DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
X. kötet, 2022

doi:10.20312/dim.2022.07

Gerjesztett rezgések differenciálegyenletes modelljei

Horváth-Szováti Erika
Soproni Egyetem, Informatikai és Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A gerjesztett rezgések mozgásegyenletei másodrendű differenciálegyenletek, melyekkel hallgatóink erdészeti, faipari és környezetvédelemi kutatások területén is találkozhatnak. A differenciálegyenletek gyakorlati jelentőségére az alábbi egyszerű fizikai példákkal szeretnénk rávilágítani.

ABSTRACT. The equations of motion of excited vibrations are second-order differential equations, which students can encounter in the fields of forestry, wood industry and environmental protection research, among others. Here is an illustration of this type of differential equation with simple physical examples.

1. Bevezetés

A felsőbb matematika oktatása során egy adott téma gyakorlati alkalmazására legtöbbször nehéz szemléletes, viszonylag könnyen érthető példát adni. Ilyen a differenciálegyenletek témaköre is. A rezgések mozgásegyenletei állandó együtthatós, másodrendű, lineáris, homogén vagy inhomogén differenciálegyenletek. Az előző évi kiadványban a homogén esetet szemléltettük csillapított rezgések mozgásegyenleteinek felírásával, és elemeztük a megoldásul kapott kitérés-idő függvényeket [2]. Most ugyanennek a differenciálegyenlet-típusnak az inhomogén esetére mutatunk kidolgozott példákat a kényszerrezgések témaköréből. Megvizsgáljuk az eredményül kapott kitérés-idő függvényeket, és rámutatunk arra, hogy a matematikai megoldás során tapasztalt rezonancia, és a fizikai értelemben vett rezonancia fogalma szorosan kapcsolódik egymáshoz.

2. Gerjesztett harmonikus rezgés

Gerjesztett harmonikus rezgés során a rezgő testre egy külső, harmonikus gerjesztő erő hat. Legegyszerűbb példa az, amikor egy rugóra akasztott testtel végzünk kísérletet oly módon, hogy a rugó felső végét fel-le mozgatjuk, és a test ennek következtében kényszerrezgést végez. Ilyen típusú mozgás az is, amikor a hintát lökésekkel állandó mozgásban tartjuk. A rugóra akasztott m tömegű, a gyorsulással mozgó test mozgásegyenlete [1]:

$$ma = -F_{rugó} - F_{közeg} + F_{gerjesztő}\,. \tag{1}$$

Legegyszerűbb esetben a gerjesztő erő szinuszosan vagy koszinuszosan változik. Legyen $F_{gerjesztő} = F_0\, sin\omega t$, ahol F_0 a maximális gerjesztő erő, ω a gerjesztő erőt jellemző körfrekvencia. A továbbiakban a test kitérés-idő függvényét $x(t)$ -vel, a sebesség-idő függvényét $\dot{x}(t)$ -vel, gyorsulás-idő függvényét $\ddot{x}\,(t)$ -vel jelöljük. A rugóerő a kitéréssel egyenesen arányos, az arányossági tényező a D rugóállandó. A közegből származó csillapítás a test sebességével egyenesen arányos, és az arányossági tényező jele k (csillapítási tényező). Ezeket felhasználva az (1) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$m\,\ddot{x}\,(t) = -D\cdot x(t) - k\dot{x}(t) + F_0\,sin\omega t. \tag{2}$$

Ha a (2) egyenletet elosztjuk a test tömegével, és felhasználjuk a fizikából ismert $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ összefüggést (ahol ω_0 a rezgés saját körfrekvenciája), valamint a $\frac{k}{2m} = \beta$, és $a_0 = \frac{F_0}{m}$ jelöléseket, akkor az alábbi alakot kapjuk:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2\cdot x(t) - 2\beta\dot{x}(t) + a_0\,sin\omega t. \tag{3}$$

Ezt a differenciálegyenletet most elsősorban matematikai szempontból vizsgáljuk, ezért a fizikai tartalmának magyarázatát nagyon leegyszerűsítjük. Elegendő azt szem előtt tartani, hogy milyen információt hordoznak a konstansok. Az egyenletben szereplő ω_0 a rezgő rendszerrel (rugó és test együtt) kapcsolatos ($[\omega_0] = \frac{1}{s}$), a β a csillapító közeg jellemzője ($[\beta] = \frac{1}{s}$), az a_0 és az ω pedig a gerjesztő erő jellemzői ($[a_0] = \frac{m}{s^2}$, $[\omega] = \frac{1}{s}$). A (3) egyenletet átrendezve látható, hogy egy állandó együtthatós, másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, ahol a jobb oldalon álló $a_0\,sin\omega t$ a zavaró függvény [3]:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2\cdot x(t) = a_0\,sin\omega t. \tag{4}$$

