkörének hőmérséklete kb. 11 km magasságig kilométerenként kb. $6,5^\circ\text{C}$ – kal csökken, így a hőmérsékletet tekinthetjük állandónak.) Tudjuk, hogy a légnyomás tengerszinten átlagosan 1013 hPa, illetve tengerszint felett 300 méteres magasságban átlagosan 977 hPa. Határozzuk meg a légnyomás értékét a tengerszint felett 1000 méteres magasságban!

Megoldás.

A feladatban adott szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásának menete hasonló az előző feladatban leírtakhoz, így nem részletezzük:

$$\int \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \int -A dz,$$

$$\vdots$$

$$p(z) = C e^{-Az}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet megoldásául kapott $p(z)$ függvény neve barometrikus magasságformula. A kezdeti feltételek szerint $p(0) = 1013$, és $p(300) = 977$, ezeket behelyettesítve az általános megoldásba az

$$\left. \begin{aligned} Ce^{-A \cdot 0} &= 1013 \\ Ce^{-A \cdot 300} &= 977 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C = 1013$, ezt visszaírva a másodikba és a másik konstans kifejezve:

$$A = -\frac{1}{300} \ln \frac{977}{1013}.$$

Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$p(z) = 1013 e^{\frac{z}{300} \ln \frac{977}{1013}}.$$

Ennek segítségével kiszámítjuk az 1000 méter magasságban lévő légnyomás értékét:

$$p(1000) = 1013 e^{\frac{1000}{300} \ln \frac{977}{1013}} \approx 886,37 \text{ (hPa)}.$$

Megjegyzés:

A légnyomás értékének becslésekor a Föld felszínének közelében 100 méterenként közelítőleg 1,2 kPa légnyomás csökkenéssel szoktak számolni. Esetünkben ez a becslés $p(1000) = 1013 - 120 = 893$ (hPa) eredményt adott volna.

6. Egy henger alakú tartályban 1,44 m magasságig víz áll. A tartály alján egy kör alakú lefolyónyílás van dugóval bezárva. Kihúzzuk a dugót. Jelöljük $h(t)$ -vel a tartályban lévő vízoszlop magasság-idő függvényét. A vízoszlop magassága minden időpillanatban a pillanatnyi magasság négyzetgyökével arányosan csökken, azaz: $-h'(t) = A \cdot \sqrt{h(t)}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező. A dugó kihúzásától számított 1 perc múlva a víz magassága 1 m. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?

Megoldás.

A differenciálegyenlet változóit szétválasztjuk, az integrálást elvégezzük és az egyenletet $h(t)$ -re rendezzük:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -A,$$

$$\int \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} dt = \int -A dt,$$

$$2\sqrt{h(t)} = -At + C_1, \quad A, C_1 \in \mathbb{R},$$

$$h(t) = \left(-\frac{A}{2}t + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(C_1 - At)^2.$$

A kezdeti feltételek szerint $h(0) = 1,44$, és $h(1) = 1$ (az időt percben mérjük, a magasságot méterben). A megoldás utolsó, explicit alakjában szereplő négyzetre emelés a konstansok meghatározását kicsit bonyolítja. (Az első kezdeti feltételt ebbe visszaírva $C_1 = \pm 2,4$, a két C_1 érték mindegyikéhez A -ra szintén két-két eredményt kapunk. Természetesen később kiderül,

hogymelyek azok a konstans értékek, amelyek nem tesznek eleget a követelményeknek.) Ehelyett egyszerűbben meg tudjuk határozni a konstansokat a levezetés utolsó előtti sorából, vagyis a differenciálegyenlet általános megoldásának implicit alakjából:

$$\left. \begin{aligned} 2\sqrt{1,44} &= -A \cdot 0 + C_1 \\ 2\sqrt{1} &= -A \cdot 1 + C_1 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletből $C_1 = 2,4$, ezt visszaírva a másodikba az $A = 0,4$ eredmény adódik. A konstansokat behelyettesítve az általános megoldás explicit alakjába a következő partikuláris megoldást kapjuk:

$$h_p(t) = \frac{1}{4}(2,4 - 0,4t)^2 = (1,2 - 0,2t)^2.$$

Ebből meg tudjuk határozni, hogy mennyi idő alatt ürül ki a tartály:

