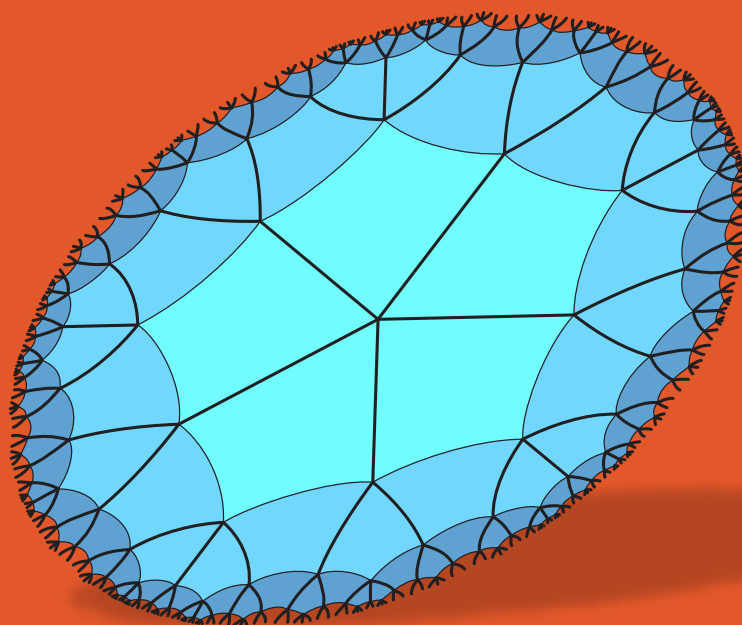


Dimenziók

Matematikai Közlemények

XII. kötet



**SOE FMK Alaptudományi Intézet
Soproni Tudós Társaság
2024**

Dimenziók

Matematikai Közlemények

XII. kötet

2024



SOPRONI EGYETEM KIADÓ

A **Dimenziók – Matematikai Közlemények** 2013 óta évente egyszer, a Soproni Egyetem (SOE) kiadásában megjelenő tudományos folyóirat, időszaki kiadvány (periodikum). A kéziratokat a szerkesztőbizottság tagjai, vagy független bírálók véleményezik, lektorálják, de a tartalomért a szerzők a felelősek.

FELELŐS KIADÓ NEVE: Dr. Fábián Attila, a SOE rektora

FŐSZERKESZTŐ: Dr. Németh László

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: Dr. Tóth Zsolt

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:

Nagy Zsolt (címzetes egyetemi docens, középiskolai tanár)

Dr. Németh László (SOE, egyetemi docens)

Dr. Szalay László (SOE, egyetemi tanár)

Dr. Tóth Zsolt (SOE, egyetemi docens)

KIADÓ:

Soproni Egyetem Kiadó

9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

KÖZREADÓ:

Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar Alaptudományi Intézet

9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

és

MTA VEAB Soproni Tudós Társaság

9400 Sopron, Csatka Endre utca 6-8.

Elektronikus elérhetőség: <https://journal.uni-sopron.hu/index.php/dimenziok>

HU ISSN 2064-2172 (Nyomtatott), ISSN 3057-9503 (Online)

Creative Commons license: CC BY-NC-SA 4.0 DEED



Nevezd meg! - Ne add el! - Így add tovább! 4.0 Nemzetközi
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International

Tartalomjegyzék

Egybevágó tetraéderek optimális térbeli pakolásairól és fedéseiről	3
Apollóniusz-feladatok és körláncok GeoGebrával	13
Súrlódási együttható meghatározása a gyakorlatban	25
Individual tree detection and spatial distribution analysis without reference data	33
Bizonytalanság, avagy óvatosan a statisztikával	43
Matematika tanítása Z generációs hallgatók számára	57
Milyen természettudományos alapokkal érkeznek a Soproni Egyetemre a leendő faipari mérnökök?	65
A matematika oktatás változása a Soproni Egyetemen (1. fejezet: 1943-1968).....	75
A Fermat-féle prímteszt R-kódjának optimalizálása.....	85
Az általánosított szedeniók és a vektor-mátrixok algebrája	91
Matematika a politechnikában és az építészetben	105
Irracionális számokról középiskolásoknak.....	111

Egybevágó tetraéderek optimális térbeli pakolásairól és fedéseiről¹

Talata István

Budapesti Gazdasági Egyetem, Külkereskedelmi Kar, Társadalomtudományi Módszertan
Tanszék

talata.istvan@uni-bge.hu,  0000-0003-0652-0464

ÖSSZEFOGLALÓ. Azt vizsgáljuk, hogy adott T tetraéder esetén van-e a T -vel egybevágó tetraédereknek olyan elrendezése a 3-dimenziós térben, amely lefedi a teret átfedések nélkül. Ha pedig nincs ilyen elrendezés, akkor mekkora lehet a T -vel egybevágó tetraéderek alkotta pakolások maximális sűrűsége, ill. mekkora lehet a T -vel egybevágó tetraéderek alkotta fedések minimális sűrűsége? Az utóbbi 15-20 évben jelentős előrehaladás történt ezen kérdések megválaszolásában. Összefoglaljuk e három probléma megoldásával kapcsolatos aktuális eredményeket, és a pakolási, ill. fedési problémára új alsó, ill. felső korlátot adunk tetraédereknek egy speciális osztálya esetén.

ABSTRACT. We consider the problem that for a given tetrahedron T , whether there exists an arrangement of tetrahedra congruent with T that fills the space without overlapping. If there is no such arrangement, then what is the maximum density of packings formed by tetrahedra congruent with T , or what is the minimum density of coverings formed by tetrahedra congruent with T ? In the last 15-20 years, significant progress has been made to answer these questions. We summarize the current results related to the solution of these three problems, and we give a new lower and upper bound, respectively, for the packing and covering problem, for a special class of tetrahedra.

1. Bevezetés

Adott T tetraéder esetén, a 3-dimenziós térben elhelyezett, T -vel egybevágó tetraéderek alkotta tetraédercsaládokat tekintve, a következő problémákat vizsgáljuk:

- 1. Probléma.** Van-e a T tetraéderrel egybevágó tetraédereknek olyan elrendezése, amely hézagmentesen és átfedések nélkül kiparkettazza a teret?
- 2. Probléma.** Mekkora lehet a T tetraéderrel egybevágó tetraéderek alkotta pakolások maximális sűrűsége?
- 3. Probléma.** Mekkora lehet a T tetraéderrel egybevágó tetraéderek alkotta fedések minimális sűrűsége?

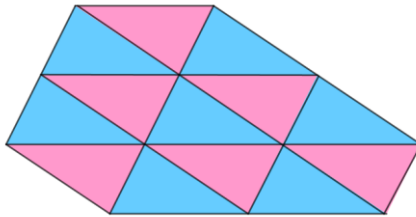
Egybevágóságon távolságtartó leképezést értünk, azaz két pont távolsága nem változik egy egybevágósági transzformáció alkalmazása során, az alakzat bármely két pontjára. Így három dimenzióban mozgatást és tükrözést is beleértünk az egybevágóságok közé (síkra vonatkozó tükrözés nem tartja meg az irányítást, míg mozgatás igen – ez utóbbi mindig előáll, mint egy forgatva eltolás, ld. [6]).

¹ ENGLISH TITLE. On optimal packings and coverings of congruent tetrahedra.

KULCSSZAVAK. Parkettázás, pakolás, fedés, szélsőértékfeladat, sűrűségkorlát, tetraéder.

KEYWORDS. tiling, packing, covering, extremum problem, density bound, tetrahedron.

Parkettázáson olyan elrendezést értünk, melyben bármely két testnek nincs közös belső pontja, de az összes test uniója lefedi a teret (nem feltétlenül kell a testeknek teljes lapokban vagy élekben, esetleg csúcsokban érintkezniük, ha nemüres a metszetük). Pakoláson olyan elrendezést értünk, melyben bármely két testnek nincs közös belső pontja. Fedésen pedig olyan elrendezést értünk, melyben az összes test uniója lefedi a teret. Ezeket a fogalmakat a síkra is alkalmazhatjuk (az egy 2-dimenziós tér), és arra mondható, hogy tetszőleges háromszög esetén annak egy élfelező pontjára tükrözött képével együtt vett megfelelő eltoltakkal kiparkettázhatjuk a síkot, azaz tetszőleges háromszög esetén kiparkettázható a sík annak egybevágó példányaival (ld. 1. ábra).

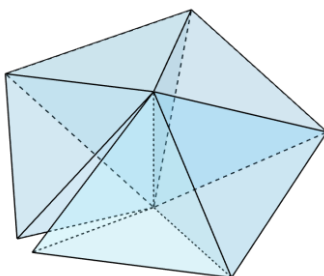


1. ábra. A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel

Egy elrendezés sűrűségén egy olyan határértéket értünk, amelynél egy kockába eső, elrendezésbeli testek térfogatösszegének és a kocka térfogatának a hányadosát vesszük, és a kockát a középpontjából r -szeresére nagyítjuk középpontos nagyítással úgy, hogy $r \rightarrow \infty$.

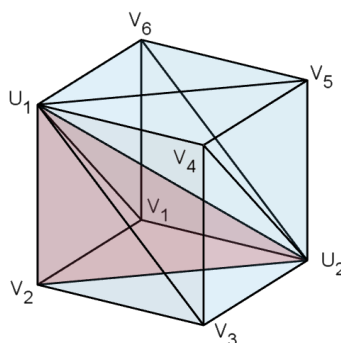
Megjegyezzük, hogy a tetraéderek a legegyszerűbb 3-dimenziós konvex poliéderek (konvex poliéderen olyan korlátos és zárt tartományát értjük a térnek, amely előáll, mint véges sok, síkkal határolt féltér metszete), mindössze 4 csúcsuk és 4 lapjuk van, továbbá háromszög alapú gúlákként is előállnak. Azonban a 2-dimenziós analogonjuktól, a háromszögtől eltérően, egy sor megoldatlan probléma merül fel azzal kapcsolatban, hogy mennyire jól tölthető ki a tér az egybevágó példányaikkal.

Szabályos tetraéderekkel nem lehet kiparkettázni a teret (ennek oka többek között az, hogy öt olyan szabályos tetraéder pakolása, amelyek közös élben találkoznak, és az egymást követő tetraédereknek közös lapjuk van, egy kis, kb. $7,36^\circ$ -os szög híján ér körbe, ld. 2. ábra). Arisztotelész ennek az ellenkezőjét állította, hibásan.



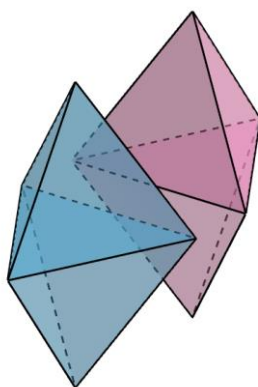
2. ábra. Öt szabályos tetraéder pakolása egy közös élük körül

Az 1. probléma (parkettázás) esetén azt vizsgálták, hogy az ott feltett kérdésre mely tetraéderek esetén igenlő a válasz (egy ilyen példa látható a 3. ábrán, ld. [5]). A 2. és 3. problémákat (pakolás, fedés) eddig leginkább csak szabályos tetraéderekre vizsgálták.



3. ábra. Az $U_1V_1U_2V_2$ tetraéder és öt másik, ezzel egybevágó tetraéder együttesen kiparkettázzák a kockát és így a teret is

Az utóbbi 15-20 évben jelentős előrehaladás történt ezen kérdések megválaszolásában, ld. Conway és Torquato (2006, [5]), Chen, Engel és Glotzer (2010, [1]), Chentouf és Sun (2023, [2, 3]) ezen témakörre vonatkozó publikációit. A 4. ábrán található elrendezéstípust használták [1]-ben sűrű tetraéderpakolás elkészítésére.



4. ábra. Háromszög alapú kettősgúla és azt érintő középpontos tükröképe (összesen 4 szabályos tetraéder) rácsszerű pakolásaival jó sűrűségbecslést lehet adni szabályos tetraéderpakolásokra

A következőkben összefoglaljuk a három problémával kapcsolatban elért részeredményeket, és a 3. problémára új felső korlátot adunk tetraédereknek egy speciális osztálya esetén.

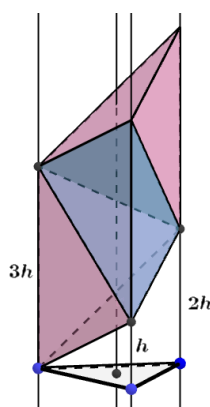
2. Parkettázások

Konvex testek egy családját a tér egy parkettázásának hívjuk, ha a belsejeik diszjunktak, és az uniójuk az egész tér. (Konvex testen korlátos, zárt és nemüres belsejű részhalmazát értjük a térnek.) Ha a testek térfogata alulról korlátos, azaz alsó korlátjuk egy pozitív szám, akkor könnyen belátható, hogy a konvex test konvex poliéder kell, hogy legyen (azaz előáll, mint véges sok féltér metszete).

Egy parkettázás lehet lap-a-laphoz típusú csatlakozásokkal megvalósítva, vagy anélkül. A lap-a-laphoz csatlakozás azt jelenti, hogy ha a parkettázásban résztvevő két poliéder metszete 2-dimenziós, akkor a metszetük lapja mindkét poliédernek. Ebből következik, hogy a parkettázásban bármely két poliéder metszetére fennáll, hogy ha az nem üres halmaz, akkor a metszetük vagy lap, vagy él, vagy csúcspont mindkét poliéderben.

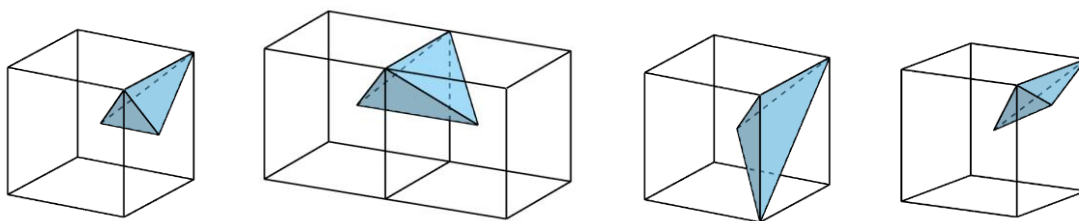
Az 5. és 6. ábrák tetraédereinek egybevágó példányaival lap-a-laphoz típusú csatlakozásokkal ki lehet parkettázni a teret, ezek jól ismert példák, ld. [3]. Az 5. ábrán látható példában a tetraédereknek egy két irányban végtelen sorozata a Boerdijk-Coxeter tetrahélix (ld. [11]) definíciójában szereplő konstrukcióval analóg módon jön létre, amelynek elemei egy háromszög alapú végtelen hasábot töltenek ki.

Hilbert a 23 nevezetes problémája közül a 3. problémában (1900-ban) azt kérdezte, hogy vajon bármely két, egyenlő térfogatú poliéder szétvágható-e olyan poliéderdarabokra, amelyekből a másik összerakható? Dehn már 1901-ben megválaszolta ezt a kérdést negatívan: ilyen esetben (azaz, ha a poliéderek átdarabolhatók egymásba) az ún. Dehn-invariánsuk is meg kell, hogy egyezzen. Később belátták, hogy ha egy poliéder egybevágó példányaival kiparkettázza a teret, akkor annak Dehn-invariánsa nulla (mint a kockáé), ld. [3]. A Dehn-invariáns nem csupán egy szám, hanem tenzorszorzatként van definiálva – ez egy kommutatív csoportnak egy eleme (ez a csoport előáll, mint egy vektortér faktortere).



5. ábra. 1. típusú Hill-tetraéder: tetraéderek olyan egyparaméteres családja, amelyből 3 db egymásra rakva egy háromszög alapú ferde hasábot alkot, így a teret kiparkettázza (van 2. és 3. típusú is)

Conway és Jones (1976, [4]) bevezették a racionális tetraéderek fogalmát. Ezek azok a tetraéderek, melyeknek minden lapszöge racionális szám (fokban), azaz minden lapszöge π -nek racionális számszorosa (radiánban). Ezen tetraéderek Dehn-invariánsa 0.



6. ábra. Sommerville-tetraéderek (a negyedik tetraéder a második tetraéder középpontjának és az egyik lapjának a konvex burka)

A racionális tetraéderek két végtelen, egyparaméteres tetraédercsaládból, és 59 sporadikus tetraéderből állnak (Kedlaya, Kolpakov, Poonen, Rubinstein, 2020, [9]).

Azon racionális tetraéderek, amelyek egybevágó példányai kiparkettázhatják a teret, a fentiekből egy végtelen tetraédercsalád, és a sporadikusakból legfeljebb 40 darab (Chentouf és Sun, 2023, [3]).

Van két végtelen, egyparaméteres családja a nem racionális tetraédereknek, amelyek egybevágó példányai kiparkettázhatják a teret (Chentouf és Sun, 2023, [3]).

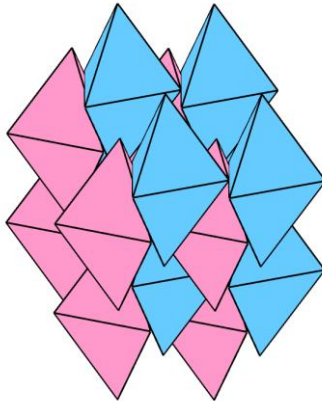
E fejezetben végezetül megemlítjük, hogy könnyen belátható, hogy ha egy tetraédernek nincs két egyenlő hosszúságú éle, akkor annak egybevágó példányaival nem lehet kiparkettázni a teret lap-a-laphoz módon.

3. Pakolások

3.1. Szabályos tetraéderek pakolásai

Hilbert a 18. problémája leírásának a végén a legsűrűbb gömbpakolás mellett a legsűrűbb szabályos tetraéderekből álló pakolást is megemlíti. Ulam (1972) azt sejtette, hogy a legsűrűbb gömbpakolás sűrűsége (kb. 74,05%) a legkisebb a konvex testek kongruens példányaiból álló legsűrűbb pakolások között. Conway és Torquato 2006-ban csak ennél rosszabb sűrűséget tudtak konstruálni szabályos tetraéderekre (kb. 71,655%-ot), ezért felvetették, hogy talán mégsem igaz Ulam sejtése.