Az egyszerűbb esetek megoldásához hallgatóink matematikai ismeretei is elegendőek, a következőkben erre nézünk néhány kidolgozott feladatot. A kapott kitérés-idő függvények ábrázolásával szemléletes kapcsolatot tudunk teremteni a kísérlet és annak matematikai modellje között.

3. Mintafeladatok

A (4) differenciálegyenletből származtatott homogén egyenletre felírt karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa $D = 4(\beta^2 - \omega_0^2)$. Ha $\beta < \omega_0$ (azaz $D < 0$), akkor a két gyök egy komplex konjugált számpár. Ilyenkor az $x(t)$ megoldás matematikai alakja attól függően változik, hogy $\beta = 0$ vagy $\beta \neq 0$, illetve $\omega = \omega_0$ vagy $\omega \neq \omega_0$. A próbafüggvény felírásakor csak akkor fordul elő rezonancia, ha $\beta = 0$ és $\omega = \omega_0$. Ha $\beta > \omega_0$ (azaz $D > 0$), akkor a karakterisztikus egyenletből két valós gyök, ha $\beta = \omega_0$ (tehát $D = 0$), akkor egyetlen valós gyök adódik, és a próbafüggvényben egyik esetben sem tapasztalunk rezonanciát [4]. Az alábbiakban ezeket az eseteket tekintjük át egy-egy egyszerű kidolgozott példa segítségével.

Valamennyi mintafeladatban kényszerrezgésről van szó. Egy harmonikus rezgőmozgást végző testre szinuszosan változó gerjesztő erő, és egyes esetekben (ha a feladatban $\beta \neq 0$) a közegből származó csillapítás is hat. A mozgást befolyásoló, a fentiekben megmagyarázott jellemzők: ω_0, β, a_0, ω, ezek értékei az egyes példákban adottak. A kezdeti feltételek minden esetben azonosak: a test kitérése $t = 0$ s időpillanatban 0 méter, a sebessége ugyanekkor 0 $\frac{m}{s}$. A feladatokat alább külön nem szövegezzük meg, csak az adatokat közöljük.

3.1. $\beta < \omega_0$

3.1.1. feladat. $\beta \neq 0,\ \omega \neq \omega_0$ eset.

$\beta = 0{,}5\frac{1}{s},\ \omega_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{s},\ a_0 = 1\frac{m}{s^2},\ \omega = 1\ \frac{1}{s}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 3s$ időpillanatban!

Megoldás.

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(\mathrm{t}) + \frac{5}{4}x(t) = sint \tag{5}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0,\quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1 sint + C_2 cost),\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg:

$$x_P(t) = Asint + Bcost,\quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

A próbafüggvény első és második deriváltját (5)-be helyettesítve:

$$-Asint - Bcost + Acost - Bsint + \frac{5}{4}(Asint + Bcost) = sint.$$

Ebből együttható egyeztetéssel $A = \frac{4}{17},\ \ B = -\frac{16}{17}$. Ezeket (7)-be beírva:

$$x_P(t) = \frac{4}{17}sint - \frac{16}{17}cost. \tag{8}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (6) és (8) összege:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1 sint + C_2 cost) + \frac{4}{17}sint - \frac{16}{17}cost,\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt (9)-be helyettesítve $C_2 = \frac{16}{17}$ adódik. A másik kezdeti feltételhez (9)-et deriválni kell:

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(-\left(\frac{1}{2}C_1 + C_2\right)\right)sint + \left(C_1 - \frac{1}{2}C_2\right)cost\right] + \frac{4}{17}cost + \frac{16}{17}sint,$$

