DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VIII. kötet, 2020

doi:10.20312/dim.2020.03

Az általánosított hiperbolikus kvaternióalgebrákról

Péntek Kálmán
ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban először Macfarlane klasszikus M hiperbolikus kvaternióit általánosítjuk és megkonstruáljuk az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív és nem asszociatív algebráját. Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf egy teljes mátrixalgebra részalgebrájával, de az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algbrája nem asszociatív. E probléma megoldására Zorn, M.A. definiálta a vektor-mátrix struktúrákat a split (hasított) oktoniók algebrájának leírására 1933-ban. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ általánosított hiperbolikus kvaterniók általánosított vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper at first we generalize Macfarlane's classical hyperbolic quaternions M, and we construct the non commutative and non associative algebras of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$. Any finite dimensional associative algebra is algebrically isomorphic to a subalgebra of a total matrix algebra, but the algebras of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined the vector-matrix structures for description split octonions algebra in 1933. In the last section of the paper we construct the generalized vector-matrix representation of generalized hyperbolic quaternions $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$.

1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ír matematikus, fizikus és csillagász 1833-ban dolgozta ki a klasszikus komplex számok $\mathbb{C}$ algebrájának a rendezett valós számpárokon alapuló felépítését (*HAMILTON 1834,1837*). A komplex számok használata hatékony és elegáns módszert kínált síkgeometriai problémák analitikus megoldására. Hamilton ezért kísérletezett a rendezett valós számhármasok algebrájának kidolgozásával, ettől remélte ugyanis a síkbeli esettel analóg módon a térgeometriai feladatok eredményes, analitikus módszerrel történő tárgyalását.

Csak 1843-ban ismerte fel, hogy célját rendezett valós számnégyesek segítségével érheti el és sikeresen meg is alkotta a $\mathbb{H}$ valós kvaterniók nem kommutatív, de asszociatív algebráját (*HAMILTON 1844,1847*). Élete hátralevő részét a kvaternióelmélet minél teljesebb kidolgozásának szentelte (*ROSENFELD 1997, WARD 1997*).

A valós kvaterniók algebráját Leonard Eugene Dickson (1874 – 1954) amerikai matematikus általánosította 1912-ben (*DICKSON 1912*), vélhetően Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882 – 1948) skót származású amerikai matematikus inspirációjára, és bevezette egy test feletti $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebra fogalmát (*JAFARI – YAYLI 2015*). E struktúra részletes magyarnyelvű bemutatását találhatjuk pl. Péntek K. dolgozatában (*PÉNTEK 2018*)

A szintén skót származású amerikai matematikus és fizikus Alexander Macfarlane (1851 – 1913) 1891-ben alkotta meg Hamilton klasszikus kvaternióinak mintájára a hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját (*MACFARLANE 1900*).

Tudjuk, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a megfelelően választott teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával, vagyis minden ilyen algebrának megadhatjuk a mátrix-reprezentációját. A nem asszociatív algebrák azonban nem reprezentálhatók mátrixokkal. Max August Zorn (1906 – 1993) német származású amerikai matematikus 1933-ban viszont sikeresen reprezentálta a split (hasított) oktoniók nem kommutatív és nem asszociatív algebráját vektor-mátrixok segítségével (*ZORN 1931*, *1933*, *KARATAS – HALICI 2018*).

Ebben a dolgozatban a Dickson által alkalmazott eljárással analóg módon általánosítjuk a klasszikus hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}$ algebráját és értelmezzük az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ struktúráját, majd megvizsgáljuk algebrai tulajdonságait. A dolgozat fő eredményeként pedig megadjuk az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív és nem asszociatív algebrának alkalmas vektor-mátrixokkal történő reprezentációját.

2. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók

2.1. A Macfarlane-féle klasszikus hiperbolikus kvaterniók

Legyen $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ a valós számok teste a 0 összeadási és 1 szorzási neutrális elemmel. Ekkor az

$$\mathbb{M} := \{a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k \,:\, a,b,c,d \in \mathbb{R}; i,j,k \notin \mathbb{R}\} \tag{1}$$

alakú kifejezéseket a klasszikus hiperbolikus kvaterniók halmazának nevezzük, ha az $\{1,i,j,k\}$ kvaternióegységek eleget tesznek az alábbi szorzási szabályoknak:

$$\begin{gathered} 1\cdot 1 = 1,\quad 1\cdot i = i\cdot 1 = i,\quad 1\cdot j = j\cdot 1 = j,\quad 1\cdot k = k\cdot 1 = k \\ i^2 = 1,\quad j^2 = 1,\quad k^2 = 1 \\ i\cdot j = -j\cdot i = k,\quad j\cdot k = -k\cdot j = i,\quad k\cdot i = -i\cdot k = j. \end{gathered} \tag{2}$$