De a 2007., 2008., 2009., 2010. években valós, majd számítógépes szimulációkkal több fizikus, majd matematikus is elért a legsűrűbb gömbpakoláshoz jobb, 75%, 76%, 78%, 83%, 85%-ot szabályos tetraéderekre, ld. [12]. Kettősgúlás duplarács pakolással Kallus, Elser, Gravel (2010, [8]) 85,47%-os sűrűséget ért el (ld 7. ábrát), Torquato és Jiao (2010, [10]) pedig 85,55%-os sűrűséget ért el, két szabad paramétert felhasználva a sűrűség optimalizálásakor. Chen, Engel és Glotzer (2010, [1]) 85,63%-os sűrűséget ért el, szintén kettősgúlás duplarács pakolással, három szabad paramétert felhasználva a sűrűség optimalizálásakor, ez a jelenlegi rekord.



7. ábra. Szabályos tetraéder kettősgúlás duplarács pakolása 85,47%-os sűrűséggel

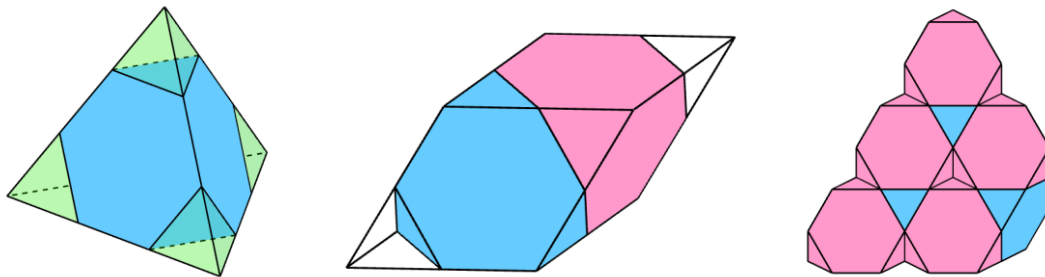
3.2. Egybevágó tetraéderek pakolásai

Mi a helyzet nem szabályos tetraéderek esetén? Szabályos tetraéder legsűrűbb rácspakolása $18/49 = 36,7\%$ -os sűrűséget ad (ld. Hoylman, 1970, [7]), ez affinitással tetszőleges tetraéder rácspakolásává módosítható ugyanekkora sűrűséget felvéve. Kallus, Elser, Gravel (2010, [8]) 71,94%-os sűrűségű duplarács pakolást konstruált, amelyben egy szabályos tetraéder eltoltjai mellett csak annak középpontos tükrökepeit használták fel, így megfelelő affinitást alkalmazva adódik, hogy tetszőleges tetraéder egybevágó példányaiból álló pakolások legnagyobb sűrűségére is érvényes ez az alsó korlát.

4. Fedések

4.1. Szabályos tetraéderek fedései

Conway és Torquato (2006, [5]) szabályos tetraéderek fedésére adott felső becslése $9/8=1,125$ (a cikkben van egy elírás ennél az értéknél, de az csak sajtóhiba, mivel az ott ismertett konstrukcióból ez az érték adódik, és csak a $9/8$ tört tizedestörtté alakítása hibás). Ha a csonka tetraédert (ez egy archimédészi test, amely úgy adódik, hogy a szabályos tetraédert a csúcsainál az élharmadoló pontjain átmenő síkokkal lecsonkoljuk) egy hatszöglapjának középpontjára tükrözzük, akkor a testnek és a tükörképének az uniója egy paralelepipedont alkot, kivéve a paralelepipedon két csúcsánál két kis szabályos tetraédernyi részt, mely tetraéderek élhossza harmadakkora, mint azé a tetraéderé, amelyből a csonka tetraéder keletkezik a csúcsainál történő csonkolással.



8. ábra. Szabályos tetraéderből készített csonka tetraédernek és annak a tükörképének eltoltjaiból álló rács pakolás

A paralelepipedon eltoltjaival kiparkettázzuk a teret, mindegyikbe beleírjuk a csonka tetraédert és a tükörképét (ld. 8. ábra), majd ezeket kicseréljük az eredeti szabályos tetraéderekre (amelyekből a szabályos tetraéderek keletkeztek. Ekkor a tér fedését kapjuk, melynek sűrűsége éppen $9/8$, mivel a csonka tetraéder és annak tükörképe a paralelepipedont

$$\left(1 - \frac{4}{27}\right)\left(1 - \frac{3}{27}\right) = \frac{23}{24}$$

sűrűséggel tölti ki, és amikor azokat a csonka tetraédereket kicseréljük szabályos tetraéderekkel, akkor az elrendezés sűrűsége $27/23$ -adszorosára változik, azaz a sűrűség értékére a következő adódik:

$$\frac{23}{24} \cdot \frac{27}{23} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

4.2. Egybevágó tetraéderek fedései

Conway és Torquato (2006, [5]) fentebb ismertetett konstrukciójában csak eltoltakat és középpontos tükörképet használtak a fedésben, így megfelelő affinitást alkalmazva adódik, hogy tetszőleges tetraéder egybevágó példányaiból álló fedések legkisebb sűrűségére is érvényes az $1,125$ felső korlát.

5. Új sűrűségbecslések tetraéderek egy speciális osztályára

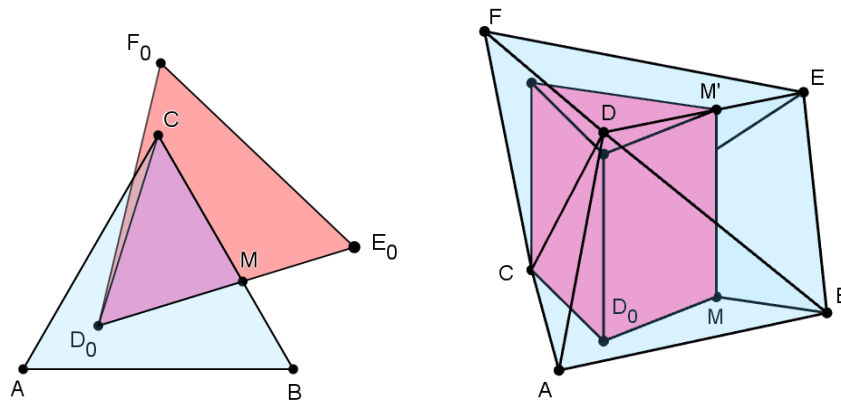
5.1. Szabályos lapokat tartalmazó tetraéderek

Legyen $T(\alpha)$ olyan tetraéder, amelynek két szabályos háromszöglapja van, amelyek oldalai egységnyi hosszúságúak, és a két lap bezárt szöge α , ahol $0^\circ < \alpha < 60^\circ$. Ekkor a $T(\alpha)$ tetraéder mindegyik éle 1 hosszúságú, kivéve egyetlen élt, amely a hosszúságú, $0 < a < 1$. A $T(\alpha)$ tetraédernek az a hosszúságú éllel szemközti szöge α . Fennáll $a = \sqrt{3} \sin(\alpha/2)$.

5.2. Felső becslések fedési sűrűségre

Tekintsük három egybevágó példányát a $T(\alpha)$ tetraédernek, az $ABCD$, $BCDE$ és $CDEF$ tetraédereket, melyekre az AB , BE , ill. CF élek a hosszúságúak. E tetraéderek a Boerdijk-Coxeter tetrahélix (ld. [11]) definíciójában szereplő tetraéderkonstrukcióval analóg módon jönnek létre (csak most nem szabályos tetraéderekre). A három tetraéder uniója egy olyan $P(\alpha)$ poliéder, amely egyedül a CD élénél konkáv (az összes többi élénél konvex). Ha α kicsi, akkor $P(\alpha)$ alakja közelebb egy háromszög alapú hasábhoz. Legyen a DEF lapjának az ABC lap síkjára vett merőleges vetülete $D_0E_0F_0$. Legyen M a BC és D_0E_0 szakaszok metszéspontja. Vegyük azt a $H_1(\alpha)$ háromszög alapú egyenes hasábot, amelynek alapja a CD_0M háromszög, és az erre merőleges MM' éle olyan, hogy az M' csúcsa a DE szakaszra esik. Ekkor a $P(\alpha)$ poliéder tartalmazza a $H_1(\alpha)$ hasábot (ld. 9. ábra).

Mivel a $H_1(\alpha)$ hasáb egybevágó példányaival kiparkettázható a tér, ezért a $P(\alpha)$ poliéder és a $H_1(\alpha)$ hasáb térfogataránya felső becslést ad a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival történő legkisebb sűrűségű térfedés sűrűségére. Kiszámítható, hogy ha $\alpha \leq 14,53^\circ$, akkor létezik legfeljebb 1,1 sűrűségű fedés a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival, ill. $\alpha \leq 10,36^\circ$ esetén létezik legfeljebb 1,05 sűrűségű fedés a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival, valamint $\alpha \leq 4,65^\circ$ esetén létezik legfeljebb 1,01 sűrűségű fedés a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival.

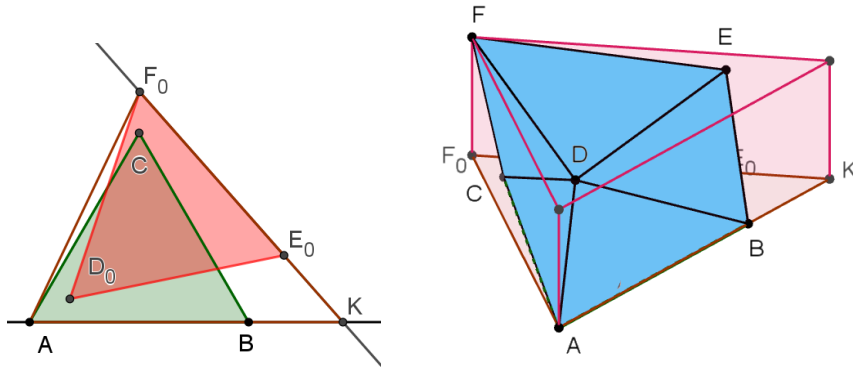


9. ábra. A három $T(\alpha)$ tetraéderből álló $P(\alpha)$ poliéderbe beírt $H_1(\alpha)$ háromszög alapú egyenes hasáb

5.3. Alsó becslések pakolás sűrűségére

Az előző bekezdésbeli konstrukcióhoz hasonlóan tekintjük a $P(\alpha)$ poliédert, amely a $T(\alpha)$ tetraéder három egybevágó példányának az uniója, de most olyan háromszög alapú egyenes hasábot veszünk, amely tartalmazza a $P(\alpha)$ poliédert. Legyen a K pont az AB egyenes és az E_0F_0 egyenes metszéspontja. Ekkor az a $H_2(\alpha)$ hasáb, melynek az AF_0K háromszög az alapja

és F_0F egy éle, tartalmazza a $P(\alpha)$ poliédert (ld. 10. ábra). Kiszámítható, hogy ha fennáll az $\alpha \leq 16,81^\circ$ egyenlőtlenség, akkor létezik legalább 0,9 sűrűségű pakolás a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival, ill. $\alpha \leq 11,65^\circ$ esetén létezik legalább 0,95 sűrűségű pakolás a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival, valamint $\alpha \leq 5,12^\circ$ esetén létezik legalább 0,99 sűrűségű pakolás a $T(\alpha)$ tetraéder egybevágó példányaival.



10. ábra. A három $T(\alpha)$ tetraéderből álló $P(\alpha)$ poliédereköré írt $H_2(\alpha)$ háromszög alapú egyenes hasáb

6. Összefoglaló

Annak ellenére, hogy a tetraéder a legegyszerűbb poliéder, mégis igen nehéz problémák a térkitöltéseikkel kapcsolatos feladatok. Az elmúlt néhány évtized kutatómunkái alapján már többet tudunk e témakörben is, mivel ekkor jópár fontos eredmény született, de még mindig számos megoldatlan probléma áll előttünk. Ebben a cikkben összefoglaltuk az egybevágó tetraéderek által megvalósítható parkettázások, pakolások és fedések eseteire aktuálisan ismert, legfontosabb eredményeket, valamint tetraédereknek egy speciális osztálya esetén pakolási és fedési sűrűségbecsléseket adtunk.

Végezetül felsorolunk néhány, ehhez a témakörhöz kapcsolódó megoldatlan problémát. Először lássunk két, szabályos tetraéderek elrendezéseire vonatkozó problémát:

- 1) Egy pontot legfeljebb mennyi szabályos tetraéder tartalmazhat egy pakolásban? (Sejtés: 20, ld. [5].)
- 2) Egy szabályos tetraédert legfeljebb mennyi másik érinthet egy pakolásban? (Sejtés: 56, ld. [5].)

További megoldatlan problémákat is megemlítünk, ezek egybevágó tetraéderek elrendezéseire vonatkoznak:

- 3) Melyik T tetraéder esetén a legkisebb az a maximális sűrűségű pakolás, amelyet T egybevágó példányai alkotnak? Lehet-e kisebb egy ilyen maximális sűrűségű pakolás sűrűsége, mint a szabályos tetraéder esetén elérhető maximális sűrűség?
- 4) Melyik T tetraéder esetén a legnagyobb az a minimális sűrűségű fedés, amelyet T egybevágó példányai alkotnak? Lehet-e nagyobb egy ilyen minimális sűrűségű fedés sűrűsége, mint a szabályos tetraéder esetén elérhető minimális sűrűség?
- 5) Adjunk meg olyan algoritmust, amellyel eldönthető, hogy adott tetraéder esetén létezik-e annak egybevágó példányaival parkettázása a térnek!

- 6) Adottak a T_1, T_2, T_3 tetraéderek, melyek belsejei páronként diszjunktak. Tegyük fel, hogy $T_1 \cap T_2$ közös háromszöglapja a T_1, T_2 tetraédereknek, $T_2 \cap T_3$ pedig közös háromszöglapja a T_2, T_3 tetraédereknek. Legyen T_1 a tükörképe a T_2 tetraédernek a közös lapjuk síkjára vonatkozóan, és T_3 a tükörképe a T_2 tetraédernek a közös lapjuk síkjára vonatkozóan. Találjunk algoritmust, amellyel meghatározhatjuk azt a legnagyobb térfogatú, háromszög alapú ferde hasábot, amelyet a $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ poliéder tartalmaz!

Köszönetnyilvánítás.

A szerző szeretné megköszönni Németh Lászlónak és Szalay Lászlónak, hogy erről a témakörrel előadhatott Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2024-es programjában.

Irodalomjegyzék

- [1] **Chen, E. R., Engel, M., Glotzer, S. C.**, Dense crystalline dimer packings of regular tetrahedra, Discrete Comput. Geom. 44 (2010), no 2, 253–280. arXiv:1001.0586. doi: [10.1007/s00454-010-9273-0](https://doi.org/10.1007/s00454-010-9273-0)
- [2] **Chentouf, A. A., Sun Y.**, Dehn invariant zero tetrahedra, arXiv preprint, arXiv:2312.01282, (2023), 1-11. doi: [10.48550/arXiv.2312.01282](https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.01282)
- [3] **Chentouf, A. A., Sun Y.**, Tetrahedra tiling problem, arXiv preprint, arXiv: 2312.01654, (2023), 1-9. doi: [10.48550/arXiv.2312.01654](https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.01654)
- [4] **Conway, J. H., Jones, A. J.**, Trigonometric Diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity), Acta Arith. 30 (1976), no. 3, 229–240. doi: [10.4064/aa-30-3-229-240](https://doi.org/10.4064/aa-30-3-229-240)
- [5] **Conway, J. H., Torquato, S.**, Packing, tiling, and covering with tetrahedra, Proceedings of the National Academy of Sciences 103 (2006), no 28, 10612–10617. doi: [10.1073/pnas.0601389103](https://doi.org/10.1073/pnas.0601389103)
- [6] **Coxeter, H.S.M.**, A geometriák alapjai, Typotex (2012), 472 pp.
- [7] **Hoylman, D. J.**, The densest lattice packing of tetrahedra, Bulletin of the American Mathematical Society. 76 (1970), 135–138. doi: [10.1090/S0002-9904-1970-12400-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1970-12400-4)
- [8] **Kallus, Y.; Elser, V.; Gravel, S.**, Dense Periodic Packings of Tetrahedra with Small Repeating Units, Discrete Comput. Geometry. 44 (2010), no 2, 245–252. arXiv:0910.5226. doi: [10.1007/s00454-010-9254-3](https://doi.org/10.1007/s00454-010-9254-3)
- [9] **Kedlaya, K. S., Kolpakov, A., Poonen, B., Rubinstein, M.**, Space vectors forming rational angles. arXiv preprint, arXiv:2011.14232 (2020), 1-30. doi: [10.48550/arXiv.2011.14232](https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.14232)
- [10] **Torquato, S.; Jiao, Y.**, Analytical Constructions of a Family of Dense Tetrahedron Packings and the Role of Symmetry. arXiv preprint, arXiv:0912.4210 (2009), 1-30. doi: [10.48550/arXiv.0912.4210](https://doi.org/10.48550/arXiv.0912.4210)
- [11] **Talata, I.**, A Boerdijk-Coxeter tetrahélexről és általánosításairól, Dimenziók 11 (2023), 3-10.
- [12] Tetrahedron packing, Wikipedia, URL https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron_packing

Apollóniusz-feladatok és körláncok GeoGebrával¹

Újvári Dániel*

Selye János Egyetem, Gazdaságtudományi és Informatikai Kar, Matematika Tanszék
ujvaridani97@gmail.com,  0009-0006-8498-1759

Németh László

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
nemeth.laszlo@uni-sopron.hu,  0000-0001-9062-9280

ÖSSZEFOGLALÓ. Röviden bemutatjuk a síkbeli körre vonatkozó inverziót, majd példákat adunk ennek alkalmazására, az Apollóniusz-féle feladatok, az arbelosz és a Papposz-körláncok szerkesztésére. A szerkesztések újszerűsége abban rejlik, hogy az összes feladat egységesen, nagyon részletesen, a szerkesztési lépések pontos nyomonkövethetőségével, mindenki számára elérhetően van elvégezve. E tanulmány az első szerző Tudományos Diákköri Konferenciára készült dolgozatán alapszik.

ABSTRACT. We briefly introduce the inversion on the plane circle and then give examples of its application to the problems of Apollonius, the construction of arbelos, and the chains of Pappus. The novelty of the edits lies in the fact that the whole exercise is carried out in a unified way, in great detail, with precise tracing of the editing steps, in a way that is accessible to all. This article is based on the first author's paper submitted to the Scientific Students' Associations.