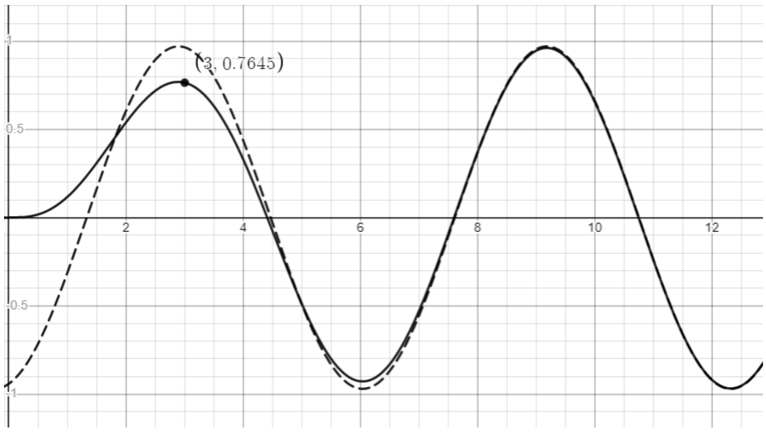
ebből $\dot{x}(0) = 0$ miatt $C_1 = \frac{4}{17}$. Az adott kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{4}{17}sint + \frac{16}{17}cost\right) + \frac{4}{17}sint - \frac{16}{17}cost. \tag{10}$$

A kitérés idő függvénybe behelyettesítve a $t = 3$s értéket megkapjuk a test kitérését az adott időpillanatban: $x(3) \approx 0{,}7645\ (m)$.

Az 1. ábrán a (10) kitérés-idő függvény ábrázolása folytonos vonallal történt (vízszintes tengely: idő (s), függőleges tengely: kitérés (s), valamennyi további ábrán a koordinátarendszerek tengelyeit ugyanígy értelmezzük). Látható, hogy az idő múlásával a rezgés állandósul. Ennek oka az, hogy a függvényben $t \to \infty$ esetén az első tag határértéke nulla (mivel $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$), és az állandósult állapot kitérés-idő függvénye a második és harmadik tagból áll csak (ez az 1. ábrán szaggatott vonallal látható):

$$x_{áll}(t) = \frac{4}{17}sint - \frac{16}{17}cost.$$



1. ábra. A 3.1.1. feladat kitérés-idő függvénye

Megjegyzés: Ha pl. $\beta = 1\frac{1}{s}$, $\omega_0 = \sqrt{2}\ \frac{1}{s}$, $a_0 = 1\frac{m}{s^2}$, $\omega = 1\ \frac{1}{s}$, akkor $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, ami matematikai szempontból kicsit egyszerűbben megoldható eset. Hátránya azonban az, hogy ekkor a végeredményben e^{-t} együttható lesz a 3.1.1. feladatban szereplő $e^{-\frac{1}{2}t}$ helyett, és a kényszererő hatása kevésbé látványos (hamarabb „együtt mozog” $x(t)$ és $x_{áll}(t)$).

3.1.2. feladat. $\beta \neq 0,\ \omega = \omega_0$ eset.
$\beta = 0{,}5\frac{1}{s}$, $\omega = \omega_0 = 1\ \frac{1}{s}$, $a_0 = 1\frac{m}{s^2}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 3s$ időpillanatban!
Megoldás.

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = sint.$$

Részletesen nem vezetjük le, mert hasonló az előbbi feladathoz. A karakterisztikus egyenlet gyökei a $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex konjugált számpár, az $x_P(t)$ felírásakor rezonancia nincs:

$$x_P(t) = Asint + Bcost, \text{ ahol } A = 0,\ B = -1.$$

A megoldásul kapott, kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - cost.$$

Ebbe behelyettesítve a $t = 3$s értéket megkapjuk a test kitérését az adott időpillanatban: $x(3) \approx 0{,}8656(m)$. A függvény grafikonja nagyon hasonló a 3.1.1. feladatnál látható 1. ábrához, emiatt nem közöljük. A rezgés kb. $t = 6$s-tól állandósul, $x_{áll}(t) = -cost$.

3.1.3. feladat. $\beta = 0,\ \omega \neq \omega_0$ eset.
$\beta = 0\frac{1}{s}, \omega_0 = 0{,}2\ \frac{1}{s},\ a_0 = 1\frac{m}{s^2},\ \omega = 0{,}3\frac{1}{s}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 30s$ időpillanatban!