Az $\mathbb{M}$ halmazban értelmezhetünk skalárral való szorzást, összeadást és (2) felhasználásával a szokásos algebraszerkesztés homogén és disztributív szabályait követve szorzást is (*KANTOR – SZOLODOVNYIKOV 1985*) a következő módon. Tetszőleges

$$r \in \mathbb{R},\ a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k, a' + b'\cdot i + c'\cdot j + d'\cdot k \in \mathbb{M}$$

esetén a skalárral való szorzás:

$$r\cdot(a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k) := (r\cdot a) + (r\cdot b)\cdot i + (r\cdot c)\cdot j + (r\cdot d)\cdot k \tag{3}$$

az összeadás:

$$\begin{gathered} (a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k) + (a' + b'\cdot i + c'\cdot j + d'\cdot k) := \\ (a + a') + (b + b')\cdot i + (c + c')\cdot j + (d + d')\cdot k \end{gathered} \tag{4}$$

a szorzás:

$$\begin{gathered} (a + b\cdot i + c\cdot j + d\cdot k)\cdot(a' + b'\cdot i + c'\cdot j + d'\cdot k) := \\ (a\cdot b' + b\cdot a' + c\cdot d' - d\cdot c')\cdot i + \\ (a\cdot c' - b\cdot d' + c\cdot a' + d\cdot b')\cdot j + \\ (a\cdot d' + b\cdot c' - c\cdot b' + d\cdot a')\cdot k \end{gathered} \tag{5}$$

A hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}$ halmaza a rajta értelmezett (3), (4) és (5) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ valós test felett.

A hiperbolikus kvaterniókat bemutató első dolgozat 1900-ban látott napvilágot az alkotó (*MACFARLANE 1900*) tárgyalásában, de napjainkban is fontos eredményekkel gazdagodik a téma szakirodalma (*KÖSAL 2018*).

2.2. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók

L. E. Dickson klasszikus kvaterniók esetén alkalmazott módszerét követve (*JAFARI-YAYLI 2015*) most általánosítjuk a hiperbolikus kvaterniók fogalmát és megvizsgáljuk az így nyert struktúra legfontosabb algebrai tulajdonságait.

Az

$$\mathbb{M}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}; \ i, j, k \notin \mathbb{R}\} \tag{6}$$

alakú kifejezéseket az általánosított hiperbolikus kvaterniók halmazának nevezzük akkor és csakis akkor, ha az $\{1, i, j, k\}$ általánosított kvaternióegységek között teljesülnek az alábbi szorzási összefüggések:

$$\begin{gathered} 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k \\ i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad k^2 = \alpha \cdot \beta \\ i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j, \end{gathered} \tag{7}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmazban műveleteket értelmezhetünk, skalárral való szorzást és összeadást, továbbá a (7) alapján az algebraszerkesztés szabályait alkalmazva még egy szorzást is a következő módon. Tetszőleges

$$r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$$

esetén a skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \tag{8}$$

az összeadás:

$$\begin{gathered} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \end{gathered} \tag{9}$$

a szorzás:

$$\begin{gathered} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ (a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i + \\ (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j + \\ (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{gathered} \tag{9}$$

1. Tétel. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ halmaza a rajta értelmezett (8),(9) és (10) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Megjegyzés. A (7) összefüggés 3. sorából közvetlenül látható, hogy a (10) szorzás nem kommutatív és nem asszociatív. Valóban, pl. $i \cdot j = k, j \cdot i = -k$, tehát $i \cdot j \neq j \cdot i$, így a szorzás nem kommutatív általában. Másrészt, pl. $(i \cdot j) \cdot j = k \cdot j = -\beta \cdot i, i \cdot (j \cdot j) = i \cdot \beta = \beta \cdot i$, ezért $(i \cdot j) \cdot j \neq i \cdot (j \cdot j)$, így a szorzás nem asszociatív általában.

Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 1$, akkor éppen $\mathbb{M}_{\alpha\beta} = \mathbb{M}$ teljesül.

Definició. A $q := a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ *konjugált*ján a $\bar{q} = a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemet értjük.