1. Bevezetés

A geometria az emberiség egyik legrégebbi tudományterülete, Eukleidész *Elemek* [2] című könyvének alapja is a geometria volt. Ez a könyv foglalja össze a geometria alapvető fogalmait és axiómarendszerét, amelyet euklideszi geometriaként ismerünk. Az euklideszi elemek által meghatározott geometriai rendszer rendkívül fontos volt az ókori és a középkori matematikában, és ma is széles körben tanítják a geometria alapjaként. Azonban, ahogy az idők során fejlődött a matematika, a geometria egyre kisebb szerepet kapott. Napjainkban a közoktatásban már nagyon kevés óraszámban oktatják, és azt is kevés szerkesztéssel.

A dolgozatunkban azt mutatjuk meg, hogy viszonylag nehéz feladatok akár egyszerűen is megszerkeszthetők. A szerkesztések során nem hagyományos körzőt, vonalzót használunk, hanem a GeoGebra szerkesztőprogramot, mint segédeszközt. Ennek az ingyenes programnak a segítségével mindenki könnyedén kipróbálhatja és felfedezheti a geometriai szerkesztéseket. Nem állítjuk, hogy ez kiváltja a hagyományos szerkesztést, de ennek a szoftvernek a segítségével gyorsan, egyszerűen, és látványosan be lehet mutatni szerkesztéseket. Számos példát

¹ ENGLISH TITLE. Apollonius' problems and circular chains with GeoGebra.

KULCSSZAVAK. Inverzió, Apollóniusz-feladatok, arbelosz, Papposz-körláncok.

KEYWORDS. Inversion, Apollonius' problem, arbelos, Pappus chain.

* Levelező szerző (corresponding author).

láthattunk a GeoGebra hasznosságára nemcsak a közép-, de a felsőoktatás kapcsán is, például Talata [6–8] munkáiban.

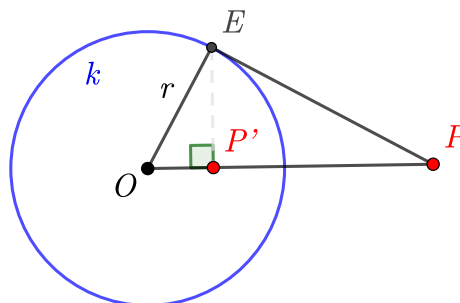
Dolgozatunkban egy jól ismert síkbeli transzformáción, az inverzió (körre vonatkozó tükrözés) keresztül adunk példákat a GeoGebra használatára. Nem célunk mélyrehatóan bemutatni az inverziót, (ami [3]-ben megtalálható) hanem az úgynevezett Apollóniusz-feladatokról néhány alapfeladatára és ezek speciális, látványos általánosításaira, az arbeloszra és a Papposz-körláncokra, adunk szerkesztéseket. A GeoGebra segítségével egységesen elkészített Apollóniusz-féle alapfeladatok megoldása online a <https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97> weblapon elérhető. Az alkalmazások nemcsak bemutatják az összes lehetséges megoldását, hanem azok szerkesztését egységes szemléletben kezeli. A feladatok teljeskörű elkészítésének gondolata a Selye János Egyetem (SJE) harmadéves matematika tanár szakos hallgatók Geometria 3 kurzuson merült fel. E dolgozat alapjául az első szerző nyertes egyetemi TDK dolgozata [10] szolgál. Megemlíjtük, hogy Sipos [5] az Apollóniusz-feladatok középiskolai vonatkozásáról is írt.

Meggyőződésünk, hogy a feladatok minden geometria iránt érdeklő és geometriát tanuló számára hasznos. Célunk még, hogy ha a középiskolában a diákoknak az inverzió nem is tananyag, akkor is a tanítási órákon, vagy szakkörökön a tanárok be tudják mutatni, hogy milyen lehetőségek rejlenek a geometriai szerkesztésekben. Továbbá, hogy felkeltsük a diákok, hallgatók érdeklődését, és arra motiváljuk őket, hogy felfedezzék a geometriai szerkesztések világát, amely sok tudományterületnek elengedhetetlen alapját képezi, mint például a robotika, navigáció, vagy az optikai rendszerek.

2. A síkbeli inverziók

Ebben a fejezetben a síkbeli inverzióról adunk egy rövid összefoglalót, amelynek egy precíz tárgyalása [3]-ban megtalálható.

Legyen adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör. Legyen P egy körön kívüli pont, amelyből húzzunk érintőt a k körhöz, majd az E érintési pontot vetítsük merőlegesen az OP szakaszra. Így kapjuk a P' pontot (1. ábra), a P inverzét. Most legyen P egy O -tól különböző belső pont. Ekkor P -re alkalmazzuk visszafelé a szerkesztést, azaz az OP félegyenesre állítsunk merőlegest P -ben. Ennek egyik metszéspontja a k körrel legyen E , majd E -ben szerkesszük meg a kör érintőjét és legyen ezen érintő és OP metszete P' pont. Ily módon minden külső ponthoz kölcsönösen egyértelműen egy O -tól különböző belső pontot tudunk rendelni. Minden körponthoz rendeljük önmagát. Ekkor a fenti síkbeli transzformációt körre vonatkozó inverzióknak nevezzük.



1. ábra. P pont inverz képe

Továbbá esetünkben igaz, hogy az $OP \cdot OP'$ értéke független P ponttól. Az OPE derékszögű háromszögre írjuk fel az OE oldala a befogótételt (lásd [4]) és mivel $OE = r$, kapjuk,

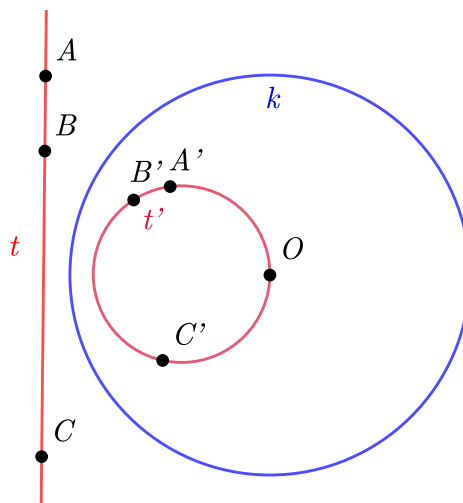
hogy

$$OP \cdot OP' = r^2. \quad (1)$$

A későbbiekben szükségünk lesz a sík minden pontjának, így az O pontnak is az inverz képére. Ezért ki kell terjesztenünk az inverziót a sík végtelen távoli elemeivel kibővített projektív síkra. (Minden egyenesnek van egy végtelen távoli pontja; párhuzamos egyeneseknek közös a végtelen távoli pontja; a sík végtelen távoli pontjai egy egyenest, az ún. végtelen távoli egyenest adják. – Szokás a végtelen távoli pontokat és a végtelen távoli egyenest ideális pontoknak és ideális egyenesnek is nevezni.) Ekkor a sík végtelen távoli pontjainak a k körre vett inverz képe az O pont, és fordítva.

Egy alakzat inverz képén az alakzat pontjainak inverz képeinek a halmazát értjük.

A továbbiakban vizsgáljuk meg egy kicsit részletesebben egy egyenes inverzióval vett képét. Legyen adott a síkon egy, az inverzió alapkörének a középpontját nem tartalmazó t egyenes. A t egyenesen vegyük fel az A , B és C pontokat. Határozzuk meg A , B és C inverz képét a k körre nézve. A t egyenes végtelen távoli pontjának inverz képe az O pont lesz. Az alábbi inverz pontok egy körre illeszkednek, tehát t képe egy O -n átmenő kör (lásd a 2. ábrán). A pontos bizonyítás [3]-ban megtalálható. Valójában t' meghatározásához elég lenne a t egyenes O -hoz legközelebbi pontjának a képe is. A GeoGebrával való szerkesztés során nem kell az egyes pontok képeivel foglalkoznunk, mert a programba már be van építve egy parancs, ami a körre vonatkozó inverziót tudja kezelni nemcsak egy pont, hanem bármely alakzatra vonatkoztatva. Ha t tartalmazza az O pontot, akkor $t = t'$, azaz t invariáns az inverzióra nézve.

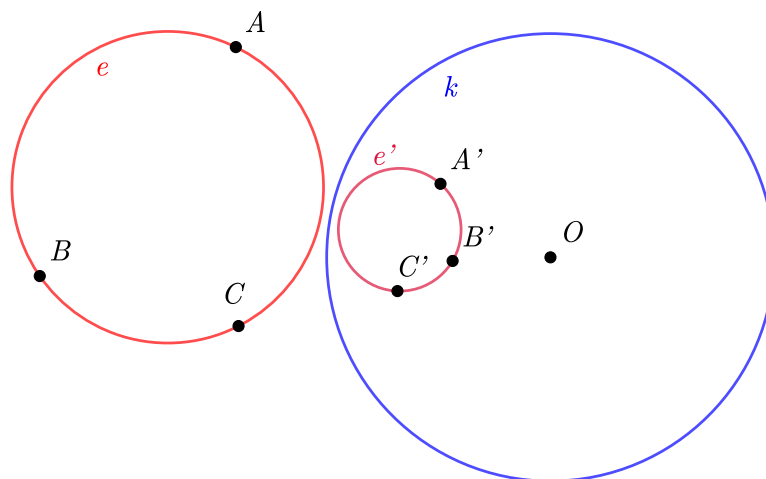


2. ábra. Egyenes inverz képe

Összegezve az egyenes inverziójának eseteit az alábbi állításokat kapjuk.

- Egy egyenes inverz képe mindig áthalad az inverzió O középpontján, és vagy kör, vagy egyenes lesz.
- Ha a t egyenes nem halad át az inverzió O középpontján, akkor t' egy kör.
- Ha a t egyenes tartalmazza az O pontot, t' is egy egyenes, sőt $t = t'$.
- Ahol t metszette, vagy érintette a k kört, ott fogja t' is metszeni, vagy érinteni k -t.

Most vizsgáljuk meg a körök inverz képeit. Legyen adott egy tetszőleges e kör. Az e körön vegyünk fel tetszőlegesen három pontot A , B és C -t (lásd pl. [12]). Határozzuk meg A , B és C inverz képeit a k körre nézve. Az így kapott A' , B' és C' pontokra illeszkedő kör az e kör



3. ábra. Kör inverz képe

inverz képe e' (lásd a 3. ábrán). Megjegyezzük, hogy megint a GeoGebra inverzió parancsát használtuk. A pontos bizonyítás [3]-ban megtalálható.

Összegezve a kör inverziójának eseteit az alábbi állításokat kapjuk.

- Egy kör inverz képe kör, vagy egyenes.
- Ha az e kör nem halad át az inverzió O középpontján, akkor e' egy kör.
- Ha az e kör tartalmazza az O pontot, e' egy egyenes.
- Ahol e metszette, vagy érintette a k kört, ott fogja e' is metszeni, vagy érinteni k -t.

2.1. Összegzés

A síkbeli inverzió a középponttól eltekintve kölcsönösen egyértelmű, ponttartó, illeszkedéstartó, szögtartó leképezés, amely az egyeneseket és köröket egyenesbe, vagy körbe viszi át. A végtelen távoli pontok képe az O pont és az O képe bármely végtelen távoli pont lehet. A továbbiakban ezen tulajdonságokat fogjuk felhasználni a szerkesztéseinkben.

3. Apollóniusz-feladatok

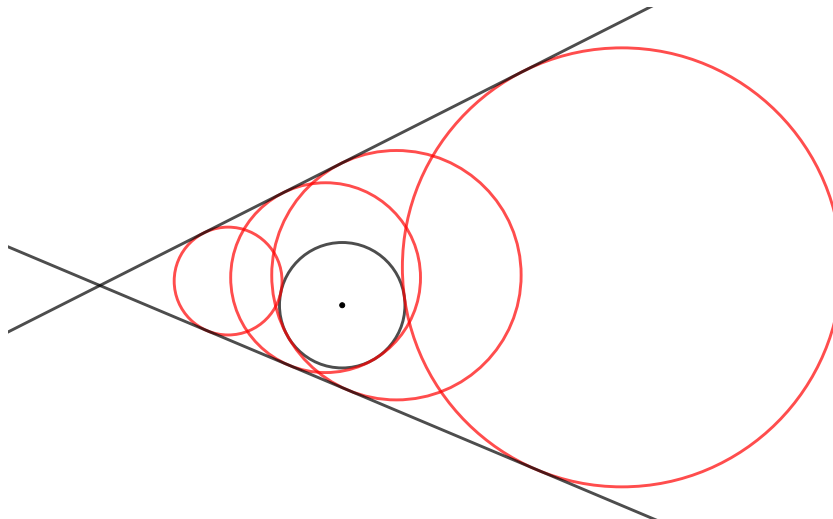
Ebben a fejezetben olyan geometriai feladatokat, problémákat fogunk tárgyalni, amelyek az inverzió ismeretével egyszerűbben megoldhatóak, mint hagyományos euklideszi szerkesztésekkel. Apollóniusz írt két könyvet *Contacts* (επαφαι – Epaphaí, Tangencies) címen, amelyben felvetette és meg is oldotta a híres problémáit [1, 5]. (Sajnos az eredeti könyv mára elveszett.) A probléma a következő: legyen adott három alakzat, amelyek lehetnek pontok, egyenesek vagy körök. Szerkesszünk olyan kört vagy egyenest, amely érinti az alakzatokat (átmegy a pontokon). Így keletkezett tíz feladat. Az egyszerűbben megoldhatókat az első könyvében írta le, míg az összetettebb megoldást igénylő feladatokkal a második kötetben foglalkozott. Az egyszerűbb esetek: ha például három pontra kell egy kört rajzolnunk, vagy három egyeneshez kell érintő kört szerkesztenünk. Ezek a háromszög köré és bele írható körök esetei. A legösszetettebb feladat az ún. kör, kör, kör feladat, amikor három körhöz keresünk érintő köröket.

A következőkben bemutatunk néhány esetet nem teljes részletességgel, a szerkesztéseket a GeoGebra szoftverrel végeztük el. Az összes eset részletes megoldása [9]-ben tekinthető meg.

3.1. Egyenes, egyenes, kör

Feladat. Adott a síkon két egyenes és egy kör (fekete). Szerkesszünk olyan kört mely érinti az adott elemeket (piros).

Elemzés. Az adott körünket ponttá kicsinyítjük és a kör sugarának nagyságával párhuzamosan eltoljuk az egyeneseket. Ekkor kapunk egy pont, egyenes, egyenes feladatot. Az eredeti (egyenes, egyenes, kör) és a transzformált (pont, egyenes, egyenes) feladat esetében a keresett körök középpontjai megegyeznek, sugaruk pedig a kicsinyítés nagyságával (a kör eredeti és a jelenlegi sugarának különbsége) különböznek [9]. A pont, egyenes, egyenes feladat esetén válasszunk egy tetszőleges inverziót, melynek középpontja a pont. Ekkor a pont képe a végtelenben lesz, a két egyenesből metsző köröket kapunk, és így a két körhöz kell megszerkesztenünk a két érintő egyenest. Ezen egyenesek inverz képeit kell nagyítani a végső megoldáshoz. Mivel az egyeneseket két irányba tudjuk eltolni, így kétszer két megoldást kapunk általában. Egy általános eset megoldása látható a 4. ábrán. A szerkesztés menete az alábbi linken elérhető: [Kör, egyenes, egyenes szerkesztésének menete GeoGebrával \[9\]](#).



4. ábra. Két egyenest és egy kört érintő körök

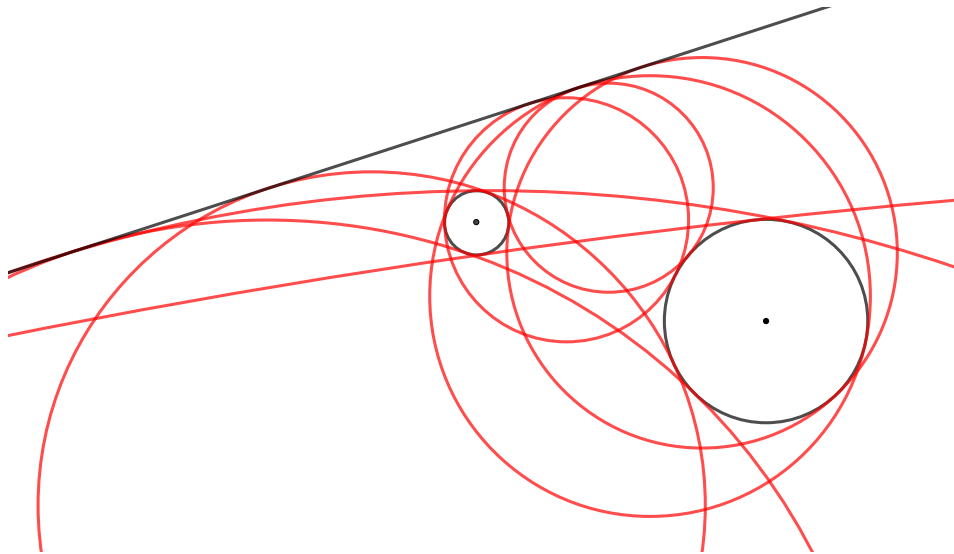
Diszkusszió.

- Ha t és f metszik egymást és p kör nem érinti az egyeneseket, akkor négy megoldás lesz.
- Ha érinti a p kör valamelyik egyenest, akkor három megoldás lesz.
- Ha az egyenesek metszéspontja és a kör középpontja egybeesik, akkor nyolc megoldás lesz.
- Ha f és t párhuzamos és p a két egyenes közötti síkon helyezkedik el, akkor két megoldása van a feladatnak.
- Ha az f és t egyenesek párhuzamosak, és a p kör valamely egyenes túloldalán helyezkedik el, de érinti az egyenest, akkor egy megoldásunk van.
- Ha az f és t egyenesek párhuzamosak, és a p kör valamely egyenes túloldalán helyezkedik el, de nem érinti az egyenest, akkor nincs megoldása a feladatnak.

3.2. Egyenes, kör, kör

Feladat. Adott a síkon egy egyenes és két kör. Szerkesszen olyan kört, amely érinti az egyenest és a két kört.

Elemzés. Kicsinyítsük le mindkét kört annyira, hogy az egyik ponttá zsugorodjon. Ekkor az egyenest is eltoljuk párhuzamosan a kicsinyítés távolságával. Így kapunk egy pont, egyenest, kör Apollóniusz-feladatot. Legyen az inverzió alapköre egy tetszőleges pont körüli kör. Alkalmazva az alakzatokra ezt az inverziót, kapunk egy kör, kör feladatot (a pont képe végtelenben van), azaz a két körhöz kell megszerkeszteni a közös érintőket. Majd ezek inverz képeit nagyítani a végső megoldáshoz. Mivel két irányba is el tudjuk tolni az egyenest, így általában kétszer 4 megoldásunk lesz (5. ábra).