Megoldás.
Az adatokat behelyettesítve (4)-be az

$$\ddot{x}(t) + 0{,}04x(t) = sin0{,}3t \tag{11}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\ddot{x}(t) + 0{,}04x(t) = 0,$$

$$\lambda^2 + 0{,}04 = 0,\ \ \lambda_{1,2} = \pm 0{,}2i.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása

$$x_H(t) = C_1 sin0{,}2t + C_2 cos0{,}2t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg. A próbafüggvény:

$$x_P(t) = Asin0{,}3t + Bcos0{,}3t, \quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

A próbafüggvény első és második deriváltját (11)-be helyettesítve:

$$-0{,}09Asin0{,}3t - 0{,}09Bcos0{,}3t + 0{,}04(Asin0{,}3t + Bcos0{,}3t) = sin0{,}3t.$$

Ebből együttható egyeztetéssel $A = -20$, illetve $B = 0$. Ezeket visszaírva (13)-ba:

$$x_p(t) = -20sin0{,}3t. \tag{14}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (12) és (14) összege:

$$x(t) = C_1 sin0{,}2t + C_2 cos0{,}2t - 20sin0{,}3t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

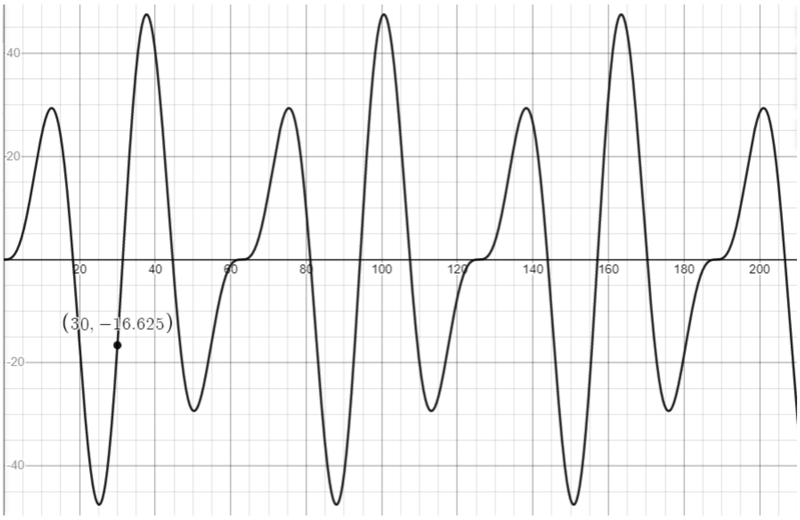
Az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt behelyettesítve (15)-be $C_2 = 0$ adódik. A másik kezdeti feltételhez (15)-öt deriválni kell:

$$\dot{x}(t) = 0{,}2C_1 cos0{,}2t - 0{,}2C_2 sin0{,}2t - 6cos0{,}3t.$$

Ebbe beírva az $\dot{x}(0) = 0$ feltételt $C_1 = 30$ adódik. A C_1 és C_2 konstansokra kapott értékeket visszaírva (15)-be a kezdeti feltétleknek megfelelő kitérés-idő függvény:

$$x(t) = 30sin0{,}2t - 20sin0{,}3t. \tag{16}$$

Behelyettesítve megkapjuk, hogy a test kitérése $t = 30s$ időpillanatban közelítőleg $-16{,}625$ méter (a negatív előjel a kitérés irányára utal). Látható, hogy (16) két korlátos, periodikus függvény különbsége. A különbségfüggvény is korlátos és periodikus lesz, periódusa a kisebbítendő és kivonandó függvények periódusainak (10π és $\frac{20}{3}\pi$) a legkisebb közös többszöröse: 20π.



2. ábra. A 3.1.3. feladat kitérés-idő függvénye

Erről az esetről általánosan is elmondható, hogy a karakterisztikus egyenlet megoldása egy komplex konjugált számpár, de csak képzetes részből állnak, a valós részük nulla (mivel $\beta = 0$). Emiatt x_H-ban csak trigonometrikus tagok szerepelnek, az exponenciális szorzó hiányzik. Mivel $\omega \neq \omega_0$, a próbafüggvény az x_H-val soha nem lesz rezonanciában. A kitérés-idő függvény ezekben az esetekben már a kezdőpillanattól kezdve állandósul és periodikus lesz.

