

A Coulomb-féle súrlódással csillapított rezgőmozgás – oktatói szemmel

Barta Edit

Soproni Egyetem Informatikai és Matematikai Intézet
barta.edit@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A hallgató a tanulmányai során gyakran szembesül azzal, hogy egyes téma tárgyalásmódját „nem érti”, nehezen sajátítja el. Emögött gyakran az áll, hogy hiányosak a megértéshez szükséges matematikai és fizikai előismeretek. A súrlódással csillapított harmonikus rezgőmozgás egy szép példája annak, hogyan építhető fel egy új anyagrész úgy, hogy az minden ponton kapcsolódjék a hallgatók feltételezett előismereteihez.

ABSTRACT. During their studies, students are often confronted with the fact that they "don't understand" certain subjects, that they find it difficult to master them. This is often due to a lack of the mathematical and physical knowledge necessary for understanding. Harmonic oscillatory motion damped by friction is a good example of how to build up a new topic in such a way that it is linked at all points to the students' assumed prior knowledge.

1. Bevezetés

Matematika-fizika szakos hallgatóként majd mindkét tárgy oktatójaként felmerült bennem az a kérdés, hogy a csillapított harmonikus rezgőmozgás tárgyalásakor miért csak a sebességgel arányos csillapításról tanulunk, tanítunk, mikor a gyakorlatban a rezgést a súrlódási erő (is) csillapítja. Vajon milyen mozgás alakul ki, ha a szabadrezgést csak a súrlódás csillapítja, hogyan adható meg a mozgásegyenlet, abból hogyan vezethető le a kitérés-idő függvény. Bár tanulmányaim és oktatói munkám során nem volt szükség a probléma tárgyalására, érdeklődésemet újból felkeltette, amikor egy iskolai selejtezés során a kezembe akadt Bosznay Ádám: Mechanikai lengéstan I-II. című, 1961-es kiadású kézírata [1], melyben a 18-19. és a 35-41. oldalakon foglalkozik a témával. Nyelvezete és jelölésrendszere kissé régiesnek tűnik a fiatalabb korosztály számára, mértékegység használata pedig teljesen idejétmúlt. A mű a mozgásegyenletek levezetése helyett azok célirányos átalakításával kapott alakokból következtet a mozgás kitérés-idő függvényének képeire, s a grafikont felrajzolva elemzi azt.

Újabb keletkezésű a [2] tananyag, de ebben még mindig akad régebbi jelölés, és a levezetés is elnagyolt. Csernák Gábor [3] linken elérhető oktatási anyaga matematikáját tekintve részletes, de egyes jelölései és terminológiája eltér az általunk oktatottól.

Ezeket és még néhány interneten is hozzáférhető irodalmat tanulmányozva merült fel bennem annak ötlete, hogy a súrlódással csillapított rezgőmozgásnak egy olyan tárgyalási módját mutassam be, amely teljes egészében csak azokra a matematikai és fizikai ismeretekre épül, melyet egyetemünk hallgatói ezen két alapozó tárgy kurzusain már elsajátíthattak, és a jelölések is a tananyagainkhoz alkalmazkodnak. Jelen cikkemnek tehát hasonló a célkitűzése,

mint egy korábbi írásomnak [4], melyben a harmonikus rezgőmozgás matematikai tárgyalását próbáltam hozzáilleszteni a hallgatók fejében meglévő, feltételezett korábbi ismeretekhez. Azt, hogy a hallgatók fejében milyen gondolkodási sémák alakultak ki a rezgőmozgást illetően, azt nem tudhatjuk, csak azt, hogy korábban milyen formában (jelölésmóddal, szóhasználattal, levezetésekkel) találkozhattak a témával. Ez utóbbihoz célszerű illeszteni az új ismereteket, hogy azok minél könnyebben elsajátíthatóak legyenek.