5. ábra. Két kört és egy egyenest érintő körök

Szerkesztés menete. Egyenes, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrával [9].

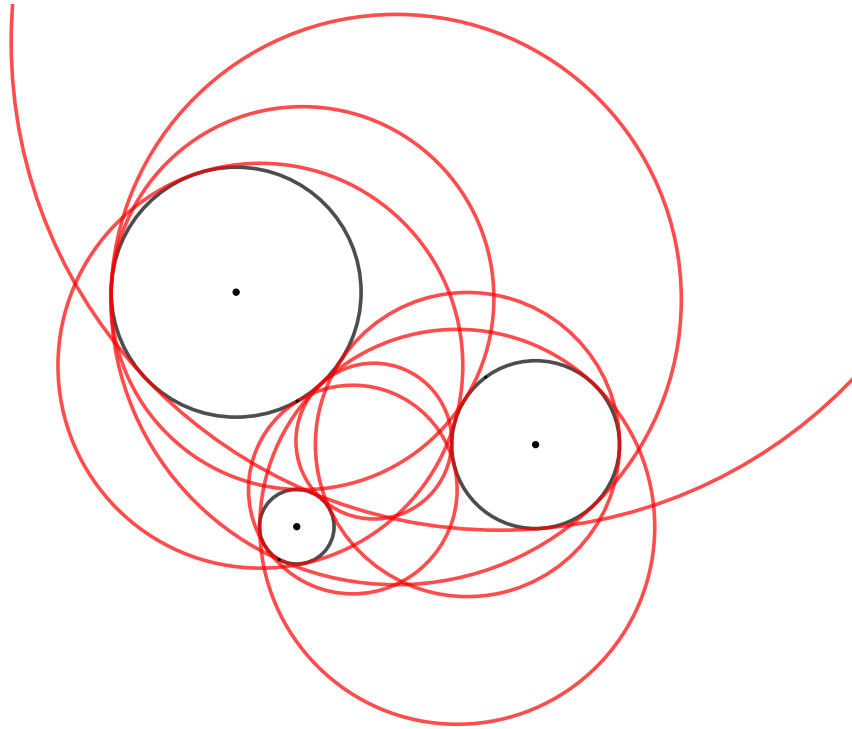
Diszkusszió.

- Ha a két kör nem fedi egymást, és az egyenes azonos oldalán helyezkednek el, akkor nyolc megoldás van.
- Ha az egyik kör érinti vagy metszi az egyenest, és a másik kört nem fedi, de azonos oldalon helyezkednek el, akkor négy megoldás van.
- Ha az egyik kör érinti vagy metszi az egyenest, és a másik kör a metsző körön belül helyezkedik el, akkor két megoldásunk van.
- Ha az egyik kör a másik körön belül helyezkedik el, és nem metszik az egyenest, vagy a két kör az egyenes két különböző oldalán helyezkednek el, akkor nincs megoldásunk.

3.3. Kör, kör, kör

Feladat. Adott a síkon három kör. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti a három kört.

Elemzés. Ebben a feladatban csúcsosodnak ki Apollóniusz feladatai. A körök kicsinyítésével a feladatot visszavezetjük a pont, kör, kör feladattá, ezt pedig egy pont körüli inverzióval a két körhöz szerkesztett érintő egyenesek esetére. Vagy ha veszünk egy pontot valamelyik körön és ezt tekintjük az inverzió középpontjának, akkor az egyenes, kör, kör esetre is vissza tudjuk



6. ábra. Három kört érintő körök

vezetni, amit pedig már az előzőekben bemutattunk. Bármelyik megoldási módszert is követjük általánosságban nyolc különböző érintő kört kapunk (6. ábra).

Szerkesztés menete. [Kör, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrával \[9\]](#).

Diszkusszió.

- Ha a három kör nem fedí és nem érinti egymást, akkor nyolc megoldás lesz..
- Ha két kör fedí egymást és a harmadik kört nem, akkor nincs megoldás.
- Ha az egyik körön belül helyezkedik el a maradék két kör, akkor négy megoldás lesz.
- Ha a körök érintik egymást, akkor két megoldás lesz.

4. Arbelosz

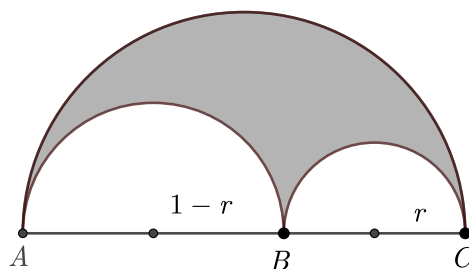
A továbbiakban a körök érintkezésének egy speciális esetét vizsgáljuk meg.

Az „arbelosz” kifejezés görögül cipésszékst jelent. Ezt a kifejezést a 7. ábra árnyékolt területére használjuk, amely az ókori suszterek által használt kés pengéjére emlékeztet. Arkhimédész volt az első matematikus, aki tanulmányozta ennek az alakzat a matematikai tulajdonságait. Az arbelosz egy olyan sík terület, amelyet három félkör határol, úgy hogy a félkörívek csúcspontjai egy egyenesen vannak, páronként megegyeznek és a félkörök a csúcspontok által meghatározott egyenes ugyanazon félsíkban vannak.

Az arbelosznak számos érdekes tulajdonsága létezik [11]. Ezek közül kettőt bemutatunk.

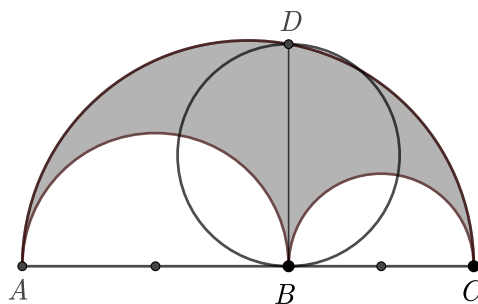
Ívhossz tulajdonság. Az arbelosz ívhossza a bezáró félkör mentén megegyezik a két kisebb félkör mentén mért ívhosszal. Ezt egyszerűen beláthatjuk. Legyen a bezáró félkör sugara 1, az egyik kis félkör sugara r , akkor a másik kis félkör sugara $1 - r$ lesz. Így az alsó és a felső ívhosszokra igaz, hogy

$$l = \pi r + \pi(1 - r) = \pi.$$



7. ábra. Arbelosz

Terület tulajdonság. Állítsunk merőlegest az átmérőre B pontban, hogy az így kapott egyenes metszéspontja a körívvel legyen D (8. ábra). A BD átmérőjű kör területe megegyezik az arbelosz területével. Az állítás könnyen belátható a megfelelő körök és félkörök területének a kiszámolásával.



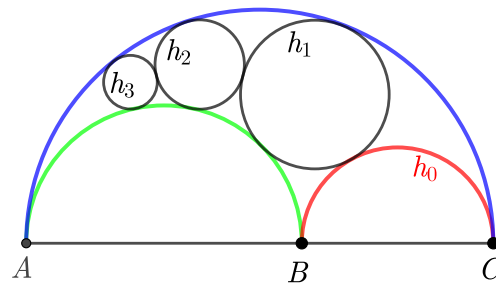
8. ábra. Arbelosz területével megegyező kör

5. Papposz-körláncok

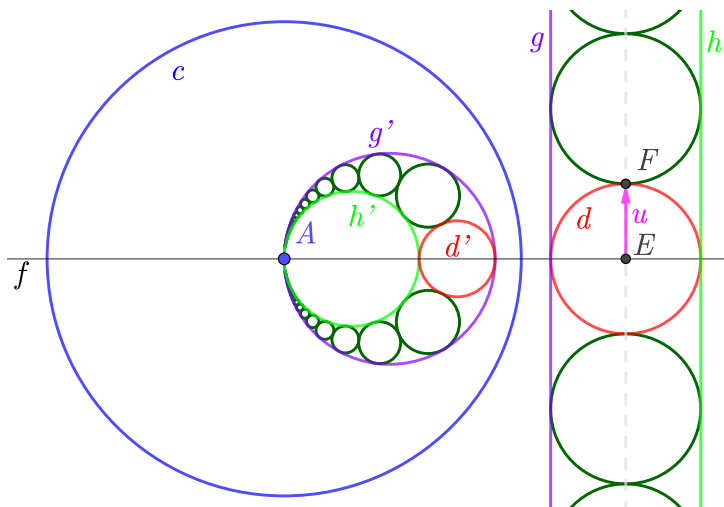
A Papposz-körlánc egy arbeloszon belüli, érintő körök láncolata. Legyen h_0 az arbeloszt alkotó r sugarú félkör, h_1 pedig az a kör amely mindhárom alkotó félkört érint a 9. ábrának megfelelően. A lánc következő köre, a h_2 kör, érinti a h_1 kört és a h_0 -tól különböző másik két alkotó félkört. Így folytatva ezen érintő körök definícióját, azaz a h_n kör érinti a h_{n-1} kört a két alkotó félkört, kapjuk meg a körök végtelen sorozatából a Papposz-körláncot (lásd a 9. ábra).

5.1. Papposz-körláncok szerkesztése körre vonatkozó tükrözéssel

Az előzőekben tárgyalt Apollóniusz-feladatokkal meg tudjuk szerkeszteni a körlánc elemeit, mert mindig három körhöz kell érintő kört szerkeszteni. Azonban ez egyesével szerkesztve hosszadalmas megoldás lenne. Amennyiben megvizsgáljuk a 9. ábrát, látható hogy két alkotógörbe érinti az összes körláncban elhelyezkedő kört. Egy harmadik kör pedig mindig érinti az előző, illetve következő kört a láncban. Az inverzió egyik alaptulajdonsága, hogy illeszkedéstartó, ezért elegendő a síkon megszerkesztenünk egy azonos méretű körökből álló érintkező láncot, melyek középpontja egy egyenesen helyezkedik el, valamint a két párhuzamos egyenest, melyek érintik a lánc köreit. Majd ezen konstrukció inverz képe ad egy Papposz-körláncot és tükröképét (lásd 10. ábra és <https://www.geogebra.org/m/ycjkb2v>).



9. ábra. Papposz-körlánc



10. ábra

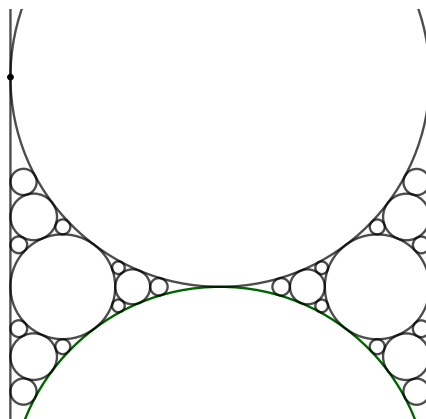
Szerkesztés.

- Vegyünk fel egy tetszőleges A középpontú c kört, mint az inverzió alapköre.
- Vegyünk fel egy tetszőleges E pontot.
- Szerkesszük meg az A és E pontra illeszkedő egyenest $\rightarrow f$.
- Szerkesszünk E középpontú tetszőleges sugarú kört $\rightarrow d$.
- A d kör és f egyenes metszéspontjaiban állítsunk merőlegest f egyenesre $\rightarrow g, h$ egyenesek.
- Szerkesszünk f egyenesre merőlegest E ponton keresztül, majd vegyük az egyik metszéspontját d körrel $\rightarrow F$ pont.
- Legyen $\vec{EF} = \vec{u}$ vektor.
- Szerkesszük meg a d kör és a g, h egyenesek inverz képét a c -re nézve $\rightarrow d', g', h'$ körök.
- Az E középpontú d kör toljuk el $2\vec{u}$ és $-2\vec{u}$ vektorokkal és vegyük ezek inverz képét. Majd ismételjük az eltolásokat és az inverziót az újabb körlánc elemeinek szerkesztéséhez (lásd a 10. ábra).

5.2. Körláncok Papposz-körláncban

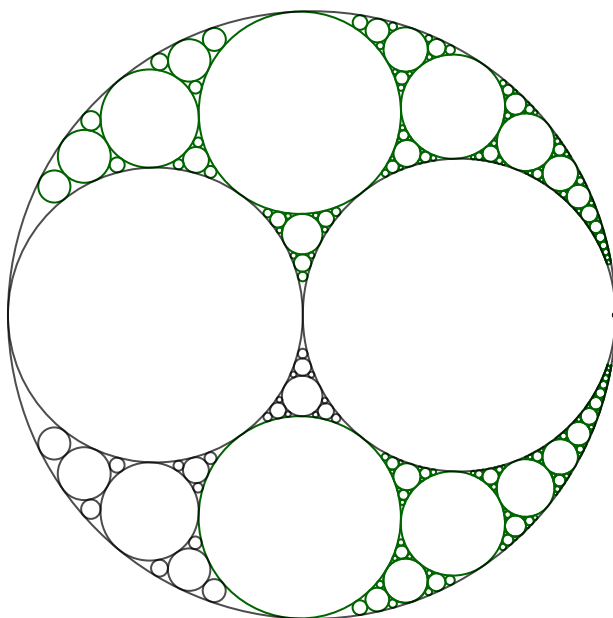
Továbbgondolva a Papposz-körláncot és az Apollóniusz-feladatokat arra a következtetésre jutottunk hogy össze lehet kombinálni őket. Ebben a fejezetben az idáig megismert apollóniuszi megoldásokat fogjuk használni Papposz-körláncban. Azt mutatjuk meg, hogy egy Papposz-

körláncon belül is lehet még végtelen sok körláncot létrehozni. Ha a két párhuzamosunk közé nem csupán egy kört szerkesztünk, hanem többet, akkor további körláncokat kapunk. Úgy készítjük a további köröket, hogy azok is érintő körök legyenek. Elsőként egy olyan kört szerkesztünk, amely érinti a két párhuzamoson belüli kört és az egyik egyenest. Itt alkalmazzuk az egyenes, kör, kör Apollóniusz-feladat megoldását, így kapva meg az érintő kört. Az így létrejött érintő körhöz is szerkesztünk még érintő köröket, amelyből még három Apollóniusz-féle feladat következik. Így bővítve az ábrát végtelen sok körláncot vagyunk képesek definiálni (lásd a 11. ábrán).



11. ábra. Papposz-körláncon belüli érintő körök inverz képe

Vegyük a párhuzamos egyenesek közé megkonstruált érintkező körláncok inverz képét, egy körön belüli érintkező körök sorozatait kapjuk, ahogyan ez a 12. ábrán látszik. A GeoGebrával elkészített szerkesztés pedig a <https://www.geogebra.org/m/bdfdjj53> lapon található.



12. ábra. Papposz-körláncon belüli érintő körök

Irodalomjegyzék

- [1] **Coxeter, H. S. M.**: *The problem of Apollonius*, The American Mathematical Monthly, **75** (2018), 5–11. doi: [10.2307/2315097](https://doi.org/10.2307/2315097).
- [2] **Euklidész**: *Elemek*, Gondolat, 1983.
URL <https://mek.oszk.hu/06200/06232/pdf/elemek1.pdf>
- [3] **György, H.**: *Bevezetés a Geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1960.
- [4] **Sándor, D., András, H., Géza, K., and László, S.**: *Geometria 11–12. évfolyam*, Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 2024.
URL https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_iii.pdf
- [5] **Sipos, E. R.**: *Apollonius' problems in grammar school*, Theaching Methemetic and Computer Science, **7** (2009), 69–85. doi: [10.5485/TMCS.2009.0205](https://doi.org/10.5485/TMCS.2009.0205).
- [6] **Talata, I.**: *Négydimenziós konvex politóp ábrázolása Geogebra-val*, Dimenziók – Matematikai Közlemények, **5** (2017), 11–18. doi: <https://doi.org/10.20312/dim.2017.02>.
- [7] **Talata, I.**: *Közelítő szögharmadolás szerkesztése Geogebra-val*, Dimenziók – Matematikai Közlemények, **7** (2019), 9–18. doi: <https://doi.org/10.20312/dim.2019.02>.
- [8] **Talata, I.**: *A Boerdijk-Coxeter tetrahélixről és általánosításairól*, Dimenziók – Matematikai Közlemények, **11** (2024), 3–11. doi: <https://doi.org/10.20312/dim.2023.01>.
- [9] **Újvári, D.**: *Inverziók geogebra-val*.
URL <https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97>
- [10] **Újvári, D.**: *Pappos körláncok szerkesztése körre vonatkozó tükrözéssel*, Tudományos Diákköri Konferencia, 2024.
- [11] **Weisstein, E. W.**: *Arbelos*.
URL <https://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html>
- [12] **Weisstein, E. W.**: *Inversion*.
URL <https://mathworld.wolfram.com/Inversion.html>

Súrlódási együttható meghatározása a gyakorlatban¹

Preklet Edina*

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
joobne.preklet.edina@uni-sopron.hu, 0009-0000-2922-5375

Szabó Péter

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Kreatívipari Intézet
szabo.peter@uni-sopron.hu, 0009-0004-1240-2557

ÖSSZEFOGLALÓ. Jelen tanulmányban saját tapasztalatainkat összegző módon vizsgáljuk a súrlódási erő mérésének problémáit, különös tekintettel a súrlódási együttható meghatározására. Bemutatásra kerül az egyes módszerek alkalmazhatósága és innovatív mérési lehetőségek is felvázolásra kerülnek. A tanulmány kitér a mérések során felmerülő kihívásokra és ezekre megoldási stratégiát kínál.

ABSTRACT. In this study, we summarize our own experience and examine the problems of measuring the friction force, with particular regard to the determination of the coefficient of friction. The applicability of each method is presented, and innovative measurement options are also outlined. The paper will address the challenges encountered in measurement and offer strategies for their solution.

1. Bevezetés

Már az elemző fizikai tanulmányok kezdetén szerepel a súrlódási erő hatásának vizsgálata a testek mozgására. A középiskolai tanulmányok során van lehetőség a súrlódás fizikájának mélyebb megértésére, illetve a téma lehetőséget ad a vektorokkal kapcsolatos műveletek gyakorlására. A megszerzett ismeretek később szükségesek további fizikai jelenségek modellezéséhez. A mérnöki problémák és számítások során felmerülő súrlódási jelenségek megértéséhez és elemzéséhez további részletesség és komplexitás szükséges.