3.1.4. feladat. $\beta = 0,\ \omega = \omega_0$ eset.
$\beta = 0\frac{1}{s}, \omega = \omega_0 = 1\ \frac{1}{s}, a_0 = 2\frac{m}{s^2}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 10s$ időpillanatban!
Megoldás.
Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 2sint \tag{17}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + 1 = 0,\quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = C_1 sint + C_2 cost,\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg. A differenciálegyenlet jobb oldalán álló zavaró függvény alakja és a (18)-cal fennálló rezonancia miatt a próbafüggvény (ahol a t szorzóval a rezonanciát szüntettük meg):

$$x_P(t) = (Asint + Bcost)t,\quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

A próbafüggvényt és második deriváltját (17)-be behelyettesítve:

$$2A\cos t - 2B\sin t = 2\sin t.$$

Ebből együttható egyeztetéssel $A = 0,\ \ B = -1$. Ezeket visszaírva (19)-be:

$$x_P(t) = -t\cos t. \tag{20}$$

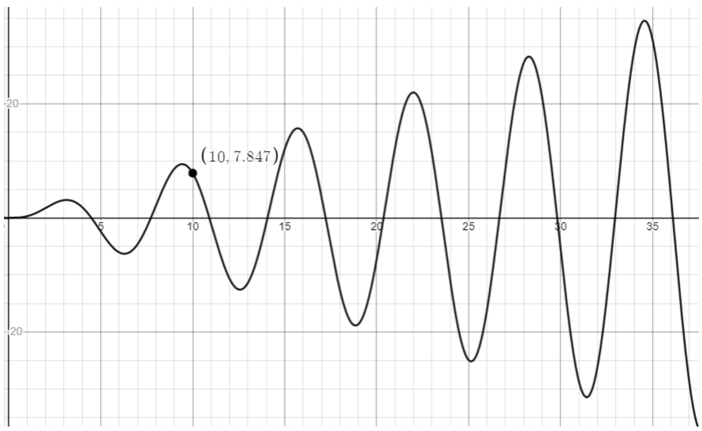
Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása (18) és (20) összege:

$$x(t) = C_1\sin t + C_2\cos t - t\cos t, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt (21)-be behelyettesítve $C_2 = 0$ adódik. A másik kezdeti feltételhez (21)-et deriválni kell, ebből a $\dot{x}(0) = 0$ feltétel miatt $C_1 = 1$. A kezdeti feltételeknek megfelelő kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = \sin t - t\cos t. \tag{22}$$

A $t = 10s$-hoz tartozó függvényérték közelítőleg $7{,}847$ méter. A 3. ábrán a (22) kitérés-idő függvényt ábrázoltuk. A függvény alakja azzal magyarázható, hogy a kisebbítendő $\sin t$ egy korlátos, periodikus függvény, a kivonandó $t\cos t$ pedig egy szintén korlátos és periodikus trigonometrikus függvény, illetve a $t \to \infty$ tényező szorzata. A különbség az ábrán látható módon egyre nagyobb amplitúdójú rezgést eredményez. Ezt a jelenséget a fizikában rezonanciának hívják.



3. ábra. A 3.1.2. feladat kitérés-idő függvénye

Általánosan is elmondható, hogy ha $\beta = 0$, akkor a karakterisztikus egyenlet megoldása egy olyan komplex konjugált számpár, amelynek a valós része nulla. Emiatt x_H-ban csak trigonometrikus tagok szerepelnek, az exponenciális tényezők hiányoznak. Mivel $\omega = \omega_0$, így akár szinuszosan, akár koszinuszosan változik a gerjesztő erő, a próbafüggvény az x_H-ban szereplő tagok valamelyikével rezonanciában lesz. Ezt a rezonanciát a próbafüggvényben egy t szorzóval tudjuk feloldani. A megoldásul kapott kitérés-idő függvényben ez a t szorzó okozza azt, hogy az amplitúdó a „végtelenségig nő". Tehát a matematikai értelemben vett rezonancia (illetve az ennek feloldására használt t szorzó bevezetésével kialakuló függvény) és a fizikai értelemben vett rezonancia (a „végtelenségig" növekedő amplitúdó) fogalma szorosan összefonódik. A rezonancia kapcsán érdemes megemlíteni a Tacoma-híd katasztrófáját, amely 1940 novemberében a szél által gerjesztett rezgések következtében egyre nagyobb amplitúdóval rezgett, végül összeomlott.

3.2. $\beta > \omega_0$

3.2.1. feladat.

$\beta = 2{,}5\frac{1}{s}$, $\omega_0 = 2\ \frac{1}{s}$, $a_0 = 1\frac{m}{s^2}$, $\omega = 1\ \frac{1}{s}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 2s$ időpillanatban!

Megoldás.