2. A Coulomb-féle súrlódással csillapított rezgőmozgás tárgyalása

A műszaki életben megkülönböztetik a száraz és a nedves súrlódást. A középiskolában is tanult, egyszerűen csak (tapadási vagy csúszási) súrlódási erőnek nevezett erő, amely az egymással érintkező szilárd felületek elmozdulását igyekszik akadályozni, a száraz súrlódó erők csoportjába tartozik. Az, hogy az erő olyan tulajdonságokkal bír, mint ahogyan a tankönyvekben található (nagysága állandó a mozgás során és nem függ az érintkező felületek nagyságától csak azok anyagi minőségétől, ellentétes irányú a sebességgel, arányos a felületeket egymáshoz nyomó erővel), egy modell, amely akkor érvényes, ha a súrlódó felületek teljesen szárazak. Ekkor a súrlódó erő értéke a sebességtől is független. Az ilyen súrlódó erőt nevezik száraz súrlódó erőnek vagy Coulomb-féle súrlódó erőnek ([1] 18-19. old.). A felületek nedvesítése esetén a súrlódási erő sebességtől való függetlensége már nem mondható el. A száraz vagy Coulomb-féle súrlódási erőt a továbbiakban is súrlódási erőnek fogjuk nevezni, azzal a plusz tartalommal, hogy a felületek szárazak.

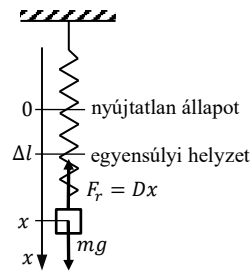
A továbbiakban az úgynevezett egy szabadságfokú mechanikai harmonikus rezgésekkel foglalkozunk, amikor a pontszerűnek tekintett test egy egyenes mentén mozdul el. A tömegpontra csak a kvázielasztikus és a súrlódási erő hat, nem hat más, például a szokásos, sebességgel arányos csillapító erő vagy külső kényszererő.

2.1. A szükséges fizikai és matematikai alapok

A téma tárgyalása a csillapítatlan és a sebességgel arányos csillapítású szabadrezgések után következhet. Ekkor már ismert a kvázielasztikus erő (ilyen a rugóerő is) fogalma és alakja, a hatására létrejövő harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete és annak megoldása, a kapott szinusz- vagy koszinusz függvényben szereplő fizikai mennyiségek (amplitúdó, körfrekvencia, frekvencia, periódusidő, fázis, fázisállandó vagy kezdőfázis) jelentése és egymással való kapcsolata. Ezen kívül fizikából szükségünk van még a súrlódási (mind a tapadási mind a csúszási) jelenségek és erők ismeretére, kiegészítve a fentebb leírtakkal. Matematikából a másodrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek homogén és inhomogén változatainak megoldási eljárásait fogjuk használni, a kapott eredmények értelmezéséhez pedig a függvénytranszformációk ismeretére lesz szükségünk. Ezek azok az ismeretek, amelyek szükségesek a téma megértéséhez, ezekhez kapcsolható az új anyag.

2.2. Egy bevezető feladat

A rugóra akasztott test mozgását általában függőleges helyzetben tanulmányozzuk, a mozgásegyenlet felírásakor azonban a rugó vízszintes, súrlódásmentes asztalon fekszik. Tesszük ezt mindazért, mert függőleges helyzetben a testre ható nehézségi erőt is figyelembe kell venni, ami vagy egy fokkal bonyolultabb mozgásegyenlet megoldását kívánja, vagy pedig egy koordináta-transzformációval iktatható ki. Mindkét módszer tanulságos és felhasználható a súrlódási erő figyelembe vételénél. Ezért lássuk most mindkettőt!



1. ábra. Függőleges helyzetű rugóra akasztott test és a rá ható erők

A függőleges rugóra akasztott testre két erő, a rugóerő és a nehézségi erő hat. E kettő eredője határozza meg a gyorsulását Newton II. törvénye alapján. Ha az x -tengely az 1. ábra szerint függőlegesen lefelé mutat, és kezdőpontját először a rugó nyújtatlan állapotában vesszük fel, akkor a dinamika alapegyenlete

$$m\ddot{x} = -Dx + mg \quad (1)$$

alakban írható. Ezt átrendezve és a tömeggel osztva, bevezetve az $\omega^2 = \frac{D}{m}$ jelölést, kapjuk az

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad (2)$$

inhomogén lineáris, állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenletet. A homogén rész általános megoldása [5] 72.old. alapján:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (3)$$

Az inhomogén rész egy partikuláris megoldását a próbafüggvények módszerével keressük, mely konstans esetén szintén konstansként veendő fel:

$$x_p = A.$$

Ennek deriváltjai nullák, behelyettesítve a (2) differenciálegyenletbe az

$$\omega^2 A = g$$

egyenletet kapjuk, melyből

$$A = \frac{g}{\omega^2},$$

ami egyben az inhomogén egyenlet keresett partikuláris megoldása. Ezzel a (2) egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}. \quad (4)$$