Egy szilárd test felületén csúszó (nem gördülő) szilárd test csúszási súrlódására vonatkozó tapasztalati törvény (Coulomb, 1736-1806) szerint a súrlódásnál fellépő F_s súrlódási erő iránya a test v sebességével ellentétes, nagysága pedig közelítőleg független a sebesség és az érintkezési felület nagyságától, és arányos a felületre merőleges nyomóerő nagyságával, F_{ny} -vel. $F_s = \mu \cdot F_{ny}$, ahol a μ arányossági tényező a csúszási súrlódás együtthatója [1].

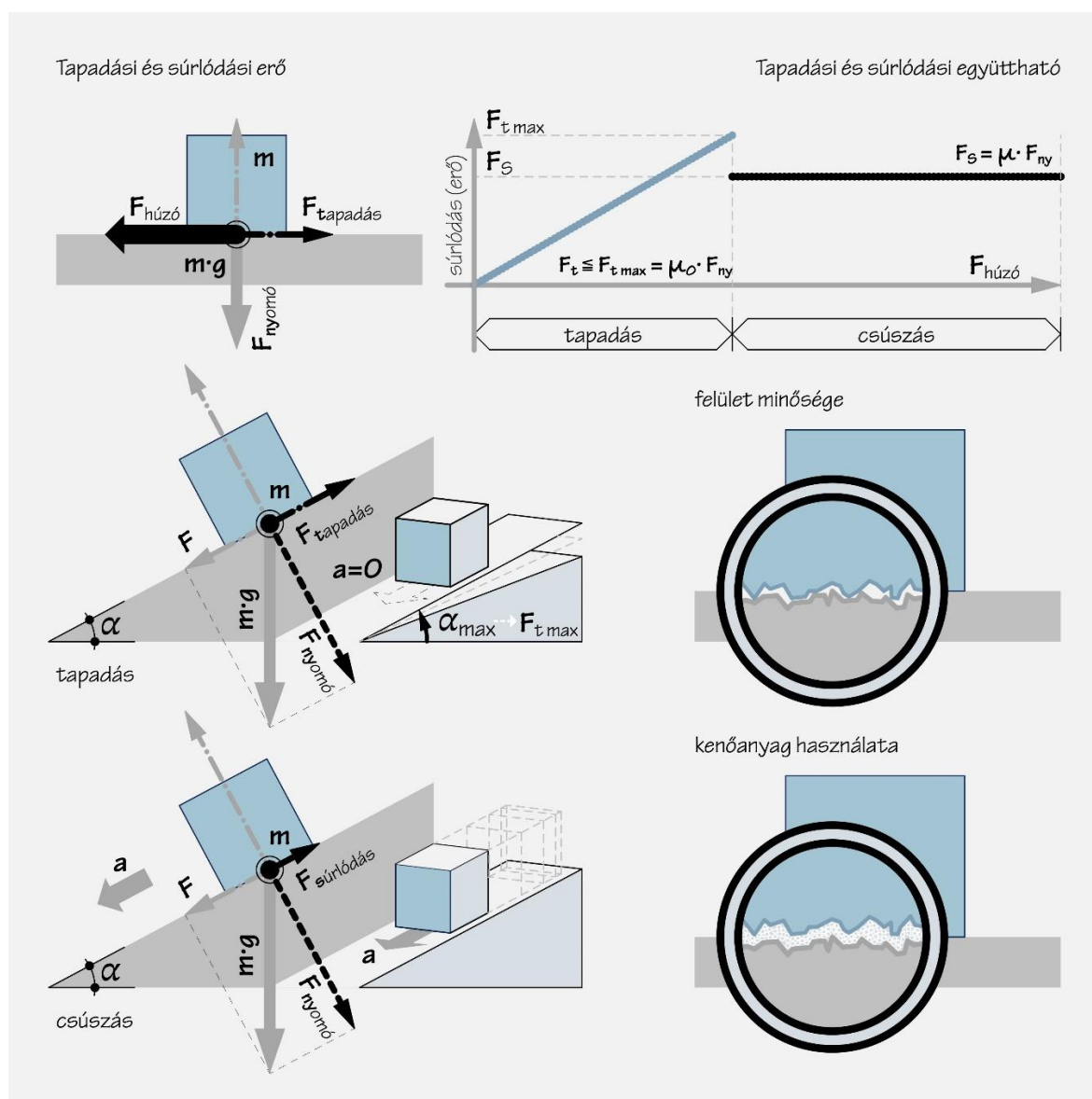
Egymással érintkező felületek közti súrlódási erők vizsgálatakor a tapadási és csúszási súrlódási együttható az 1. ábrán bemutatott módon definiált. F jelöli a húzóerőt, F_t a tapadási súrlódási erőt, F_s a csúszási súrlódási erőt. Az egymáshoz képest nyugvó felületek között ható tapadási súrlódási erő maximális értékének és a felületeket egymáshoz szorító nyomóerő nagyságának a hányadosát tapadási súrlódási tényezőnek vagy együtthatónak nevezzük.

¹ ENGLISH TITLE. Determining the coefficient of friction by experimentation

KULCSSZAVAK. súrlódás, súrlódási együttható, gyorsulásmérő, erőmérő, kamerakép-elemzés.

KEYWORDS. friction, coefficient of friction, accelerometers, force measurement, camera image analysis.

* Levelező szerző (corresponding author).



1. ábra. A tapadási és csúszási súrlódási együttható értelmezése

Adattárakban [2] találhatunk anyag-párokra tapadási és csúszási súrlódási együttható értékeket, ezek az értékek azonban nagyban függnek az anyagok felületi minőségétől. Ilyen fogalmak, mint: sima, csiszolt, fűrészelt felület a gyakorlatban nem értelmezhetők, a hozzájuk csatolt adatok – jó esetben is – csak irányadónak tekinthetők. A felületek minőségét a felületek nedvességtartalma vagy a kenőanyagok használata is olyan mértékben befolyásolja, hogy egy megadott táblázati adattól a mérés jelentősen különböző eredményt produkálhat. Ezért a mérnöki gyakorlatban szükséges az adott felületi minőséget, páratechnikai és hőtechnikai paramétereket figyelembe vevő ellenőrző vizsgálatokat végezni. A súrlódási együttható értéke elméletben nem függ a testek súlyától, a gyakorlatban azonban a nyomóerő drasztikusan tudja változtatni a felületek minőségét és érdességét a deformáció miatt. Így egy könnyű testen végzett kísérlet eredménye csak útmutatónak használható a pár nagyságrenddel nagyobb tömegű tárgyak esetében. Amennyiben pontos adatokkal kell számolnunk, alátámasztó kísérletekre lesz szükségünk.

A gyakorlatban a tapadási súrlódást könnyebb meghatározni, így sokszor csúszási súrlódás esetében is a feladathoz megadott tapadási együttható értékekkel számolunk. Két durva felületet

nehéz egymáson elmozdítani, mert a felületi egyenetlenségek könnyen egymásba tudnak kapaszkodni (1. ábra). Ha csiszolással csökkentjük a felületi egyenetlenségeket, akkor a súrlódási tényezők csökkennek. Azonban, ha a csiszolást tovább folytatjuk, - amit már polírozásnak nevezünk - azaz rendkívül sima felületek érintkezését hozzuk létre, akkor a súrlódási tényezők (különösen a tapadási tényező) meglepően nagy mértékben növekedni kezdenek. Ilyenkor nem a makroszkopikus egyenetlenségek okozzák a súrlódási együtthatók növekedését, hanem mikroszkopikusan egyre több atom kerül közvetlenül egymás mellé, az egymáshoz igen közeli elektronfelhők játékaaként vonzó kölcsönhatás lép fel. Még azt is megfigyelhetjük, hogy a tapadási súrlódás mértéke növekszik, ha az érintkező felületeket előzőleg egyre hosszabb ideig összenyomva tartjuk. Nedves felületek esetében sokszor nem a vékony vírréteg hatása (határréteg súrlódás) jelentkezik, hanem a felületi feszültség is egymáshoz tapasztja a vizsgált anyagokat.

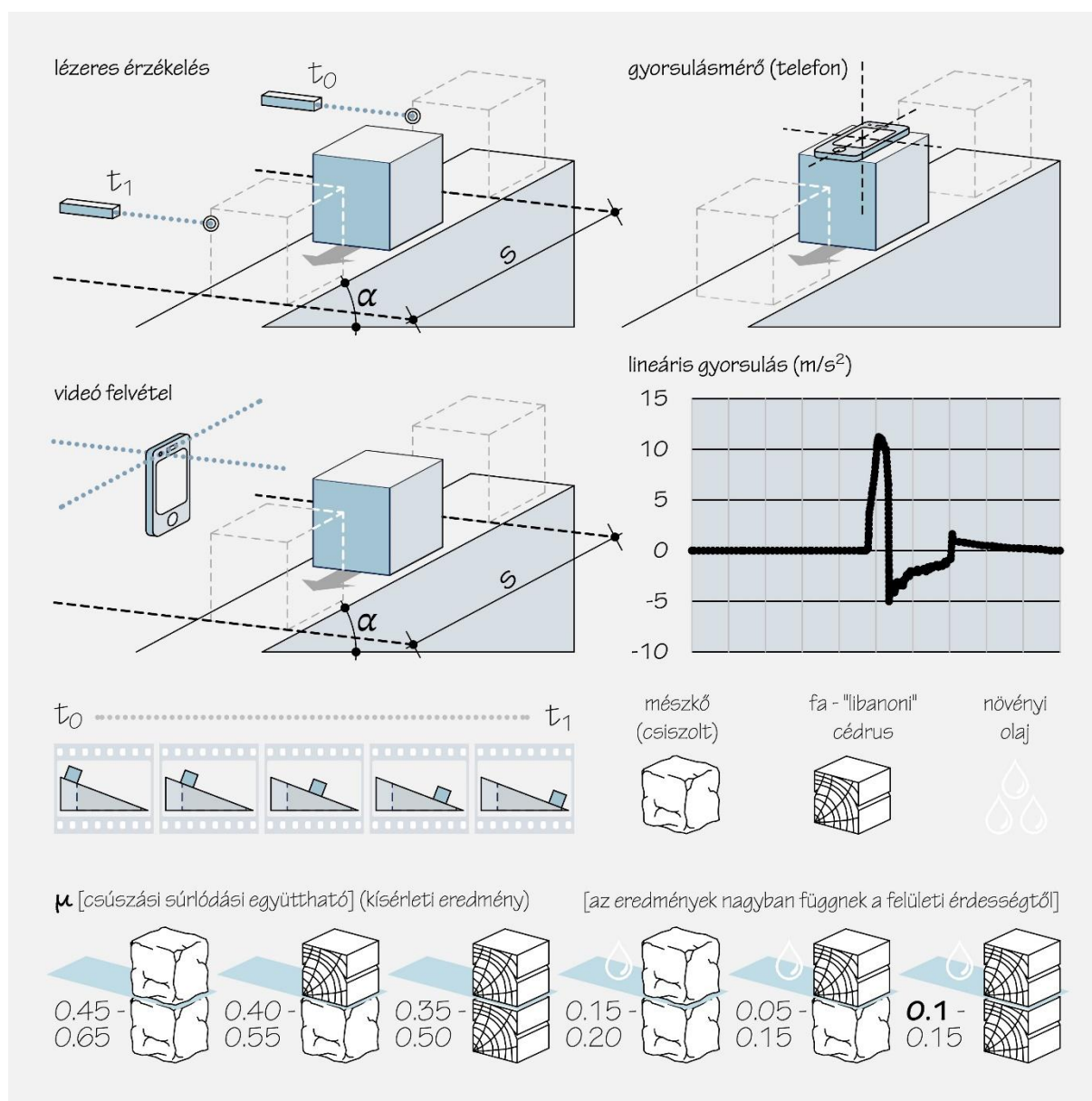
2. Mérési módszerek

2.1. Általános gondolatok

A súrlódási együttható meghatározásának feladata számunkra egy gyakorlati feltevés igazolása során merült fel. Kísérleteket végeztünk fa és kő közötti súrlódás meghatározására. Faanyagnak a libanoni cédrust, kőnek pedig a mészkövet választottuk. A felületeket fűrészelt és csiszolt kivitelben, száraz, nedves és olajozott felületek között vizsgáltuk. A tapadási együtthatót változtatható szögű lejtőn, a súrlódásit pedig vízszintes felületen, rugós erőmérővel, lejtőn pedig gyorsulás meghatározásával mértük.

2.2. Eszközök és módszerek

A „tankönyvi” méréshez rugós erőmérő szükséges. Az elméleti háttér ismeretében közvetett mérést is alkalmazhatunk, azaz a gyorsulásmérést időmérésre vezethetjük vissza. Az időmérés történhet stopperrel, fotokapus alkalmazásokkal, mobiltelefon vagy digitális kamera alkalmazásával, vagy akár gyorsulásmérő szenzorral is (2. ábra). Közvetlenül gyorsulást tudunk meghatározni alkalmas mobiltelefonnal, és a már említett gyorsulásmérő szenzorral is. Amennyiben pedig nincs szükségünk nagy pontosságú súrlódási együttható értékre, tapadási súrlódási együttható meghatározásából is következtethetünk a csúszási súrlódási együtthatóra.



2. ábra. Mérési elrendezések a különböző mérőeszközökkel történő kísérletek esetén

2.2.1. Rugós erőmérő

Ha az erőmérővel egyenletesen (azaz a test gyorsulása 0) húzzuk a hasábot, az erőmérő jó közelítéssel egy zérustól különböző, állandó értéket mutat. Mivel a hasábra a húzóerőn kívül a súrlódási erő is hat, a dinamika alapegyenletéből tudjuk, hogy az a csúszási súrlódási erő, ami a húzóerővel ellentétes irányú és azzal egyenlő nagyságú. Így a konkrét mérésnél vízszintes felületre helyezük a mozgatni kívánt testet. Ha a test tömege megengedi, akár rá is akaszthatjuk az erőmérőre és megmérhetjük a műszerről a test súlyát, amivel majd az alátámasztást is nyomni fogja (F_{ny}). Ha lassan, egyenletesen növekvő nagyságú erőt fejtünk ki a hasábra, akkor leolvashatjuk azt az értéket, amelynél a hasáb megindul. Ez az érték adja a tapadási erő maximumát, amiből a tapadási súrlódási együttható számolható ($F_{tap,max} = \mu_0 F_{ny}$). Majd, amikor mozgásba jött a test, azt az erőt kell leolvasnunk, amely a test egyenletes mozgatásához szükséges. Mivel a csúszási súrlódási erő nagysága egyenesen arányos a két felület között ható F_{ny} nyomóerővel és a felületpár anyagi minőségétől függő arányszámmal (μ) azaz $F_s = \mu F_{ny}$ - az

előzőhöz hasonlóan – a 2 erő hányadosaként kapjuk a csúszási súrlódási együtthatót. A mérés egyszerűsége lehetővé teszi a két súrlódási együttható relációjának megállapítását is, miszerint $\mu < \mu_0$. Rugós erőmérő használata során számolnunk kell a leolvasás pontatlanságával, illetve a pontos „egyenletes mozgás” megvalósítása is emberi tényező függvénye.

A vízszintes felületen végzett méréseket úgy végeztük el, hogy minden próbatest súlyát pontosan 10 N értékre állítottuk be. Ennek megvalósításához a próbatestre edényt rögzítettünk, így vizet beletöltve, annak súlya pontosan beállíthatóvá vált. A rugós erőmérőn így állandó sebesség esetén a súrlódási együttható értékét tudtuk leolvasni. A leolvasást, kiértékelést videofelvétel elemzése is megkönnyítette.

2.2.2. Gyorsulás mérés

Növelhető a pontosság, ha a mérés során a gyorsulásmérést időmérésre vezetjük vissza. A mérésnél azzal a feltételezéssel számolunk, hogy a felület egyenletes, így a súrlódási együttható a mozgás során állandó. Az állandó erőhatást úgy biztosítjuk, hogy lejtő felületen (α a lejtő hajlás-szöge) csúsztatjuk le a testet, így - ha a nehézségi erő hatása alatt álló test lecsúszik a lejtőn - gyorsulása állandónak tekinthető. Ez azt jelenti, hogy a négyzetes úttörvény kezdősebesség nélküli formulája alkalmazható (1), (ahol s a megtett út, t a csúszás ideje, a a gyorsulás):

$$a = \frac{2s}{t^2}, \quad (1)$$

majd a súrlódási együttható számolható (2), (3):

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha}. \quad (3)$$

Mérésünk elvégzése előtt meg kell határoznunk azt a szöveget, melynek alkalmazásakor a test már lecsúszik a lejtőn. Ezzel egyben a tapadási súrlódás értékét is meg tudjuk határozni.

Fotokapu

Az időmérés megvalósulhat hagyományosan stopperrel. Mérésünk ebben az esetben csak demonstrációs, elméleti jellegű lesz, mivel az emberi reakcióidő gyakorlatilag laboratóriumi méreteket használva sem küszöbölhető ki.

Fotokapu alkalmazása kizárja a fenti hibát. Amennyiben rendelkezésünkre áll 2 db fotokapu és időmérő egység, akkor az indítási és érkezési időpillanatok különbségével megoldható az időmérés. Taneszköz boltban vásárolhatunk ilyen egységet. Amennyiben magunk rakjuk össze, megoldható 2 lézersugár-kibocsátó modulból és sugárvevő modulból álló készlettel is. Az okklúziós módszert (lézersugár megszakítását) használja a rendszer, fénysebességgel érzékeli egy tárgy jelenlétét a lézersugárzó és a vevő között. Természetesen a tárgyak nem korlátozódnak ilyenkor fémre, minden olyan tárgy észlelhető, amely blokkolja a fényt. Ezt a rendszert összekapcsolva egy mikroprocesszorral nagy pontosságú mérést valósíthatunk meg. Mai árakkal számolva az összeállításunk költsége fele lesz a készen kapható rendszerének.

Mobiltelefon

Amennyiben azonban nem állnak a fent felsorolt elektronikai alkatrészek rendelkezésünkre, akár a mobiltelefonnal is kivitelezhető a mérés. A lecsúszás folyamatát egy stabilan elhelyezett mobiltelefonnal videóra rögzítjük (elegendő 60 fps). Majd a kamerakép elemzésével a telefon

képkockasebességének a függvényében adott pontossággal meghatározható a csúszás időtartama.