$$\begin{aligned} 0 &= (1,2 - 0,2t)^2, \\ t &= 6 \text{ (perc)}. \end{aligned}$$

7. Lekvárfőzéskor egy üveg lekvár hőmérséklete 20°C -os környezetben 10 perc alatt hűl le 100°C -ról 80°C -ra. Határozzuk meg a test hőmérsékletét a vizsgálat kezdetétől számított 30 perc múlva. Mikor lesz a test hőmérséklete 40°C -os? Jelöljük $T(t)$ -vel a lekvár hőmérséklet-idő függvényét. A Newton-féle hűlési törvény szerint egy test hőmérsékletének változása egyenesen arányos a test és a környezet hőmérsékletének különbségével, azaz: $T'(t) = -\lambda(T(t) - T_k)$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}^+$ arányossági tényező a test anyagára és alakjára jellemző pozitív állandó, T_k pedig a környezet hőmérséklete.

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú:

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{T(t) - T_k} &= -\lambda, \\ \int \frac{T'(t)}{T(t) - T_k} dt &= \int -\lambda dt, \\ \ln|T(t) - T_k| &= -\lambda t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |T(t) - T_k| &= e^{-\lambda t + C}, \\ T(t) - T_k &= \pm e^{-\lambda t} e^C. \end{aligned}$$

A $\pm e^C = C_2$ ($C_2 \in \mathbb{R}$) konstans bevezetve:

$$T(t) = C_2 e^{-\lambda t} + T_k, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Az egyenletbe behelyettesítjük a $T_k = 20$ értéket, vagyis a környezet feladatban adott hőmérsékletét. A függvényben lévő két szabadon választható paraméter (λ és C_2) értékét a feladat által megadott kezdeti feltételek ($T(0) = 100$, $T(10) = 80$) általános megoldásba történő behelyettesítésével kapjuk meg:

$$\left. \begin{aligned} 100 &= C_2 e^{-\lambda \cdot 0} + 20 \\ 80 &= C_2 e^{-\lambda \cdot 10} + 20 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletről $C_2 = 80$, ezt visszairva a másodikba:

$$\lambda = -\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}.$$

A kezdeti feltételeknek megfelelő konstansok értékeit behelyettesítjük az általános megoldásba, így megkapjuk a partikuláris megoldást, amely megadja a lekvár hőmérsékletét az idő függvényében:

$$T(t) = 80e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20.$$

Ebből kiszámítjuk, hogy hány fokos lesz a lekvár hőmérséklete 30 perc múlva:

$$T(30) = 80e^{\frac{30}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20 = 53,75^\circ,$$

illetve azt is, hogy mikor lesz a lekvár hőmérséklete 40°C -os:

$$80e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20 = 40,$$

$$e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} = \frac{1}{4},$$

$$t = 10 \cdot \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln \frac{3}{4}} \approx 48,19 \text{ (perc)}.$$

Megjegyzés:

A $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ határértéket vizsgálva látható, hogy a lekvár idővel felveszi a környezet hőmérsékletét, azaz a függvény eleget tesz annak, amit a fizikai ismereteink alapján várunk:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(80e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (80e^{-0,0288 \cdot t} + 20) = 20.$$

8. Egy csésze kávéba 10 g cukrot teszünk. Fél perc múlva már csak 1 g fel nem oldott cukor van benne. Mennyi lesz a még fel nem oldódott cukor mennyisége 1 perc múlva? Mikor oldódik fel a cukor 99,9%-a? És az összes cukor? Jelöljük $m(t)$ -vel a még fel nem oldódott cukor tömegét az idő függvényében, továbbá legyen m_k a kávéba tett cukor tömege. Az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével: $m'(t) = A(m_k - m(t))$, ahol $A \in \mathbb{R}$ arányossági tényező.

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletről indulunk ki, amely az előbbihez hasonló szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A megoldás lépéseit nem részletezzük:

$$\frac{m'(t)}{m_k - m(t)} = A$$

$$\vdots$$

$$m_k - m(t) = \pm e^{-At} e^{-C}, \text{ ahol } A, C \in \mathbb{R}.$$

A $\pm e^{-C} = C_2$ (ahol $C_2 \in \mathbb{R}$), illetve a $-A = A_2$ ($A_2 \in \mathbb{R}$) konstansokat bevezetve:

$$m(t) = m_k - C_2 e^{A_2 t}, \quad A_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényben lévő két szabadon választható paraméter (A_2 és C_2) értékét a kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Ezek $m(0) = 0$, hiszen a $t = 0$ időpillanatban még nincs feloldódott cukor, illetve $m(30) = 9$, mert fél perc múlva már 9 g cukor feloldódott. Behelyettesítjük az egyenletbe az $m_k = 10$ értéket is, azaz az

$$\left. \begin{aligned} 10 - C_2 e^{A_2 \cdot 0} &= 0 \\ 10 - C_2 e^{A_2 \cdot 30} &= 9 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $C_2 = 10$, ezt visszairva a másodikba

$$A_2 = \frac{1}{30} \ln \frac{1}{10}$$

adódik. Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$m(t) = 10 - 10 e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} = 10 \left(1 - e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} \right).$$