Az egyszerűség kedvéért az indítás legyen az egyik szélső helyzetben, amelynek a rugó nyújtatlan állapotától számított koordinátája x_0 . Itt engedjük el kezdősebesség nélkül a testet, vagyis a kezdeti feltételek:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= \dot{x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

A $t = 0$ -t behelyettesítve a (4) általános megoldásba $c_1 = x_0 - \frac{g}{\omega^2}$ adódik. Ezt behelyettesítve (4) egyenletbe, majd deriválva a kifejezést, kapjuk a sebességet:

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) \omega \sin(\omega t) + \omega c_2 \sin(\omega t).$$

Ebbe helyettesítve a sebességre vonatkozó kezdeti feltételt, $c_2 = 0$ adódik. Ezzel a (2) differenciálegyenlet megadott (5) kezdeti feltételeket is kielégítő partikuláris megoldása:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}. \quad (6/a)$$

Első kérdés: milyen fizikai tartalommal bír a $\frac{g}{\omega^2}$ kifejezés? Második: milyen mozgás alakul ki, és az hogyan ábrázolható? Az elsőre a választ úgy adhatjuk meg, ha felírjuk a rugóra akasztott test egyensúlyi állapotára az egyensúlyi egyenletet. Ebben a helyzetben a rugóerő és a nehézségi erő eredője zérus, vagyis a két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú. Ha a rugó megnyúlását Δl jelöli, akkor az egyensúlyi egyenlet:

$$D\Delta l = mg, \quad (7)$$

melyből

$$\Delta l = \frac{mg}{D} = \frac{g}{\omega^2},$$

vagyis a $\frac{g}{\omega^2}$ kifejezés éppen a rugónak a test egyensúlyi helyzetéhez viszonyított megnyúlása. A kinematikai mozgásegyenlet az egyensúlyi megnyúlással is felírható:

$$x(t) = (x_0 - \Delta l) \cos(\omega t) + \Delta l. \quad (6/b)$$

Ezek alapján a második kérdésre azt válaszolhatjuk, hogy a mozgás olyan csillapítatlan rezgőmozgás, amely a test egyensúlyi állapota körül megy végbe, amplitúdója $A = |x_0 - \Delta l|$, körfrekvenciája pedig ugyanakkora, mint amekkora lenne a rugó vízszintes helyzetében, nehézségi erő hatása nélkül. Vagyis a nehézségi erő a mozgás frekvenciáját nem változtatja meg, csak a rezgés középpontját tolja el a nyújtatlan állapotból az egyensúlyi állapotba. Ha a (6/b) egyenlet mindkét oldalából kivonjuk a Δl -et, akkor a bal oldalon az egyensúlyi helyzettől számított koordinátát kapjuk, mint az idő függvényét.

Ez a levezetés és gondolatmenet segít a súrlódással csillapított rezgés tárgyalásánál a differenciálegyenlet megoldásában és az általános megoldásaként kapott függvények elemzésének megértésében.

A függőleges rugóra akasztott test mozgásegyenlete felírásának másik lehetősége, hogy az x -tengely kezdőpontját eleve a test egyensúlyi helyzetében vesszük fel. Ekkor egy x koordinátával jellemzett helyen a testre ható rugóerő

$$F_r = -D(x + \Delta l)$$

alakban adható meg, amivel a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -D(x + \Delta l) + mg.$$

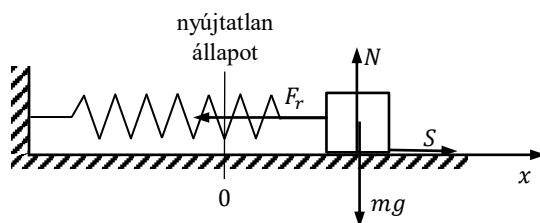
A zárójelet felbontva kapjuk:

$$m\ddot{x} = -Dx - D\Delta l + mg,$$

ahol a (7) egyensúlyi feltétel miatt $-D\Delta l + mg = 0$, így a mozgás differenciálegyenlete azonos a vízszintes helyzetű rugóra akasztott test mozgásegyenletével. Ez utóbbi meg gondolás egyszerűbb differenciálegyenletre és megoldásra vezet, de a száraz súrlódással csillapítás tárgyalásánál ez kevésbé hasznosítható, mint az előző, eltolt egyensúlyi helyzet körüli rezgés leírása.