2. Tétel. Ha $r \in \mathbb{R}$, $q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor a konjugált képzésére érvényesek a következő tulajdonságok:

(a)	$\bar{\bar{q}} = q$	involutív,
(b)	$\overline{r \cdot q} = r \cdot \bar{q}$	homogén,
(c)	$\overline{q + q'} = \bar{q} + \overline{q'}$	additív,
(d)	$\overline{q \cdot q'} = \overline{q'} \cdot \bar{q}$	anti-multiplikatív.

3. Tétel. Ha $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor érvényes a

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$$

összefüggés.

Definíció. A $q := a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elem *normá*ján a

$$N(q) := a^2 - \alpha \cdot b^2 - \beta \cdot c^2 - \alpha \cdot \beta \cdot d^2$$

valós számot értjük.

4. Tétel. Ha $q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor

(a) $N(q) = N(\bar{q})$,

(b) $N(q \cdot q') \neq N(q) \cdot N(q')$ általában.

Megjegyzés. A normafüggvény általában nem multiplikatív, ugyanis pl. $N(i \cdot j) = N(k) = -\alpha \cdot \beta$, másrészt $N(i) \cdot N(j) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$, tehát $N(i \cdot j) \neq N(i) \cdot N(j)$.

Definíció. Ha $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor e két elem *skaláris szorzat*án a

$$\langle q, q' \rangle := a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

5. Tétel. A skaláris szorzat képzése egy $\mathbb{M}_{\alpha\beta} \times \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $q, q', q'' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ esetén

(a)	$\langle q, q' \rangle = \langle q', q \rangle$	kommutatív,
(b)	$\langle r \cdot q, q' \rangle = \langle q, r \cdot q' \rangle = r \cdot \langle q, q' \rangle$	homogén,
(c)	$\langle q, q' + q'' \rangle = \langle q, q' \rangle + \langle q, q'' \rangle$	balról disztributív,
(d)	$\langle q + q', q'' \rangle = \langle q, q'' \rangle + \langle q', q'' \rangle$	jobbról disztributív.

Látható, hogy egy általánosított hiperbolikus kvaternió normája a skaláris szorzatból származtatható, hiszen ha $q \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$, akkor a norma és a skaláris szorzat fenti értelmezése szerint $N(q) = \langle q, q \rangle$ teljesül.

6. Tétel. Tetszőleges $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elempár skaláris szorzata előállítható a következő

$$\langle q, q' \rangle = (a, b, c, d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

alakban.

Megjegyzés. A 6.T. előállításából jól látható, hogy az $\alpha = \beta = 1$ esetén adódó klasszikus $\mathbb{M}$ hiperbolikus kvaterniók egy Minkowski metrikájú algebrát alkotnak.

Definíció. Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathcal{A}$ egy *alternáló algebra* akkor és csakis akkor, ha bármely $x, y \in \mathcal{A}$ esetén teljesül az $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$ és az $(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y)$ azonosság.

7. Tétel. Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebra nem alternáló.

BIZONYÍTÁS. Egyrészt $(i \cdot i) \cdot j = \alpha \cdot j$ és $i \cdot (i \cdot j) = i \cdot k = -\alpha \cdot j$, így $(i \cdot i) \cdot j \neq i \cdot (i \cdot j)$. Másrészt $(i \cdot j) \cdot j = k \cdot j = -\beta \cdot i$ és $i \cdot (j \cdot j) = i \cdot \beta = \beta \cdot i$, ezért $(i \cdot j) \cdot j \neq i \cdot (j \cdot j)$. □

Definíció. Az $\mathbb{R}$ feletti, e neutrális elemes $\mathcal{A}$ egy kvadratikus algebra akkor és csakis akkor, ha bármely $x \in \mathcal{A}$ estén létezik olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $x^2 = \lambda \cdot e + \mu \cdot x$ előállítás adható meg.

8. Tétel. Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ egy kvadratikus algebra.

BIZONYÍTÁS. Ha $x = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ tetszőleges, akkor az $x^2 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ egyenlet mindig megoldható a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ismeretlenekre, s a megoldás:

$$\lambda = -a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \quad \text{és} \quad \mu = 2 \cdot a,$$

ami az állítást bizonyítja. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti tételben szereplő $x \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemre teljesül $N(x) = -\lambda$, továbbá $t(x) = \mu$, ahol $t(x)$ éppen az $x \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ elemhez hozzárendelt vektor-mátrix nyoma (lásd alább). Az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebra kvadratikus voltát leíró összefüggés így az $x^2 = -N(x) + t(x) \cdot x$, vagyis az $x^2 - t(x) \cdot x + N(x) = 0$ alakot ölti.