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(\mathrm{t}) + 4x(t) = sint \tag{23}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,\quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t},\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg, rezonancia nincs:

$$x_P(t) = Asint + Bcost,\quad \text{ahol } A, B \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

A próbafüggvényt egyszer, majd még egyszer deriváljuk, és a kapott függvényeket behelyettesítjük (23)-ba, majd az együtthatókat egyeztetjük. Ebből $A = \frac{3}{34}$, $B = -\frac{5}{34}$ adódik. Ha A és B értékét visszaírjuk (25)-be, és az így előállt partikuláris megoldást hozzáadjuk (24)-hez, akkor megkapjuk az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t} + \frac{3}{34}sint - \frac{5}{34}cost,\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

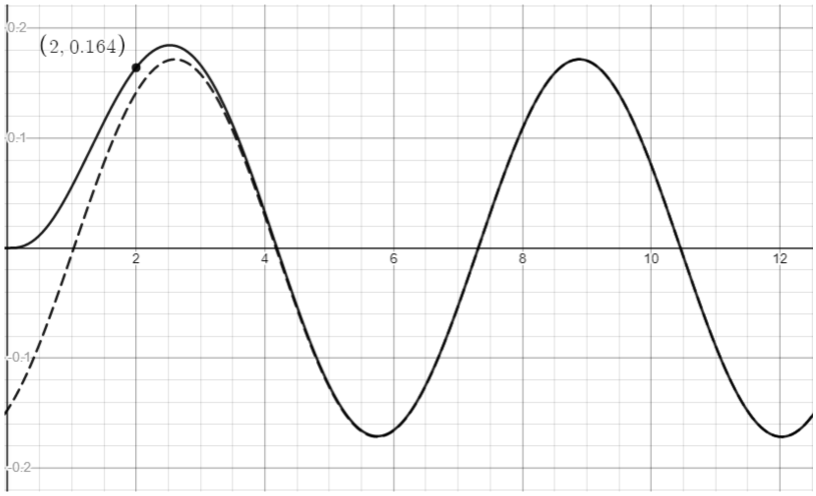
Az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt (26)-ba, az $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételt pedig (26) deriváltjába behelyettesítve $C_1 = \frac{1}{6}$ és $C_2 = -\frac{1}{51}$ lesz. Az inhomogén egyenlet kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldása tehát:

$$x(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{51}e^{-4t} + \frac{3}{34}sint - \frac{5}{34}cost\ . \tag{27}$$

Ebből kiszámítható, hogy a test kitérése $t = 2s$ időpillanatban közelítőleg $0{,}164$ méter. A (27) kitérés-idő függvény grafikonja a 4. ábrán látható.

A (27) kitérés-idő függvényt elemezve hasonló dolgokat mondhatunk el, mint a 3.1.1. és 3.1.2. feladatoknál. Ha $t \to \infty$, akkor az exponenciális tagok határértéke nulla, és a rezgés állandósul. Itt is szaggatott vonallal jelöltük az állandósuló kitérés-idő függvényt.

Felmerülhet a kérdés, hogy változtat-e a kitérés-idő függvény alakjának jellegén az, ha a $\beta > \omega_0$ feltételen kívül még az $\omega = \omega_0$ egyenlőség is fennáll. Könnyen látható, hogy nem. Mivel a homogén egyenlet általános alakja nem tartalmaz trigonometrikus tagot, semmiképpen nem fog rezonancia kialakulni a kényszererőt leíró zavaró függvénnyel.



4. ábra. A 3.2.1. feladat kitérés-idő függvénye

3.3. $\beta = \omega_0$

3.3.1. feladat.

$\beta = \omega_0 = 3\ \frac{1}{s}$, $a_0 = 1\frac{m}{s^2}$, $\omega = 1\ \frac{1}{s}$. Határozzuk meg a test kitérését a $t = 2s$ időpillanatban!

Megoldás.