2.3. A súrlódással csillapított rezgés differenciálegyenletei és azok általános megoldásai.

Legyen most a rugó vízszintes, és a rá akasztott tömegpont a rugó nyújtatlan állapotában legyen nyugalomban. Ebben a helyzetben vegyük fel az x -tengely kezdőpontját és a pozitív irány a 2. ábra szerint jobbra mutasson.



2. ábra. Vízszintes rugóra akasztott test és a rá ható erők

Térítsük ki a testet jobbra valamennyivel, és hagyjuk magára. Ebben a helyzetben a testre vízszintes irányban a balra mutató F_r rugóerő és a jobbra mutató S súrlódási erő hatnak, míg függőlegesen lefelé az mg nehézségi erő, felfelé pedig az asztal által kifejtett N nyomóerő hatnak. Mivel függőleges irányú elmozduláskomponens nincs, így ez utóbbi két erő eredője zérus, vagyis nagyságukat tekintve egyenlők. Ezek alapján a súrlódási erő

$$S = \mu N = \mu mg$$

nagyságú lesz. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk most el a tapadási (μ_0) és a csúszási (μ) súrlódási együttható különbözőségétől, vegyük őket egyenlőknek.

Ahhoz, hogy a test mozgásba jöjjön, a rugóerőnek meg kell haladnia a tapadási erő maximumát, azaz fenn kell állnia a

$$D|x| \geq \mu mg$$

egyenlőtlenségnek. Ez akkor teljesül, ha

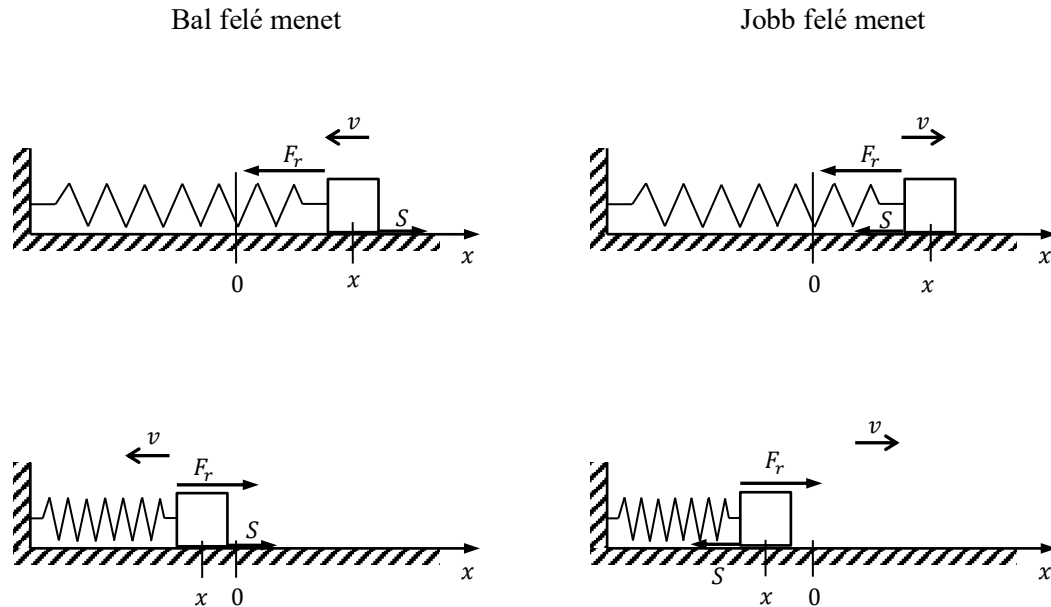
$$|x| \geq \frac{\mu mg}{D} = \frac{\mu g}{\omega^2} = x_0. \quad (8)$$

A jobb oldal átalakításánál ismét használtuk a szokásos $\omega^2 = \frac{D}{m}$ jelölést.

Tegyük fel, hogy indításnál a tömegpont kitérése jobb oldalra nagyobb x_0 -nál! Ekkor a test egy tetszőleges x koordinátájú helyén a dinamika alapegyenlete az

$$m\ddot{x} = -Dx \pm \mu mg \quad (9)$$

alakban adható meg, attól függően, hogy a tömegpont éppen balra ($+\mu mg$) vagy jobbra ($-\mu mg$) halad. Az előjelek helyes felvétele nagyon fontos a helyes végeredményhez, ezért a 3. ábra alapján érdemes átgondolni az x koordináta, a rugóerő és a súrlódási erő pozitív vagy negatív irányát a koordinátatengelyhez képest, mert ez dönti el pozitív vagy negatív előjelét a mozgásegyenletben.