Megjegyzés. Jól ismert eredmény, hogy minden véges dimenziós alternáló algebra kvadratikus (*EBBINGHAUS ET AL. 1991*), így a fentiek szerint az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ egy olyan $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem asszociatív algebra, amelyik kvadratikus, de nem alternáló algebra.

2.3. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók vektorgeometriája

Definíció. A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ tetszőleges általánosított hiperbolikus kvaternió *valós részé*n (skalár rész) az

$$S(q) := a \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes részé*n (vektor rész) pedig a

$$V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük.

Definíció. Az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) := \{0 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ alakú általánosított hiperbolikus kvaterniókat tiszta képzetes kvaternióknak nevezzük.

Legyen $q := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, $q' := b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ két tiszta képzetes hiperbolikus kvaternió, akkor szorzatuk

$$q \cdot q' := -(-\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

lesz, ez indokolja a következő kettős definíciót.

Definíció. Két tiszta képzetes hiperbolikus kvaternió *skaláris szorzat*án a

$$q \circ q' := -\alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$$

valós számot, *vektoriális szorzat*án pedig a

$$q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük.

Megjegyzés. Ekkor tehát érvényes a $q \cdot q' = -q \circ q' + q \times q'$ összefüggés. A tiszta képzetes hiperbolikus kvaterniók $\circ$ skaláris szorzata az általános hiperbolikus kvaterniók $\langle\ ,\ \rangle$ skaláris szorzatának leszűkítése, vagyis ha $q, q' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor $q \circ q' = \langle q, q' \rangle$.

9. Tétel. A $\circ: Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \times Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ esetén

(a) $q \circ q' = q' \circ q$ kommutatív,
(b) $(r \cdot q) \circ q' = q \circ (r \cdot q') = r \cdot (q \circ q')$ homogén,
(c) $q \circ (q' + q'') = q \circ q' + q \circ q''$ balról disztributív,
(d) $(q + q') \circ q'' = q \circ q'' + q' \circ q''$ jobbról disztributív.

10. Tétel. Az $\times: Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \times Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}) \to Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ vektoriális szorzat egy anti-szimmetrikus bilineáris leképezés, tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ esetén

(a) $q' \times q = -q \times q'$ anti-kommutatív,
(b) $(r \cdot q) \times q' = q \times (r \cdot q') = r \cdot (q \times q')$ homogén,
(c) $q \times (q' + q'') = q \times q' + q \times q''$ balról disztributív,
(d) $(q + q') \times q'' = q \times q'' + q' \times q''$ jobbról disztributív,
(e) $q \times q = \mathbf{0}$,

ahol $\mathbf{0} := 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ a zérusvektor.

Megjegyzés. $(i \times j) \times j = k \times j = -\beta \cdot i$ és $i \times (j \times j) = i \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ezért $(i \times j) \times j \neq i \times (j \times j)$, vagyis a vektoriális szorzat az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ halmazban általában nem asszociatív.

Definíció. Ha $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor ezen elemek ilyen sorrendben képezett vegyesszorzatán a

$$qq'q'' := (q \times q') \circ q'' \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

11. Tétel. Ha $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor

(a) $qq'q'' = -\alpha \cdot \beta \cdot det(q, q', q'')$,
(b) $qq'q = (q \times q') \circ q = 0$,
(c) $(q \times q') \circ q'' = q \circ (q' \times q'')$ (invariancia tulajdonság).

Következmény. Ha $q, q', q'' \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$, akkor $qq'q'' = q'q''q = q''qq'$ (felcserélési tulajdonság).

12. Tétel. (GRASSMANN – azonosság, kifejtési tétel). Bármely $a, b, c \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ esetén érvényesek:

$$(a \times b) \times c = -[(a \circ c) \cdot b - (b \circ c) \cdot a],$$
$$a \times (b \times c) = -[(a \circ c) \cdot b - (a \circ b) \cdot c].$$

13. Tétel. (JACOBI – azonosság.) Bármely $a, b, c \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ elemekre érvényesek:

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = \mathbf{0},$$
$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \mathbf{0}.$$

14. Tétel. (LAGRANGE – azonosság.) Bármely $a, b, c, d \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ elemek esetén érvényes:

$$(a \times b) \circ (c \times d) = -\begin{vmatrix} a \circ c & a \circ d \\ b \circ c & b \circ d \end{vmatrix}.$$

Speciálisan, ha $a = c, b = d$, akkor igaz a

15. Tétel. (Speciális LAGRANGE – azonosság.) Bármely $a, b \in Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ elemekre érvényes:

$$(a \times b) \circ (a \times b) = -[(a \circ a) \cdot (b \circ b) - (a \circ b) \cdot (a \circ b)].$$

Az $\times$ vektoriális szorzás művelet 10. Tétel. (e) tulajdonsága, e művelet nem asszociatív tulajdonsága és a 13. Tétel első összefüggése alapján érvényes a következő

16. Tétel. Az $\{Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta}), +, \times\}$ algebrai struktúra egy LIE algebra.