Behelyettesítve (4)-be az adatokat az

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(\mathrm{t}) + 9x(t) = sint \tag{28}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A megoldás első lépése a homogén egyenletből származtatott karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározása (ahol $x(t) = e^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,\quad \lambda_{1,2} = -3.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_H(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t},\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével keressük meg, a próbafüggvény alakja ugyanaz, mint az előző feladatnál volt (ld. (25)). A próbafüggvény megfelelő deriváltjait behelyettesítve (28)-ba, majd az együtthatókat egyeztetve $A = \frac{4}{50}$ és $B = -\frac{3}{50}$. A konstansokra kapott értékeket visszaírva a próbafüggvénybe megkapjuk az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását. Ezt hozzáadva (29)-hez az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

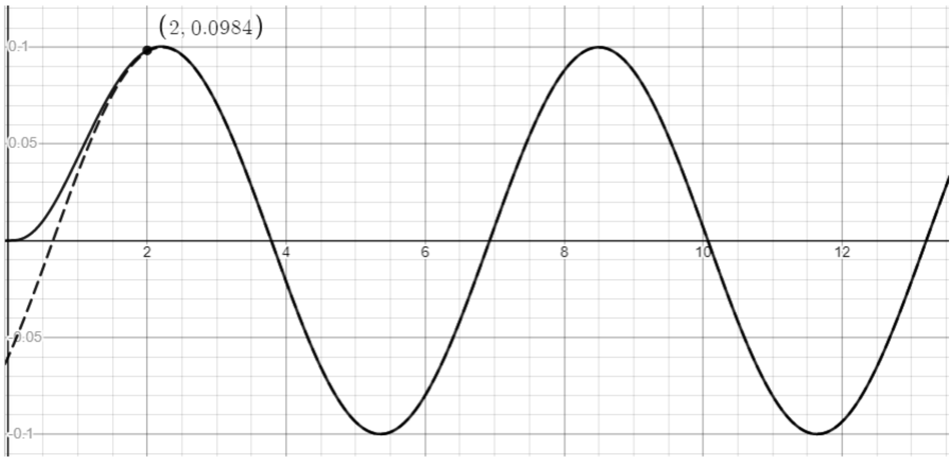
$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t} + \frac{4}{50} sint - \frac{3}{50} cost,\quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt behelyettesítve (30)-ba, az $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételt pedig (30) deriváltjába, $C_1 = \frac{3}{50}$ és $C_2 = \frac{1}{10}$ adódik. Az inhomogén differenciálegyenlet kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldása tehát:

$$x(t) = \frac{3}{50} e^{-3t} + \frac{1}{10} t e^{-3t} + \frac{4}{50} sint - \frac{3}{50} cost. \tag{31}$$

Ebből kiszámítható, hogy a test kitérése $t = 2s$ időpillanatban közelítőleg $0{,}0984$ méter. A (31) kitérés-idő függvényt az 5. ábrán ábrázoltuk. Ha $t \to \infty$, akkor az exponenciális tényezőt tartalmazó tagok határértéke nulla és a rezgés állandósul. Az állandósult kitérés-idő függvényt szaggatott vonallal jelöltük.

Megjegyzés: Az exponenciális függvények kitevőjében lévő -3 együttható miatt a 3.3.1. feladatban gyorsan állandósult a kitérés-idő függvény. Ha az adatokat úgy változtatjuk, hogy a kitevőben lévő együttható (azaz a karakterisztikus egyenlet egyetlen, valós gyöke) 1-nél kisebb lesz, akkor ez lassabban következik be. Itt a számolás menetének egyszerűségét tekintettük elsődleges szempontnak, emiatt használtuk a fenti adatokat.



5. ábra. A 3.3.1. feladat kitérés-idő függvénye

4. Összefoglalás

A csillapított és gerjesztett harmonikus rezgések mozgásegyenleteiből felírt differenciálegyenletek megoldásával jól szemléltethetők az állandó együtthatós, másodrendű, lineáris differenciálegyenletek. Gerjesztett rezgések esetén a differenciálegyenlet matematikai alakja, és ezzel együtt az alkalmazott megoldási módszer a rezgő rendszert, a csillapító közeget és a gerjesztő erőt jellemző ω_0, β, a_0 és ω mennyiségek számértékétől, illetve ezek egymáshoz viszonyított nagyságától függ. Az itt lévő feladatok megoldása a jobb képességű hallgatók számára nem okozhat nehézséget. A példák áttekintésével a matematikából és fizikából tanult ismereteik között kapcsolatot tudnak teremteni, és így átfogóbb természettudományos látásmódra tehetnek szert.

Irodalomjegyzék

[1] **Budó Ágoston**: Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[2] **Horváth-Szováti Erika:** Csillapított rezgések differenciálegyenletes modelljei. Dimenziók Matematikai Közlemények 9. kötet (2021), 33-41. doi:10.20312/dim.2021.04
[3] **Scharnitzky Viktor**: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
[4] https://www.walter-fendt.de/html5/phhu/resonance_hu.htm