3. ábra. Irányviszonyok a test egyes mozgásállapotaiban

Ha a jobb oldali szélső helyzetből kezdősebesség nélkül indítjuk a testet, akkor az első félperiódusban, amíg a bal oldali szélső helyzetbe ér, a sebesség balra mutat, a súrlódási erő ezzel ellentétesen jobbra, tehát ez utóbbi pozitív előjelű lesz a mozgásegyenletben. A második félperiódusban a mozgás jobbra történik, ekkor a súrlódási erő balra mutat, tehát negatív előjelű lesz. Minden páratlan félperiódusban pozitív, páros félperiódusban negatív előjelű lesz a súrlódási erő. Célszerű a két iránynak megfelelően két mozgásegyenletet felírni:

$$\text{bal felé menet: } m\ddot{x}_b = -Dx + \mu mg, \quad (10/b)$$

$$\text{jobb felé menet: } m\ddot{x}_j = -Dx - \mu mg. \quad (10/j)$$

Ezeket átrendezve és a szokásos alakra hozva kapjuk az

$$\ddot{x}_b + \omega^2 x = \mu g \quad (11/b)$$

$$\ddot{x}_j + \omega^2 x = -\mu g \quad (11/j)$$

inhomogén differenciálegyenleteket, melyek alakilag teljesen hasonlóak a bevezető feladatban felírt (2) differenciálegyenlethez.

A megoldás menete is hasonló. A homogén rész általános megoldása mindkettőnél a (3)-mal azonos, a konstans próbafüggvényre pedig a bal és a jobb iránynak megfelelően az

$$A_b = \frac{\mu g}{\omega^2} = x_0,$$

$$A_j = -\frac{\mu g}{\omega^2} = -x_0$$

adódnak. Ezzel a két inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x_b(t) = b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t) + x_0, \quad (12/b)$$

$$x_j(t) = j_1 \cos(\omega t) + j_2 \sin(\omega t) - x_0. \quad (12/j)$$

Teljesen hasonló alakúak, mint a bevezető feladat (4) egyenlete. Ennek megfelelően a mozgás is hasonló. Mindkét egyenlet ω körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgást ír le, tehát a Coulomb-féle súrlódás ugyanúgy nem változtatja meg a csillapítatlan szabadrezgés frekvenciáját, mint függőleges mozgás esetén a nehézségi erő. Mindkét harmonikus rezgőmozgás középpontja a rugó nyújtatlan állapotához (x -tengely nullpontja) képest el van tolva: bal felé menetben x_0 -lal jobbra, jobb felé menetben x_0 -lal balra. A rezgés középpontja így félszériódusonként, a szélső helyzetekben, amikor a mozgás irányt vált, megváltozik. Az x_0 fizikai jelentése (8) alapján az a távolság a nyújtatlan állapothoz képest, amelynél kisebb kitérés esetén a súrlódási erő egyensúlyt tart a rugóerővel. Ez azt jelenti, hogy ha a test sebessége az origótól felmért $+x_0$ és $-x_0$ szakaszon belül csökken nullára, akkor nulla is marad, azaz a test végleg megáll. Ezt a $2x_0$ hosszúságú szakaszt érzéketlenségi sávnak ([1] 36. old.) vagy bizonytalansági zónának ([3]) nevezik. A test letapadása akkor történhet meg, ha a mozgás fordulópontja a zónán belülre vagy a határára esik. Hogy ez pontosan mikor és mely helyzetben történik meg, az a kezdeti feltételek ismeretében számítható ki.