A legtöbb ma használatos mobiltelefon rendelkezik beépített gyorsulásmérővel, így ha megoldható a telefon próbatestre rögzítése, pillanatnyi gyorsulás értékeket tudunk meghatározni, vagy használhatjuk a gyorsulásmérő szenzort a csúszás időtartamának pontos meghatározására is. Telefonos – ingyenes - alkalmazások közül válogatni tudunk. Az általunk használt alkalmazás a phyphox [3], [4] physical phone experiments volt. A gyorsulásmérési mód kiválasztásánál fontos szempont, hogy olyat válasszunk, ahol van lehetőség a „g nélküli” mérésre, mellyel úgy kapjuk az adatokat a lineáris gyorsulásmérőből, hogy a tényleges gyorsulást kapjuk, gravitációs gyorsulás nélkül. Azaz ez az érzékelő 0-t jelez, amikor a készülék nyugalomban van. A gyorsulásmérő szenzor működési elvéről a következő pontban részletesen beszélünk.

A súrlódási együttható meghatározásánál abból indulunk ki, hogy egy vízszintes felületen meglökött test lassulásához, illetve megállásához szükséges fékezőerőt a súrlódási erő biztosítja (4). A súrlódási együttható meghatározásához tehát csak le kell olvasni az átlagos lassulást (a), ami elvileg állandó a fékezés során. Majd ezt elosztva a g értékével (5), megkaphatjuk a csúszási súrlódási együttható értékét a próbatest és a felület között.

$$m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad (4)$$

$$\mu = \frac{a}{g} \quad (5)$$

Amennyiben gyorsulásmérőnk nem alkalmas „g nélküli” mérésre, akkor vektor és mátrix műveleteket segítségével az adatsorból egy jól meghatározott forgatási mátrix segítségével mi is elő tudjuk állítani a szükséges adatokat.

A telefont rögzíthetjük a mozgó testre, mindössze arra kell ügyelni, hogy pontos méréshez a próbatestet úgy kell meglökni, hogy a telefon y irányba mozduljon el, így a lassulás iránya és a szenzor iránya egy egyenesbe essék (az alkalmazásban könnyen láthatjuk az irányokat, legtöbb esetben a telefon hossz tengelye adja az y irányt).

Technikailag az Excelben kimentett adatokból kivágjuk a felfutó gyorsulásértékek utáni negatív adatokat (hiszen innentől lassul a test), majd ezeknek az átlagát képezve kapjuk az átlagos gyorsulás értékét. Példánkban az átlagos gyorsulásérték $-2,08 \text{ m/s}^2$, ezt osztva g -vel, kapjuk a súrlódási együtthatóra a 0,21-es értéket. Ugyanazon a felületen többször is elvégezhetjük a mérést, különböző erőhatásokat kifejtve, különböző távolságokon fékeződő test esetén

Gyorsulásmérő szenzor

Amennyiben olyan felületet szeretnénk vizsgálni, ahol nem biztosítható a csúszó felületre rögzített telefontal történő mérés, alkalmazhatunk gyorsulásmérő szenzorokat. A gyorsulásmérők olyan elektromechanikus eszközök, amelyek a gyorsulás statikus vagy dinamikus erőit érzékelik. A statikus erők közé tartozik a gravitáció, míg a dinamikus erőkhez tartoznak a rezgések és a mozgások. A gyorsulásmérő szenzorok beszerzése már nem jelent komoly költséget, áruk a rugós erőmérő árával közel megegyező. Találhatunk a piacon olyan burkolattal rendelkező szenzort, melynek kialakítása alkalmassá teszi az eszközt kritikus körülmények közötti - például vízzel locsolt felület - használatra. A mérések kiértékelése intelligens algoritmusokkal történik. Szenzor alkalmazásakor a súrlódási együttható mérése esetén külön kell választanunk 2 esetet. Ha a szenzorunk képes „g nélküli” mérést végezni, akkor gyakorlatilag a korábban leírt mérési folyamat alkalmazható. Többnyire viszont - a gyorsulásmérő szenzorok működési elve miatt - az általunk elérhető szenzor nem biztosítja a „g nélküli” mérés lehetőségét.

Ez annyit jelent, hogy a gyorsulásmérő gyorsulási erőt mér, egy, kettő vagy három síkban. Jelenleg, a leggyakrabban használt gyorsulásmérők a háromtengelyes gyorsulásmérők, amelyeket három különálló gyorsulásmérő rendszeréből alakítanak ki. Ha bármely síkon a gyorsulás az érzékelő irányával ellentétes irányban történik, a gyorsulásmérő negatív értékkel méri a gyorsulást. Ellenkező esetben a gyorsulás pozitív értéként kerül mérésre. Ha nem hat külső gyorsulás a gyorsulásmérőre, akkor a készülék csak a szabad esés standard gyorsulását, azaz a gravitációs erőt méri (majd g többszöröseként adja meg). Feltételezve, hogy egy 3 tengelyes gyorsulásmérő úgy van elrendezve, hogy az X tengely érzékelője balra mutat, az Y tengely érzékelője lefelé mutat, a Z tengely érzékelője pedig előre, valamint a készülékre nem nehezedik erőhatás, a gyorsulásmérő a következőt mutatja majd: $X = 0 \text{ g}$, $Y = 1 \text{ g}$, $Z = 0 \text{ g}$. Ha ugyanezt a gyorsulásmérőt balra irányítják, a következő értékeket fogja mutatni: $X = 1 \text{ g}$, $Y = 0 \text{ g}$, $Z = 0 \text{ g}$.

A megfelelő szenzor kiválasztásához hasznos lehet a gyorsulásmérők működési elvének tanulmányozása is (MEMS kapacitív gyorsulásmérők, piezoelektromos és piezorezisztív), hiszen ez egy olyan érzékelő, amely a test gyorsulását és rezgését is méri. Így számos eszközben alkalmazzák, laptopokon, mobiltelefonokban, autók műszerfalain, de még a sportolók is használnak ilyet mozgásuk monitorozására.

Amennyiben maradunk az eredeti feladatunknál és súrlódási együttható megállapítására szeretnénk használni, (de nem extrém környezetben) a gyorsulásmérőt, akkor egyszerűbb a helyzetünk, hiszen a mérésünk pontossága nem követeli meg, hogy ügyeljünk például a hőmérsékletet, páratartalom vagy az elektromágneses interferencia mérésünk során jelentkező értékeire a szenzor kiválasztásánál. Jelen tanulmány elkészítéséhez egy WitMotion [5] gyorsulásmérő szenzort használtunk. A kapott értékeket a szenzor saját szoftverével értékelhetjük, majd a gyorsulásadatokból megállapíthatjuk a felületen történő mozgás idejét. Megfelelő szoftvert segítségével g nélküli gyorsulást is számíthatunk. Amennyiben van lehetőségünk ennek használatára, a mérésünkkel nagy pontosságot érhetünk el. Az érzékelő a gyorsulás meghatározásához Kálmán-szűrő algoritmust használ. Ez az eljárás mozgó, változó rendszerek állapotáról ad optimális becslést sorozatos mérésekkel, figyelembe véve az állapotméréseket és a zavaró tényezőket (zajok, bizonytalanságok, pontatlanságok). Két lépésben működik. Az első becslési lépésben a Kálmán-szűrő kiszámolja az aktuális állapotváltozókat, a bizonytalanságokkal együtt. A következő mérés eredményeit súlyozott átlagolással veszi figyelembe. A sorozatos valós idejű mérések során az átlagolás eredményeként egyre jobb értékek adódnak, ahol a zajok és egyéb zavaró tényezők kiesnek. Az algoritmus rekurzív jellegű, csak az aktuális kalkulált állapotot, és az aktuális mérési eredményeket veszi figyelembe, korábban mért adatokat nem használ fel.

Becslés

Végezetül pedig meg kell említenünk azt, hogy amennyiben a mérésünk nem igényel különösebb pontosságot, a legegyszerűbb módon becsléssel határozhatjuk meg a csúszási súrlódási együttható értékét. Felhasználjuk, hogy a tapadási súrlódási együttható mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási együttható. Szükséges továbbá, hogy a 2 érintkező felület ne csak vízszintesen, hanem lejtőként is kezelhető legyen, így egyszerű méréssel meghatározhatjuk a tapadási súrlódási együtthatót. Tudjuk, hogy ha a lejtőre helyezett test nyugalomban van, akkor gyorsulása zérus, és a lejtő rá tapadási súrlódási erőt fejt ki. A megcsúszást megelőző határhelyzetben a tapadási súrlódási erő értéke maximális. Erre az esetre felírjuk a mozgásegyenletet (6), majd rendezés után a (8) egyenlőtlenséget kapjuk.

$$0 = ma = mg \sin \alpha - \mu_0 mg \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\mu_0 \cos \alpha = \sin \alpha, \quad (7)$$

$$\mu_0 \leq \tan \alpha. \quad (8)$$

Tehát a felületet megdöntjük, rá helyezzük a csúsztatni kívánt testet. Megkeressük a lejtőnek azt a helyzetét, ahol a hasáb még éppen nem indul el a lejtőn. Ha nincs kéznél szögmérő, egyszerű mobiltelefonos alkalmazással megmérhetjük a lejtő szögét, de természetesen a lejtő magasságának és vízszintes vetületének a leméréséből tangens függvényrel számíthatjuk. Felhasználva a korábban említett, mérhető megállapítást, miszerint $\mu < \mu_0$, a kapott tapadási súrlódási együttható értékből becslést adhatunk a csúszási súrlódási együtthatóra is.

3. Összefoglalás

Kísérleteink során megállapítottuk, hogy bár a számolási feladatokban a súrlódási együttható leggyakrabban számértékkel adott [2], mégis mindig szem előtt kell tartanunk elméleti ismereteinket és gyakorlati tapasztalatainkat, miszerint a súrlódási együttható értékét egy rövid folyamat során is számtalan tényező befolyásolja, térben és időben egyaránt. Meghatározására a feladattól függően vannak pontosabb és kevésbé pontos módszerek, egyszerűbb és bonyolultabb megoldások. A mérések kivitelezése nemcsak laboratóriumi eszközökkel, és laboratóriumban történhet. A rendelkezésre álló eszközök elérhetőségének köre jelentősen megváltozott az utóbbi években, hiszen manapság a mobiltelefonunkba épített gyorsulásmérőt is használhatjuk, azaz gyorsulásmérő szenzorral rendelkezünk, míg rugós erőmérővel kevésbé.

Irodalomjegyzék

- [1] **Budó, Á.**, Mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1994., 55-65.
- [2] **Szalay, B.**, Fizika, Műszaki tankönyvkiadó Budapest, 1979. 101-112.
- [3] **Staacks, S., Dorsel, D., Hütz, S., Stallmach F., Splith T., Heinke T., Stampfer, C.**, Collaborative smartphone experiments for large audiences with phyphox June 2022 European Journal of Physics 43(5) doi: [10.1088/1361-6404/ac7830](https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac7830)
- [4] phyphox / RWTH Aachen University. phyphox wiki, 2021.
- [5] wit-motion / WitMotion Shenzhen Co.,Ltd, 2024.

Individual tree detection and spatial distribution analysis without reference data¹

Tóth Zsolt*

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
toth.zsolt@uni-sopron.hu,  0000-0003-0999-784X

Farkas Péter

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Cziráki József Faanyagtudomány és Technológiák Doktori Iskola
farkaspeter@phd.uni-sopron.hu,  0009-0000-9150-8472

Novotni Adrienn

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Cziráki József Faanyagtudomány és Technológiák Doktori Iskola
novotni.adrienn@uni-sopron.hu,  0000-0003-1451-0709

ÖSSZEFOGLALÓ.

Két 100x100 méteres területet, egy erdőt és egy vegyes ültetvényt vizsgáltunk LiDAR pontthamaz alapján. A Progressive Morphological Filtering (PMF) és a Local Maximum Filtering (LMF) módszerek 257 fát azonosítottak az erdőben (módszertől függően) részben véletlenszerű, részben szabályos, 47-et a vegyes területen klaszteres eloszlással. A sűrűségmérések és legközelebbi szomszédok távolságának azonosítása G- és K-statisztikával. Monte Carlo-módszerrel és kvadrátpróbával jelentős különbségeket mutattak a fák eloszlásában, s jól jelezték a területek jellege közötti eltéréseket. Az alkalmazott módszer alkalmas az erdőterületek anomáliáinak azonosítására is.

ABSTRACT. This study processed two 100x100m areas from LiDAR dataset: a forest and a mixed forest-plantation. Progressive Morphological Filtering (PMF) and Local Maximum Filtering (LMF) methods identified 257 trees in the forest and 47 in the mixed area, showing (depending on the method) partly random, partly regular spacing in the forest and clustering in mixed areas. The density assessments and nearest-neighbour evaluations with G statistic, K statistic, Monte Carlo method, and quadrat tests revealed a significant difference in tree distribution, highlighting the effectiveness of these methods for detecting spatial patterns in diverse forest environments, too.

1 Introduction

The accurate identification of individual trees from LiDAR (ALS) measurements is a critical issue in forestry geoinformatics and statistics. However, the applicability of the frequently used

¹ HUNGARIAN TITLE. Egyedi fák detektálása és térbeli eloszlásának elemzése referenciaadatok nélkül.

KULCSSZAVAK. LiDAR, fadetektálás, G-statisztika, K-statisztika, Monte Carlo-módszer, kvadrátpróba.

KEYWORDS. LiDAR, tree detection, G statistic, K statistic, Monte Carlo method, quadrat test.

* Corresponding author.

local maxima method [21] for tree identification is significantly influenced by the quality and preprocessing of data, as well as the type and structure of the forest [4]. The problem can be relatively simply stated: even the best and most widely adopted methods currently available are not sufficiently reliable, and often, results considered acceptable are not truly satisfactory [5]. The variable effectiveness of ITD (individual tree detection) methods also impacts the estimation of other metrics [9].

Several attempts have been made to address these issues. Rasterizing the point-based method can reduce the number of errors under certain conditions [17]. It can be satisfactory within a narrow scope but are limited in their applicability for surveying "unknown" forest areas, which is essentially the ultimate goal. Machine learning methods [12], Monte Carlo methods [1], principal component analysis [8], object-based labelling [15], and optimization methods [18] can predict and sometimes reduce the error magnitude for specific tree and forest types, but this does not necessarily imply that these methods can be generalized to most forest types. Resizing the TWS (tree window size) used in the analysis has led to more usable results in some forest types [13], but this also does not seem to be a generalizable method. Using the L function for refining detections appears to be a more general method [11], but the applied procedure is still not entirely independent of the expected and known results from field reference data. Of course, improving technical conditions, such as using high-density, close-range, multispectral LiDAR recordings [6], can also contribute to increasing the efficiency of the procedure.

In this article, an attempt is made to provide an example of how to outline a procedure based on the principles of nearest-neighbour distances without relying on precise reference data. Rather than focusing on the exact identification of individual trees, this method assesses the overall characteristics of the forest. This approach enables the detection and monitoring of specific "anomalies" within the forest using almost exclusively LiDAR imagery, thus facilitating rapid and efficient surveys.

2 Materials and methods

2.1 Data

The data described in Table 1. serve as the source for analysis. This LiDAR dataset was gathered by NCALM for Paula Figueiredo at North Carolina State University [14].

Features	Forest	Mixed vegetation
Horizontal Coordinates	WGS84 / UTM Zone 17N Metres [EPSG: 32617]	
Vertical Coordinates	Ellipsoid	
Number of Points	800743	528590
$X_{\min}, Y_{\min}$	490915, 4038800	491825, 4038310
$X_{\max}, Y_{\max}$	491015, 4038900	491925, 4038410

Table 1. Features of LiDAR datasets

The first LiDAR point cloud represents a purely forested area, while the second one depicts a forest patch and a plantation separated by a road. (Figure 1.) Both areas are 100 by 100 metres in size. Similar to common field conditions, we have a general overview of the area's characteristics, but we lack precisely surveyed reference data, such as the exact locations of the vegetation (trees) [20].



Figure 1. Vegetation areas

2.2 Canopy and tree detection

For ground classification, a Progressive Morphological Filter (PMF) was utilized. The original raster-based method [22] was modified by the developers of the R `lidR` package [19] used for data processing transforming it into a point-based approach [16]. During this process, the default values (window size = 3, threshold = 5) were used.

After ground classification, the digital terrain model (DTM) was created using the kriging method, which is more accurate but more resource-intensive than the commonly used triangulation method. Kriging is the most sophisticated approach, employing advanced geostatistical interpolation techniques that consider the spatial relationships and distances between the returns. Height normalization was ensured using point cloud-based normalization method. This model is superior in terms of computational accuracy by normalizing with a continuous terrain instead of a discretized terrain.

In the next step, the canopy height model was created using a point-to-raster method.

From this model, the coordinates of individual trees, along with their corresponding height values, were computed using a Local Maximum Filter (LMF) with window size = 5. During each step, various other methods were considered, but upon testing, these methods yielded essentially identical results [20].

2.3 Spatial statistical analysis

The density-intensity of tree locations was visually analysed. Subsequently, the nearest-neighbour distances and, more generally, the pairwise distances within each sample plot were analysed as follows [2].

The cumulative distribution function of the nearest-neighbour distances for a regular point in the point (tree) pattern in a stationary point process $\mathbb{X}$ is

$$G(r) = \mathbb{P}(d(u, \mathbb{X} \setminus \{u\}) \leq r \mid u \in \mathbb{X}),$$

where u is a random location, and $d(u, \mathbb{X} \setminus \{u\})$ is the shortest distance between u and the points of the $\mathbb{X}$ pattern, excluding u .

The observed distribution function for the distances to the measured nearest neighbours is

$$G^*(r) = \frac{1}{n(\mathbf{x})} \sum_i \mathbf{1}\{t_i \leq r\}.$$

Edge corrections based on the empirical cumulative distribution function is

$$\hat{G}(r) = \sum_i e(x_i, r) \mathbf{1}\{t_i \leq r\}. \quad (1)$$

The $e(x_i, r)$ edge correction weight in the above equation ensures the approximate unbiasedness of $\hat{G}(r)$.

The distribution function of the nearest-neighbour distances in a homogeneous Poisson point process with intensity λ is

$$G_{\text{pois}}(r) = 1 - \exp(-\lambda\pi r^2). \quad (2)$$

In the case where $\hat{G}(r) > G_{\text{pois}}(r)$, the pattern is considered clustered, while when $\hat{G}(r) < G_{\text{pois}}(r)$, the pattern is classified as regular. In addition to the theoretical Poisson distribution, the Hanisch estimate [7], the border-corrected estimate, and the Kaplan-Meier estimate [10] for $\hat{G}(r)$ are used.