2.4. Az általánosított hiperbolikus kvaterniók vektor-mátrix reprezentációja

Definíció. A $Z(\mathbb{R}) := \left\{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}: A_{11}, A_{22} \in \mathbb{R},\ A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}^3\right\}$ alakú hipermátrixok halmazát *Zorn* – féle vektor-mátrixoknak nevezzük. A $Z(\mathbb{R})$ halmazban műveleteket értelmezünk a következő módon. Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in Z(\mathbb{R})$, akkor
a skalárral való szorzás:

$$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

az összeadás:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

a szorzás:

$$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} :=$$
$$\begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} + A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} - A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

E műveletek értelmezése során az $\mathbb{R}$, illetve az $\mathbb{R}^3$ műveleteit, továbbá az $Im(\mathbb{M}_{\alpha\beta})$ struktúra $\circ$ skaláris szorzása és $\times$ vektoriális szorzása műveleteit használtuk fel.

17. Tétel. A $Z(\mathbb{R})$ halmaz a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

Definíció. Jelölje $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ azon speciális alakú Zorn-féle vektor-mátrixok halmazát, amelyre teljesülnek az

$$A_{11} = A_{22} = a \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad A_{12} = -A_{21} := (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$$

összefüggések.

18. Tétel. A $Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R})$ halmaz a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív és nem is asszociatív részalgebrát alkot a $Z(\mathbb{R})$ algebrában.

19. Tétel. Az

$$F: \mathbb{M}_{\alpha\beta} \to Z_{\mathbb{M}}(\mathbb{R}),$$
$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a & (b, c, d) \\ -(b, c, d) & a \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, vagyis egy bijektív és művelettartó leképezés, amelyre tetszőleges $r \in \mathbb{R}, q, q' \in \mathbb{M}_{\alpha\beta}$ esetén teljesül:

(a) $F(r \cdot q) = r \cdot F(q)$ homogén,
(b) $F(q + q') = F(q) + F(q')$ additív,
(c) $F(q \cdot q') = F(q) * F(q')$ multiplikatív

összefüggés.

A fenti tétel az $\mathbb{M}_{\alpha\beta}$ algebra vektor-mátrix reprezentációja.

Irodalomjegyzék

[1] **Dickson, L. E.**, Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1), (1912) 59-73.
[2] **Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K. Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R,** Numbers. Springer, 1991.
[3] **Hamilton, W. R.,** On Conjugate function, or algebraic Couples. British Association Report, Edinburg. (1834) 519-523.
[4] **Hamilton, W. R.,** Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a Preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. Transactions of the Royal Irish Academy, 17(1), (1837) 293-422.
[5] **Hamilton, W. R.,** On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 2 (1844) 424-434.
[6] **Hamilton, W. R.,** On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, 3 (1847) 1-16.
[7] **Jafari, M., Yayli, Y.,** Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 64(1), (2015) 15-27. doi:10.1501/Commua1_0000000724.
[8] **Kantor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.,** Hiperkomplex számok. Gondolat, Bp., 1985.
[9] **Karatas, A., Halici, S.**, Vector Matrix Representation of Octonions and Their Geometry. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 67(1), (2018) 161-167. doi:10.1501/Commua1_0000000839
[10] **Kösal, I. A.** A note on hyperbolic quaternions. Universal Journal of Mathematics and Applications, I(3), (2018) 155-159.
[11] **Macfarlane, A.** Hyperbolic Quaternions. Proceedings of the Royal Society at Edinburgh. vol. 23. (2018) 169 – 180 +figures plate.

[12] **Péntek, K.,** Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók, Matematikai Közlemények, VI. (2018) 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03

[13] **Rosenfeld, B.,** Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1997. doi:10.1007/978-1-4757-5325-7

[14] **Ward, J. P.**, Quaternions and Cayley Numbers. Spinger Science, Bussines Media B.V, 1997.

[15] **Zorn M.A.** Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg, (1931) 123-147.

[16] **Zorn, M. A.,** Alternativkörper und quadratische Systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg, (1933) 395-402.