2.4. A differenciálegyenletek partikuláris megoldásai egy speciális indítás esetén

Indítsuk a mozgást kellően nagy kitéréssel a jobb oldali szélső helyzetben zérus kezdősebességgel. A kezdeti feltételek (5)-höz hasonlóan:

$$\left. \begin{aligned} x_b(0) &= A_0 > x_0 \\ v_b(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Innen a test balra indul el, tehát a (12/b) általános megoldásba helyettesítjük a $t = 0$ -t. A b_1 paraméterre

$$b_1 = A_0 - x_0$$

adódik, amit behelyettesítve a (12/b) egyenletbe, majd deriválva a kifejezést, kapjuk a sebességet:

$$\dot{x}_b(t) = -(A_0 - x_0)\omega \sin(\omega t) + \omega b_2 \sin(\omega t).$$

Ebbe helyettesítve a sebességre vonatkozó kezdeti feltételt $b_2 = 0$ adódik. Ezzel a (12/b) differenciálegyenlet megadott (13) kezdeti feltételeket is kielégítő partikuláris megoldása:

$$x_{b1}(t) = (A_0 - x_0) \cos(\omega t) + x_0,$$

ahol $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$. Ez az x_0 helyzet körüli $A_0 - x_0$ amplitúdójú koszinuszos rezgés első félszériódusát írja le. Ekkor a bal oldali szélső helyzetbe kerül a test, mozgása irányt vált, és a

(12/j) függvény szerint folytatja. Ennek kezdeti kitérése azonos x_{b1} végső kitéréseivel, kezdeti sebessége pedig zérus:

$$\left. \begin{aligned} x_j\left(\frac{T}{2}\right) &= x_{b1}\left(\frac{T}{2}\right) = (A_0 - x_0) \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) + x_0 = -(A_0 - 2x_0) \\ v_j\left(\frac{T}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Felhasználtuk a körfrekvencia és a periódusidő közötti $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggést és azt, hogy $\cos \pi = -1$. A $t = \frac{T}{2}$ időt (12/j)-be helyettesítve

$$j_1 = A_0 - 3x_0,$$

a sebességre vonatkozó zérus kezdeti feltétel pedig itt is $j_2 = 0$ -t eredményez. Így a második félperiódusban a mozgást az

$$x_{j2}(t) = (A_0 - 3x_0) \cos(\omega t) - x_0$$

függvény írja le, ahol $t \in \left[\frac{T}{2}; T\right]$. Ez egy $A_0 - 3x_0$ amplitúdójú rezgés a $-x_0$ helyzet körül. Ennek végén az újabb jobb oldali szélső helyzetben a kitérés

$$x_{j2}(T) = A_0 - 4x_0,$$

mely a következő, harmadik félperiódus kezdeti kitérése. Ezt újra (12/b)-be helyettesítjük, ezzel

$$b_1 = A_0 - 5x_0,$$

a kinematikai mozgásegyenlet pedig

$$x_{b3}(t) = (A_0 - 5x_0) \cos(\omega t) + x_0,$$

ahol $t \in \left[T; \frac{3T}{2}\right]$. Ez egy x_0 körüli $A_0 - 5x_0$ amplitúdójú rezgés. Következik a $\frac{3T}{2}$ időpontban a második baloldali szélső helyzet meghatározása, majd ennek mint a negyedik félperiódus kezdeti feltételének behelyettesítése (12/j)-be és $x_{j3}(t)$ felírása. A szélső helyzetekben a sebesség zérus volta miatt a b_2 és j_2 konstansok mindig nullák lesznek, mint ahogy láttuk a bevezető feladatnál és az első bal felé történő mozgás konstansainak meghatározásánál.

A kinematikai mozgásegyenletek további szakaszonkénti felírása ennek a módszernek a folytatásával történhet. Gondolkodtató kis matematikai feladvány a szakaszonkénti általánosított alak felírása, melyhez a következő lépéseken érdemes végigmenni. A balra tartó mozgások félperiódusainak sorszámát a páratlan számokkal, a jobbra történő mozgás félperiódusainak sorszámát a páros számokkal jellemezzük. Írjuk egymás alá a bal és a jobb irányú mozgások sorszámait, a hozzájuk tartozó amplitúdókat és a félperiódusok határait $T/2$ egész számú többszöröseiként! Annyit írjunk, amennyiből már látszik a szabály! A felírást az olvasóra bízunk. Az általános egyenletek alakja:

$$x_{n+1}(t) = [A_0 - (2n + 1)x_0] \cos(\omega t) + (-1)^n x_0, \quad t \in \left[n \frac{T}{2}; (n + 1) \frac{T}{2}\right], \quad (14)$$

ahol n természetes szám (0-tól indítva).

Tehát a test olyan harmonikus rezgőmozgást végez, amelynek középpontja minden szélső helyzetben megváltozik, és ehhez a szakaszonkénti középponthez képesti amplitúdó minden félperiódusban $2x_0$ -al csökken. A rugó nyújtatlan állapotához ($x = 0$) képesti egymást követő maximális kitérések szintén $2x_0$ -al csökkennek, de az alábbiak szerint:

$$A_n = A_0 - 2nx_0.$$

Ez egy számtani sorozat, melynek a differenciája $2x_0$.