The biased patterns of $s_{ij} = \|x_i - x_j\|$ pairwise distances, namely the overrepresentation of smaller distances, can be attributed to reasons similar to those mentioned before. The expected number of other points of the process within a distance r from a typical point of the process is denoted as

$$K(r) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} [n(\mathbb{X} \cap b(u, r) \setminus \{u\}) \mid u \in \mathbb{X}].$$

The anticipated number of points within the region $b(u, r)$ is $\lambda\pi r^2$. For a homogeneous Poisson process, this is independent of the intensity.

$$K_{\text{pois}}(r) = \pi r^2. \quad (3)$$

Estimators for this value are adjusted and normalized as empirical distribution functions of the pairwise distances, which is

$$\hat{K}(r) = \frac{1}{\hat{\lambda}^2 \text{area}(W)} \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{1}\{\|x_i - x_j\| \leq r\} e(x_i, x_j; r), \quad (4)$$

where $e(u, v, r)$ is the edge adjustment factor. If $\hat{K}(r) > K_{\text{pois}}(r) = \pi r^2$, clustering is observed, while if $\hat{K}(r) < K_{\text{pois}}(r) = \pi r^2$, a regular pattern is indicated.

In addition to the theoretical Poisson model $K(r)$, boundary-corrected estimation, translation-corrected estimation, and isotropic correction estimation are computed.

Numerous other metrics and procedures are associated with the statistics of spatial points, but these appear to be the most important. The previous findings must also be tested using inferential statistical methods.

Given the significance of the K statistic even within this narrow scope, the results of the K statistic were tested using a Monte Carlo method suitable for spatial data [3].

A key question in the K statistic is whether there is a difference between $\hat{K}$ and K_{pois} .

The initial hypothesis is

$$H_0 : \text{The observed point set is a representation of a random spatial process.} \quad (5)$$

The reference curve for the procedure was the K function under complete spatial randomness (CSR). M independent simulations (with $M = 39$) for a two-sided test at a 5% significance level, as $\alpha = \frac{2}{M+1}$ were run for the study regions W . The estimated K functions $\hat{K}^{(j)}(r)$ for

$j = 1, \dots, M$ were calculated for each realization. The lower (L) and upper (U) pointwise envelopes for these simulated curves are

$$L(r) = \min_j \hat{K}^{(j)}(r)$$

and

$$U(r) = \max_j \hat{K}^{(j)}(r).$$

For a fixed r , the probability of $K_b(r)$ exceeding the envelope $[L(r), U(r)]$ for simulated curves indicates rejection of the null hypothesis of a uniform Poisson process, with a significance level of $\alpha = \frac{2}{M+1}$. Alternatively, using pointwise order statistics provides a test with exact size $\alpha = \frac{2k}{M+1}$ for the k -th largest and k -th smallest values.

In addition to the Monte Carlo test, a quadrat test was conducted. This test does not rely on the L-K statistic, making it suitable for verifying our previous results. The study regions are divided into equal-sized quadrats (2x2), and the number of points within each quadrat is counted. Under the H_0 , the points (trees) follow a homogeneous Poisson process, meaning they are randomly distributed, similarly to the previous null hypothesis. The observed frequency distribution of points per quadrat is compared to the expected Poisson distribution. The chi-square test statistic is used to quantify the difference is

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

where O_i is the observed frequency and E_i is the expected frequency.

3 Results

During the process, 257 trees were identified in the forested area and 47 trees in the mixed vegetation area (Figure 2).

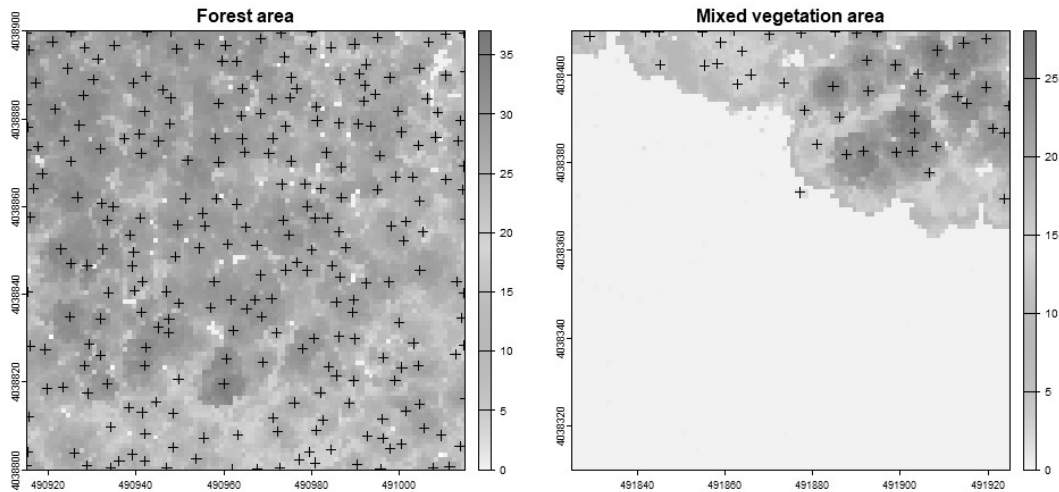


Figure 2. Canopy and trees

The estimation of $G(r)$ from (1) suggests that the pattern of trees in the forest area is regular. Specifically, $G(r) = 0$ for $r \leq 2.5$ metres, indicating that there are no nearest-neighbour distances less than 2.5 metres. The difference between the two plant covers is reflected in the

G statistic (1) and (2). In the second area, there are no trees within a distance of 2.5 metres as well, but for $r \geq 3.5$, the forest exhibits strong clustering characteristics (Figure 3).

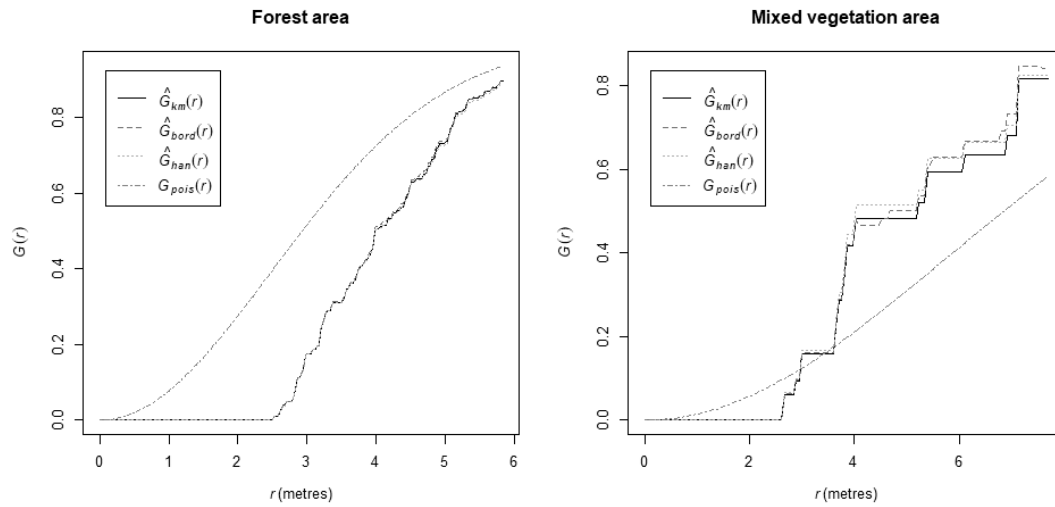


Figure 3. G statistic

Unlike what was observed with the G statistic, the K statistic (3) and (4) indicates that in the fully forested area, a pattern similar to the Poisson model can be seen. However, in the mixed vegetation area, clustering is observed, similar to previous findings (Figure 4).

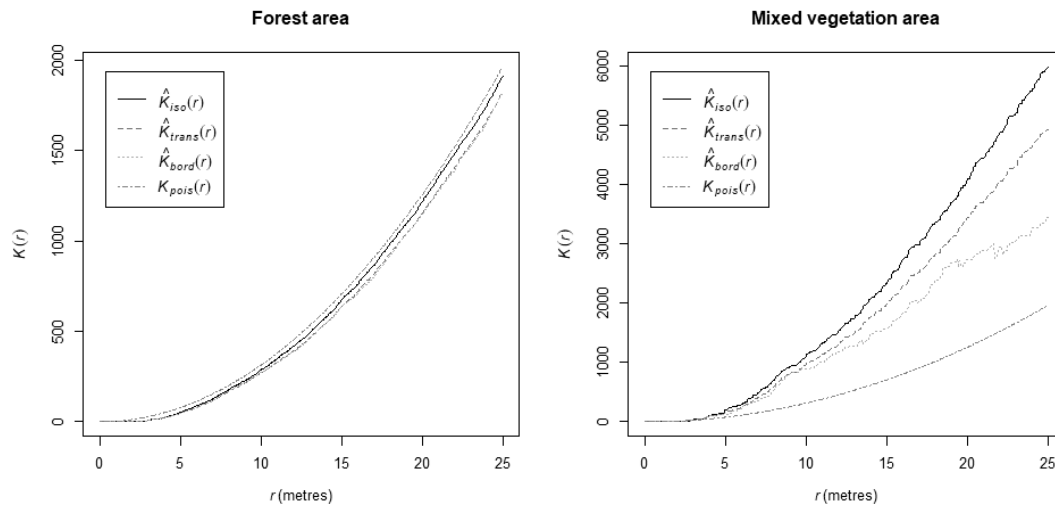


Figure 4. K statistic

In the first case, H_0 from (5) of randomness is not definitively rejected, whereas in the second case, it is unequivocally rejected. This is consistent with our prior findings (Figure 5).

The obtained result was confirmed by the χ^2 test (Table 2 and Figure 6).

Area	χ^2	df	p -value
Forest Area (2x2)	2.2529	3	0.9568
Mixed Vegetation Area (2x2)	62.362	3	3.678×10^{-13}

Table 2. Results of quadrat tests

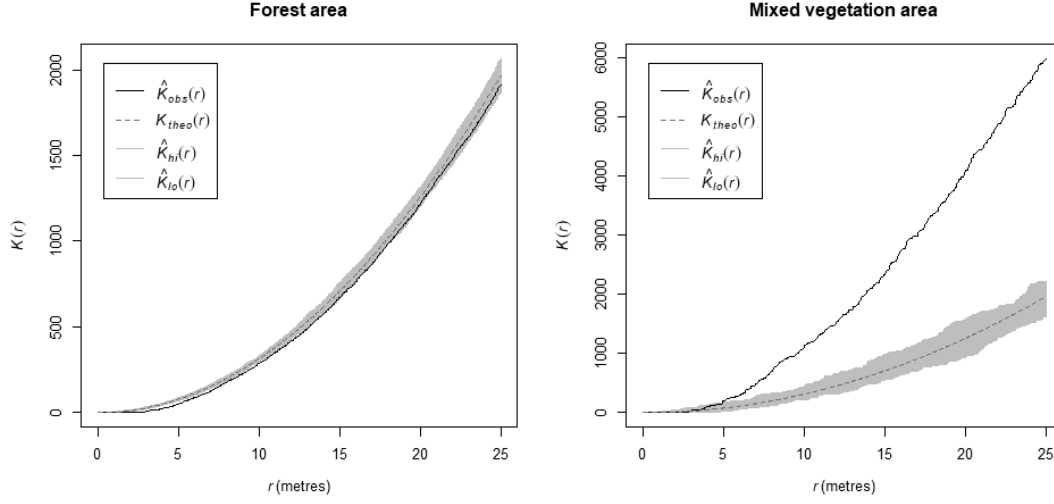


Figure 5. Pointwise envelopes

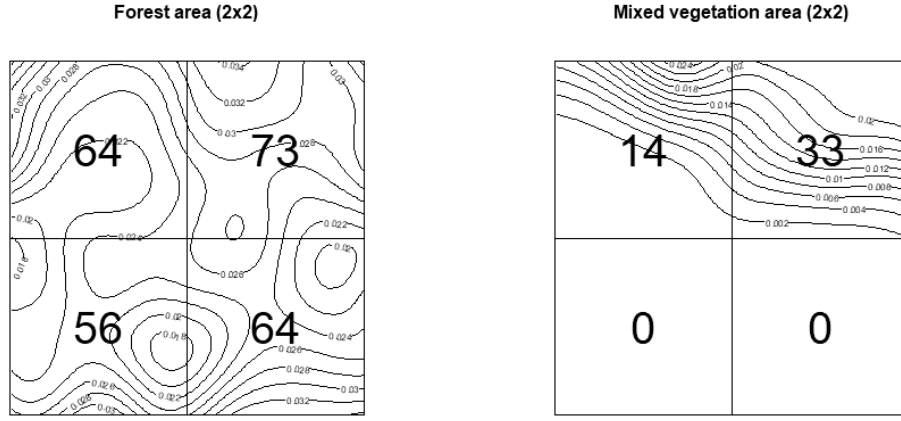


Figure 6. Quadrats with number of trees and contour lines

4 Conclusions

While the current models for individual tree identification using LiDAR data still require refinement, the incorporation of known field data and advanced statistical methods like G and K statistics holds promise for improving survey efficiency and accuracy. The continued development and validation of these models are essential for their widespread adoption in forestry applications, particularly in the context of sustainable forest management and conservation.

The comparison of the two areas using applied identification and statistical methods has demonstrated that, essentially, valid conclusions can be drawn about the trees covering the area even without field surveys, given a cost-effective technological background. We believe that the refinement of models beyond the results of field surveys and the more precise identification of trees is often impractical, as such methods are generally not generalizable. Reverting to random distributions and filtering significant anomalies alongside the methods we use offers a limited but important means of drawing conclusions in forestry and the timber industry. The applied method provides an opportunity to identify anomalies that have occurred in the forest area (tree mortality, tree cutting, natural damage) based on previous recordings.

Acknowledgements

This article was made in frame of the project TKP2021-NVA-13 which has been implemented with the support provided by the Ministry of Culture and Innovation of Hungary from the National Research, Development and Innovation Fund, financed under the TKP2021-NVA funding scheme.

Bibliography

- [1] **Apostol, B., Petrila, M., Lorent, A., Ciceu, A., Gancz, V., and Badea, O.:** *Species discrimination and individual tree detection for predicting main dendrometric characteristics in mixed temperate forests by use of airborne laser scanning and ultra-high-resolution imagery*, Science of The Total Environment, **698** (2020), 134074. doi: [10.1016/j.scitotenv.2019.134074](https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.134074).
- [2] **Baddeley, A.:** *Analysing spatial point patterns in R*, (2010).
- [3] **Besag, J. and Clifford, P.:** *Generalized Monte Carlo Significance Tests*, Biometrika, **76** (1989), No. 4, 633–642, publisher: [Oxford University Press, Biometrika Trust]. doi: [10.2307/2336623](https://doi.org/10.2307/2336623).
- [4] **Douss, R. and Farah, I. R.:** *Extraction of individual trees based on Canopy Height Model to monitor the state of the forest*, Trees, Forests and People, **8** (2022), 100257. doi: [10.1016/j.tfp.2022.100257](https://doi.org/10.1016/j.tfp.2022.100257).
- [5] **Duncanson, L. I., Cook, B. D., Hurtt, G. C., and Dubayah, R. O.:** *An efficient, multi-layered crown delineation algorithm for mapping individual tree structure across multiple ecosystems*, Remote Sensing of Environment, **154** (2014), 378–386. doi: [10.1016/j.rse.2013.07.044](https://doi.org/10.1016/j.rse.2013.07.044).
- [6] **Hakula, A., Ruoppa, L., Lehtomäki, M., Yu, X., Kukko, A., Kaartinen, H., Taher, J., Matikainen, L., Hyypä, E., Luoma, V., Holopainen, M., Kankare, V., and Hyypä, J.:** *Individual tree segmentation and species classification using high-density close-range multispectral laser scanning data*, ISPRS Open Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, **9** (2023), 100039. doi: [10.1016/j.ophoto.2023.100039](https://doi.org/10.1016/j.ophoto.2023.100039).
- [7] **Hanisch, K.-H.:** *Scattering Analysis of Point Processes and Random Measures*, Mathematische Nachrichten, **117** (1984), No. 1, 235–245, _eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/mana.3211170119>. doi: [10.1002/mana.3211170119](https://doi.org/10.1002/mana.3211170119).
- [8] **Jaskierniak, D., Lucieer, A., Kuczera, G., Turner, D., Lane, P. N. J., Benyon, R. G., and Haydon, S.:** *Individual tree detection and crown delineation from Unmanned Aircraft System (UAS) LiDAR in structurally complex mixed species eucalypt forests*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, **171** (2021), 171–187. doi: [10.1016/j.isprsjprs.2020.10.016](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2020.10.016).
- [9] **Kansanen, K., Vauhkonen, J., Lähivaara, T., Seppänen, A., Maltamo, M., and Mehtätalo, L.:** *Estimating forest stand density and structure using Bayesian individual tree detection, stochastic geometry, and distribution matching*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, **152** (2019), 66–78. doi: [10.1016/j.isprsjprs.2019.04.007](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2019.04.007).
- [10] **Kaplan, E. L. and Meier, P.:** *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations*, Journal of the American Statistical Association, **53** (1958), No. 282, 457–481, publisher: Taylor & Francis _eprint: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/01621459.1958.10501452>. doi: [10.1080/01621459.1958.10501452](https://doi.org/10.1080/01621459.1958.10501452).
- [11] **Kostensalo, J., Mehtätalo, L., Tuominen, S., Packalen, P., and Myllymäki, M.:** *Recreating structurally realistic tree maps with airborne laser scanning and ground measurements*, Remote Sensing of Environment, **298** (2023), 113782. doi: [10.1016/j.rse.2023.113782](https://doi.org/10.1016/j.rse.2023.113782).
- [12] **Lisiewicz, M., Kamińska, A., and Stereńczak, K.:** *Recognition of specified errors of Individual Tree Detection methods based on Canopy Height Model*, Remote Sensing Applications: Society and Environment, **25** (2022), 100690. doi: [10.1016/j.rsase.2021.100690](https://doi.org/10.1016/j.rsase.2021.100690).
- [13] **Mohan, M., Mendonça, B. A. F. d., Silva, C. A., Klauber, C., de Saboya Ribeiro, A. S., Araújo, E. J. G. d., Monte, M. A., and Cardil, A.:** *Optimizing individual tree detection accuracy*

- and measuring forest uniformity in coconut (Cocos nucifera L.) plantations using airborne laser scanning*, Ecological Modelling, **409** (2019), 108736. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2019.108736.
- [14] **OpenTopography**: Lidar Survey of Sparta Earthquake Rupture, NC 2020, 2022. URL <https://opentopography.org/meta/OT.122022.32617.1>
- [15] **Ramiya, A. M., Nidamanuri, R. R., and Krishnan, R.**: *Individual tree detection from airborne laser scanning data based on supervoxels and local convexity*, Remote Sensing Applications: Society and Environment, **15** (2019), 100242. doi: 10.1016/j.rsase.2019.100242.
- [16] **Roussel, J.-R., Caspersen, J., Béland, M., Thomas, S., and Achim, A.**: *Removing bias from LiDAR-based estimates of canopy height: Accounting for the effects of pulse density and footprint size*, Remote Sensing of Environment, **198** (2017), 1–16. doi: 10.1016/j.rse.2017.05.032.
- [17] **Schaller, C., Ginzler, C., van Loon, E., Moos, C., Seijmonsbergen, A. C., and Dorren, L.**: *Improving country-wide individual tree detection using local maxima methods based on statistically modeled forest structure information*, International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, **123** (2023), 103480. doi: 10.1016/j.jag.2023.103480.
- [18] **Sun, Y., Jin, X., Pukkala, T., and Li, F.**: *Two-level optimization approach to tree-level forest planning*, Forest Ecosystems, **9** (2022), 100001. doi: 10.1016/j.fecs.2022.100001.
- [19] **Tompalski, P. J.-R. R., Tristan R. H. Goodbody**: *The lidR package*. URL <https://r-lidar.github.io/lidRbook/>
- [20] **Tóth, Z.**: *Data and R code for processing and analyzing LiDAR data of the Sparta area*, (2024), publisher: Zenodo. doi: 10.5281/ZENODO.14006303.
- [21] **Valbuena, R., Vauhkonen, J., Packalen, P., Pitkänen, J., and Maltamo, M.**: *Comparison of airborne laser scanning methods for estimating forest structure indicators based on Lorenz curves*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, **95** (2014), 23–33. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2014.06.002.
- [22] **Zhang, J., Sohn, G., and Brédif, M.**: *A hybrid framework for single tree detection from airborne laser scanning data: A case study in temperate mature coniferous forests in Ontario, Canada*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, **98** (2014), 44–57. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2014.08.007.