Ebből kiszámoljuk a 1 perc elteltével feloldódott cukor mennyiségét:

$$m(60) = 10 \left(1 - e^{\frac{60}{30} \ln \frac{1}{10}} \right) \approx 9,9 \text{ (g)}.$$

A feladatban azt is kérdeztük, hogy mikor oldódik fel a cukor 99,9%-a. Ezt a

$$10 \left(1 - e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} \right) = 10 \cdot 0,999$$

egyenlet megoldásával tudjuk meghatározni.

$$e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} = 0,001,$$

$$t = 30 \frac{\ln 0,001}{\ln \frac{1}{10}} = 90 \text{ (s)}.$$

Tehát 1,5 perc múlva oldódik fel a cukor 99,9%-a. És az összes cukor mikor oldódik fel? A

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10 \left(1 - e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10(1 - e^{-0,0767t}) = 10$$

határértéket vizsgálva is látható, hogy végtelen sok idő szükséges ahhoz, hogy az összes cukor feloldódjon. Akármennyi (véges) ideig várunk, mindig lesz egy kevés még fel nem oldódott cukor, azonban a mennyisége rövid idő alatt az érzékelhetőség határa alá csökken.

3. Összefoglalás

Hallgatóink számára a felsőbb matematikai ismeretek elsajátítása sok esetben nehézségekkel jár. A differenciálegyenletek témaköréből különösen nehéz megtalálnunk azokat a feladatokat és azt a tárgyalásmódot, amely számukra érthető. Bízunk abban, hogy az előzőekben felsorolt differenciálegyenletes modellekkel sikerül elérnünk a célunkat:

- a gyakorlati alkalmazás kiemelésével a problémakör lényegét és jelentőségét még jobban megvilágítjuk,
- a szétválasztható változójú differenciálegyenletek témakörében fellelhető típusok széles körére találhatók példák közöttük,
- a differenciálegyenletekkel kapcsolatos fogalmakat még jobban elmélyítjük (pl. a megoldás explicit és implicit alakja, általános megoldás, partikuláris megoldás),
- a fizikai, kémiai ismeretek hiánya nem akadályozza a hallgatókat a probléma megoldásában (a differenciálegyenleteket és a szükséges háttérismereteket a feladatok megadják),
- a függvényhatárérték egy-két gyakorlati alkalmazása ezt a témakört is közelebb hozza a hallgatókhoz.

Meggyőződésünk, hogy a matematika tanulása által hallgatóink olyan kompetenciákra tesznek szert, amelyek a munkahelyek világában és a tudományos élet más területein is gondolkodóvá, precízebbé, kreatívabbá, sikeresebbé teszi őket. Hiszen „a matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz, hogy tisztán és világosan lássa az igazságot” (René Descartes).

Irodalomjegyzék

- [1] **Budó Ágoston**: Kísérleti fizika I-III., Tankönyvkiadó Budapest, 1978.
- [2] **Geda Gábor**: Modellezés és szimuláció az oktatásban,. Educatio Kht., 2011.
https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_informatika_Geda_Gabor-Modellezes_es_szimulacio_az_oktatásban/ch04s05.html
- [3] **Hatvani László – Pintér Lajos**: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában. Polygon, Szeged, 1997.
- [4] **Kurics Tamás**: Differenciálegyenletek. ELTE Jegyzet, 2011.
http://web.cs.elte.hu/~kuricst/bboard/notes/foldtuddiff_ea.pdf
- [5] **Ponomarjov, K.K.**: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [6] **Scharnitzky Viktor**: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
- [7] **Szaszkó-Bogár Viktor**: Közönséges differenciálegyenletek
<http://www.staff.u-szeged.hu/~vszaszko/ODE%2020130902.pdf>
- [8] **Terjéki József**: Differenciálegyenletek. Polygon, Szeged, 1997.