A mozgás addig tart, amíg a maximális kitérés x_0 -nál kisebb nem lesz. Ebben a szélső helyzetben zérusra csökken a test sebessége, és mivel a bizonytalansági zónában állt meg, már nem indul el. A kérdés, hogy mely időpillanatban és hol következik be a végleges megállás? A megállás feltétele tehát:

$$A_0 - 2nx_0 \leq x_0,$$

ebből

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{x_0} - 1 \right) \leq n. \quad (15)$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést felfelé kerekítve egész számra, kapjuk n értékét. Az ehhez tartozó $t = n \frac{T}{2}$ időpillanatban áll meg a test. A megállás helyét pedig úgy kapjuk, hogy az n -nek megfelelő $x_{n+1}(t)$ függvénybe helyettesítjük a $t = n \frac{T}{2}$ időpillanatot:

$$x_{\text{megállás}} = x_{n+1} \left(n \frac{T}{2} \right) = (A_0 - 2nx_0) \cos(n\pi) = (-1)^n (A_0 - 2nx_0). \quad (16)$$

Megjegyzés: A Coulomb-csillapítással kialakuló rezgés nem periodikus mozgás, és csak véges ideig tart. Így szigorúan véve T -t sem nevezhetnénk „periódusidő”-nek, viszont a mozgásegyenletekben betöltött szerepe bizonyos tekintetben azonos a periodikus mozgásokéban betöltöttel. Például az, hogy két egymást követő maximális kitérés között mindig $T/2$ idő telik el. A pillanatnyi rezgési középponton és a szélső helyzeteken való áthaladások között is mindig azonos, $T/4$ idő telik el. Viszont a rugó nyújtatlan állapotához tartozó $x = 0$ helyzeteken való két egymást követő áthaladás között a mozgás más és más szakaszában más és más időtartam telik el. Az idő növekedtével ez az időtartam is nő.

2.5. A kitérés-idő függvény ábrázolása

A kapott (14) kitérés-idő függvény ábrázolása általánosan nem egyértelmű, mert csak A_0 és x_0 arányának ismeretében dönthető el, hogy hányadik félperiódusban és hol áll meg a test. A függvény eddig megtárgyalt tulajdonságai alapján az ábrázolás a következő elvek alapján történhet. Az időtengellyel párhuzamosan, attól x_0 távolságban fölfelé és lefelé húzunk egy-egy vízszintes egyenest. E kettő közötti sáv a bizonytalansági zóna, és egyúttal e két tengely jelenti a koszinusz függvények félperiódusonkénti középvonalát. A függvény rajzolását a pozitív kitérésnek megfelelő A_0 magasságból indítjuk, onnan rajzolunk egy fél koszinusz függvényt, mely $T/4$ időpontban metszi az x_0 magasságban behúzott tengelyt, és újabb $T/4$ idő elteltével az x_0 alatt, attól $A_0 - x_0$ távolságban éri el minimumát. Innen fölfelé rajzoljuk a következő fél koszinusz hullámot, de most a $-x_0$ magasságban futó tengely legyen a középvonala, tehát ezt metszi $T/4$ idő múlva, majd újabb $T/4$ idő elteltével ehhez képest szimmetrikusan, a pozitív tartományban éri el a maximumát. Innen megint lefelé indulunk x_0 középvonallal, és így tovább, amíg az egyik maximális kitérés nem esik a bizonytalansági zónába. Ott van vége a mozgásnak és a grafikonnak is.

A 4. ábrán egy konkrét adatokkal felvett kitérés-idő függvény grafikonja látható. A fizikai kiinduló adatok helyett a függvény paramétereit adtuk meg. A megállás helye és ideje a grafikon felvázolásával és számolással is meghatározható. Ez utóbbi esetén először a (15) összefüggés alapján meghatározzuk n -et, azt a félperiódust, amelynek a végén megáll a test:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{x_0} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{1,5} - 1 \right) = 4,83,$$

melyet felfelé kerekítve

$$n = 5.$$

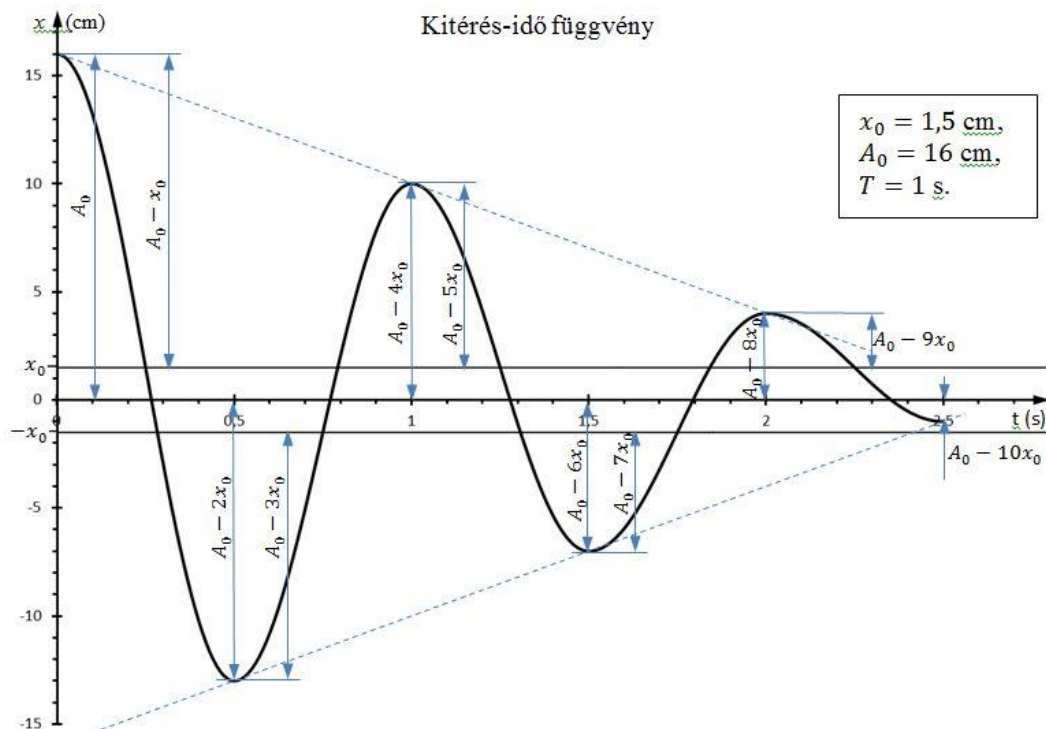
Ezt (16)-ba helyettesítve a megállás helye

$$x_{\text{megállás}} = (-1)^5 (16 - 10 \cdot 1,5) = -1 \text{ cm},$$

ideje pedig

$$t = n \frac{T}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ s},$$

ami a grafikonról is jól látható.



4. ábra. A Coulomb-féle súrlódással csillapított harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvényének képe egy konkrét esetben

3. Összefoglaló

Egy már látott vagy könnyen elképzelhető, egyszerűbb, esetleg már levezetett példával bevezetve, annak analógiájára mutattam be a Coulomb-féle súrlódással csillapított harmonikus rezgőmozgás egy lehetséges tárgyalásmódját. A tárgyalás során törekedtem arra, hogy csak olyan matematikai és fizikai ismeretekre támaszkodjak, amelyeknek egyetemi hallgatóink már feltételezhetően birtokában vannak. Bízom benne, hogy lesz olyan hallgató, aki elolvasva az anyagot úgy érzi majd, hogy ezt akár ő maga is levezethette volna.

Irodalomjegyzék

- [1] **Bosznay, Á.**: Mechanikai lengéstan I-II., Kézirat, Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar, Tankönyvkiadó, Bp. (1961).
- [2] **Dr. Czifra, Á., Dr. Goda, T.**: Mechanika III. Kinematika és Kinetika, (2014) 18. fejezet, https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0054_mechanika_iii_kinematika_kinetika/ch18.html
- [3] <https://www.mm.bme.hu/~csernak/kontakt/coulomb.pdf>
- [4] **Barta, E.**: Matematikai kiegészítések a harmonikus rezgőmozgás tárgyalásához, Dimenziók, Mat. Közl. **9** (2021), 51-61. doi:10.20312/dim.2021.06
- [5] **Barta, E., Nagy, Zs., Salay, L.**: Matematika 1.: EMK/SKK – BSc, Sopron, Magyarország: Soproni Egyetem Kiadó (2018) 72-73.