Bizonytalanság, avagy óvatosan a statisztikával¹

Csanády Viktória

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu,  0009-0004-3461-4892

ÖSSZEFOGLALÓ. A statisztikai vizsgálatok alkalmazása során különböző instabil adatsorok esetén óvatosan kell eljárni, különösen akkor, ha ismeretlenek számunkra az egyes befolyásoló tényezők szerepei, és hatásainak nagysága. Időbeli folyamatok előrejelzése gyakran téves, ijesztő eredményeket produkálhat. Gyakori tünet azonban napjainkban, hogy egy adathalmazt közlő, nem kerülheti ki a statisztikai kiértékelést, ami szinte elvárás. Az alábbiak erre vonatkozóan mutatnak be egy példát, lehetőségeket elemezve egy instabil időbeli adatsor esetén, nagyméretű konklúziók levonása nélkül az előre jelzésre vonatkozóan, figyelmeztetve annak lehetséges hibájára.

ABSTRACT. In the case of various unstable data sets, we must proceed with caution when applying statistical tests, especially if the roles of individual influencing factors and the magnitude of their effects are unknown to us. Forecasting temporal processes can often produce wrong, frightening results. However, it is a common symptom these days that someone who communicates a set of data cannot avoid statistical evaluation, which is almost an expectation. The following presents an example of this, analyzing possibilities in the case of an unstable time series, without drawing large-scale conclusions about the forecast, warning of its possible error.

1. Bevezetés

A különböző meteorológiai adatok, illetve azok vizsgálata régóta foglalkoztatja a kutatókat. A történelmi Magyarország területén 1753-tól regisztráltak adatokat a Nagyszombati Érseki Egyetemen. A szomszédos Ausztria területén a Kremsmünsterben felépített Matematika Torony csillagvizsgálója büszkélkedhet Európa egyik leghosszabb idejű adatsorával, ami meghaladja a 255 évet. A hosszútávú idősorok fontossága napjainkban a klímaváltozás időszakában jelentősen megnövekedett. A klímaváltozás, és vegyük most csupán annak egyetlen elemét, a hőmérsékletet kihat az emberi életre és persze a teljes gazdaságra, így annak vizsgálata exponált feladat. Sajnos részletes adatsorokhoz hozzájutni általában nehézkes és költséges vállalkozás, azok számára, akiknek nem ez a tudományterülete. Így ha mégis igényünk lenne ilyen jellegű adathalmazra, elfogadjuk a kevésbé részletes letölthető állományt. Az alábbiakban nem kívánjuk, és nem is tudjuk a fent vázolt extrém problémát kielemezni, tegyük ezt az arra kitanított szakemberek. Így csupán egy hőmérsékleti adatsoron elmélkedünk, ennek során bemutatjuk az alkalmazható statisztikai vizsgálatok lehetőségeit és annak eredményeit. Ezen utóbbiak vizsgálata viszont tanulságos figyelmeztető példákkal támasztják alá azt a fontos tény, hogy könnyen téves következtetések levonása történhet eredményekből,

¹ ENGLISH TITLE: Uncertainty, or be careful with statistics.
KULCSSZAVAK: staisztika, klímaváltozás, hőmérséklet.
KEYWORDS: statistics, climate change, temperature.

ha azokat csak, mint tisztán statisztikai eredményeket kezeljük, figyelmen kívül hagyva a tényleges folyamat lehetséges kimenetelét.

A vizsgálat tárgya egy 64 évet átölelő adatsor, éves átlaghőmérsékletre vonatkozóan. A mérések helye Kismarton (Eisenstadt), Ausztria, Soprontól légvonalban 17,5 km. Az adathalmaz a <https://www.meteoblue.com> internetes oldal szabadon hozzáférhető adatbankjából származik, ahonnan ingyenesen letölthető.

Az alábbiakban először bemutatásra kerül az adatsor grafikus prezentációja, annak teljes számszerű közlésétől eltekintünk. Ezt követően a 63 év során előforduló értékek normalitását vizsgáljuk függetlenül a feltételezett időbeli változástól. A normalitás vizsgálatot követi az időbeli folyamat tendenciájának leírása. Az adatsor jelentős mértékű szórása miatt indokolt az adatkiegyenlítés, hármassátlagolás majd centírozás. A centírozott adatsoron különböző modellek illesztése kerül bemutatásra. Ezt követően az adatsor 10 éves blokkokra bontással kerül vizsgálat alá melynek során a 10 éves átlagok felhasználásával illetve a hozzájuk tartozó konfidenciahatárral kimutatjuk a szélsőséges értékeket. Egy további kísérletben az idő intervallumonként bekövetkező hőmérséklet növekedés valamint az időintervallumban előforduló melegrekord értékek előfordulásának lehetséges kapcsolata kerül terítékre.

A vizsgálat céljai:

1. Mutassuk ki, hogy 63 év esetén az éves átlaghőmérsékleti adatok halmaza normális eloszlást követ!
2. Az időbeli folyamatot jellemezzük arra alkalmas matematikai modellel!

Az alkalmazott regressziós modellek:

- Lineáris függvény

- matematikai alakja:

$$y = b_1 \cdot x + b_0$$

- számítógépes alak:

$$Var2 = b1 \cdot Var1 + b0.$$

- Additív lineáris-trigonometrikus függvény

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \cdot \sin(b_2 \cdot x) + b_1 \cdot x + b_0$$

- számítógépes alak:

$$Var2 = b3 \cdot \sin(b2 \cdot Var1) + b1 \cdot Var1 + b0.$$

- Transzformált exponenciális függvény

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \cdot b_2^{x-b_1} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$Var2 = b3 \cdot b2^{(Var1 - b1)} + b0.$$

- Telítési függvény

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \cdot \left(1 - e^{-(b_2 \cdot x)^{b_1}}\right) + b_0$$

- számítógépes alak:

$$Var2 = b3 \cdot (1 - \exp(-1 \cdot (b_2 \cdot Var1)^{b_1})) + b0.$$

- Transzformált tangens hiperbolikus függvény

- matematikai alakja:

$$y = b_3 \cdot th(b_2 \cdot (x - b_1))b_0$$

- számítógépes alak:

$$Var2 = b3 \cdot TanH(b2 \cdot (Var1 - b_1)) + b0.$$

3. Adjuk meg a folyamatban előforduló szélsőséges éveket!

4. Igazoljuk az összefüggést az átlaghőmérséklet növekedése és szélsőséges melegrekordok gyakorisága között!

Az adathalmaz vizsgálata során alkalmazott software a STATISTICA, a modellek illesztésénél a szükséges kezdőértékek az adatsorból jól becsülhetők.

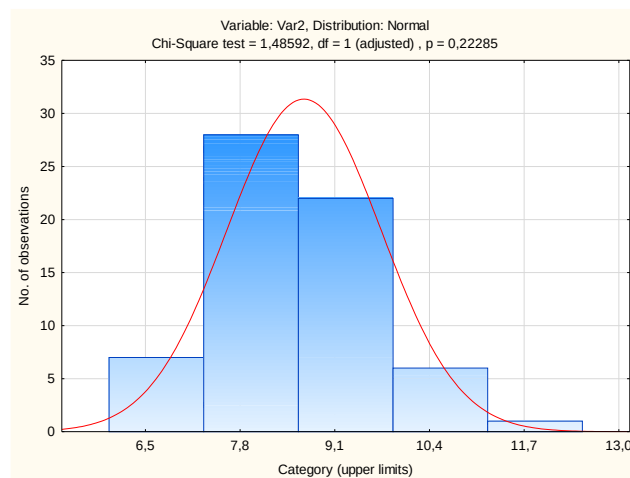
2. Számított eredmények, kiértékelés

2.1. 64 év hőmérsékleti átlagának normalitás vizsgálata

Az alábbi táblázatban a normalitás vizsgálat eredményei olvashatók, továbbá a hozzátartozó hisztogramm.

Upper Boundary	Variable: Var2, Distribution: Normal (átlaghő) Chi-Square = 1,48592, df = 1 (adjusted), p = 0,22285				
	Observed Frequency	Cumulative Observed	Expected Frequency	Cumulative Expected	Observed-Expected
<= 7,30000	7	7	6,19277	6,19277	0,80723
8,60000	28	35	23,9624	30,1552	4,03758
9,90000	22	57	25,9136	56,0688	-3,91365
11,20000	6	63	7,38235	63,4512	-1,38235
< Infinity	1	64	0,54877	64,0000	0,45123

1. táblázat. Normalitás vizsgálati eredmények



1. ábra. Normalitás vizsgálati hisztogramm

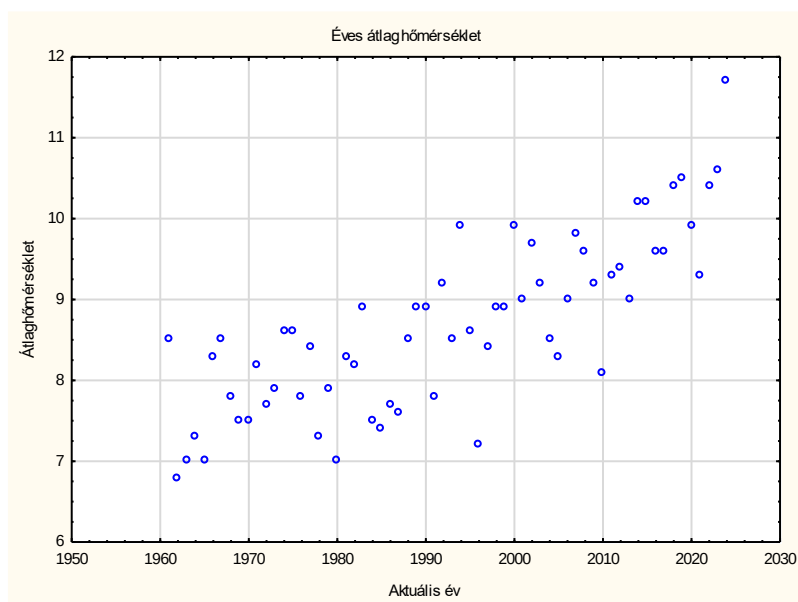
Az előbbi számítások kimutatják, hogy az adathalmaz 5%-os tévedési szinten megfelel a feltételezett normális eloszlásnak. A hisztogram jól demonstrálja az egyes osztályok gyakoriságait, ami szerint a maximális gyakoriság a második osztályra jellemző és itt mutatkozik a legnagyobb eltérés az elméleti és tapasztalati gyakoriság között.

2.2. Az átlag adatsor regressziós vizsgálata

Az alábbi ábrán jól látható a nyers adatsor szóródása, ami arra a gondolatra vezeti a statisztikai kiértékelőt, hogy regresszió esetén a modell kiválasztása meglehetősen önkényes, a kiértékelő döntése lehet. Ez természetesen nem helytálló, hiszen a modellnek eleget kell tennie bizonyos folyamatjellemzőknek. Ebben az esetben azonban nagy a bizonytalanság, talán azt mondhatjuk ki, hogy a felső korlát indokolt, hiszen a hőmérsékleti növekedés nem mehet a végtelenbe, ez ugyancsak ijesztő lenne. A teljes folyamat leírása azonban nem várható el, sőt előrejelző trend sem számítandó a modell alapján a vizsgálati időszak rövideége (~64 év) miatt.

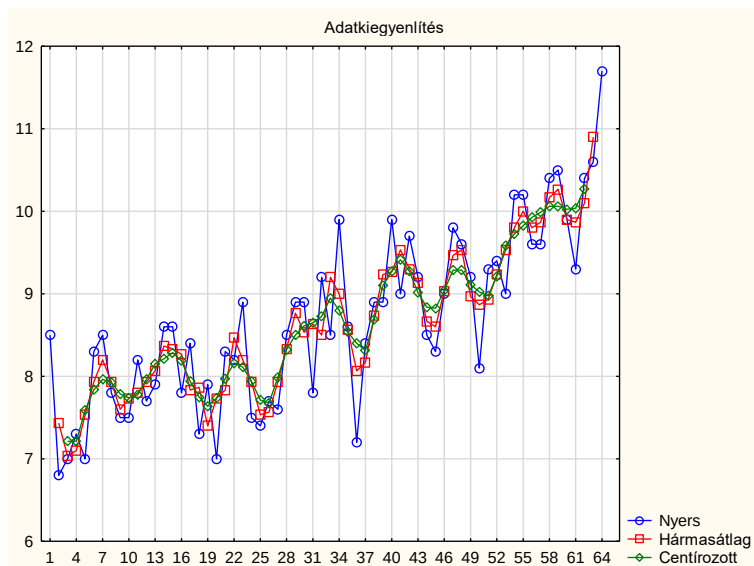
Ami lehetséges, az a vizsgált időszak jellemzése egy arra alkalmas modell segítségével.

Mivel azonban az adathalmaz szóródása nagy, így érdemes elvégezni az adatkiegyenlítést melynek révén csillapítható az adatsor.



2. ábra. Nyers adatsor

A 3. ábra együttesen mutatja a nyers és a két csillapított adatsort, az áttekinthetőség érdekében az egymást követő évek átlaghőmérséklet adatait összekötve, így jobban elkülöníthetők az adatsorok. A csillapított adatsorokat vizsgálva a csillapítás mértéke már a hármastlagolt adatsornál is jelentős, még markánsabb azonban a centírozás esetén. Az adatsorok kapcsán meg kell említeni, hogy a vizsgálati időintervallum 64 évként van feltüntetve, viszont az utolsó év csonka, ez azonban nem befolyásolja jelentős mértékben a számított eredményeket.

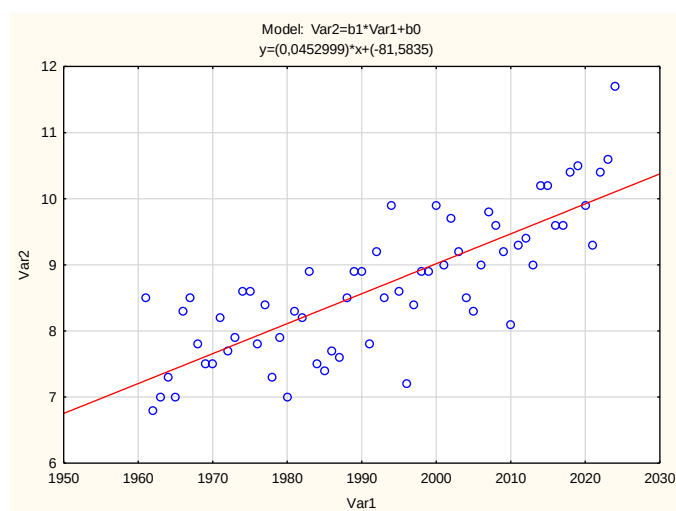


3. ábra. Nyers és csillapított adatsorok

Az adatelőkészítést követően először a legegyszerűbb lineáris modell illesztése kerül bemutatásra, mindhárom adathalmaz esetén.

- A nyers adatsor (Var2) eredménye:

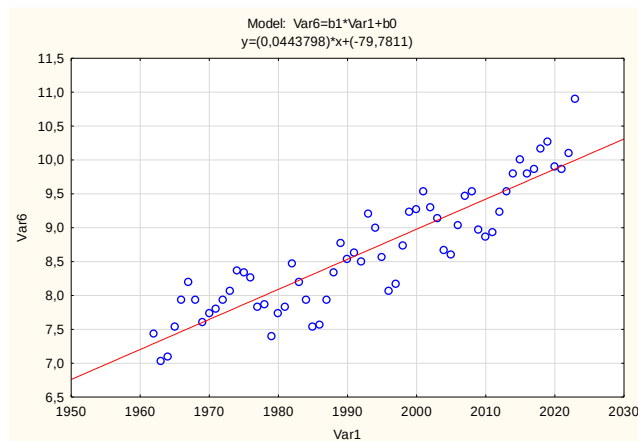
Model: $\text{Var2} = b_1 \cdot \text{Var1} + b_0$ (átlaghó)		
Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2		
Final loss: 25,797379350 R= ,79666 Variance explained: 63,467%		
N=64	b1	b0
Estimate	0,045300	-81,5835



4. ábra. Lineáris illesztés nyers adatsor esetén

- A hármastlagolt adatsor (Var6) eredménye:

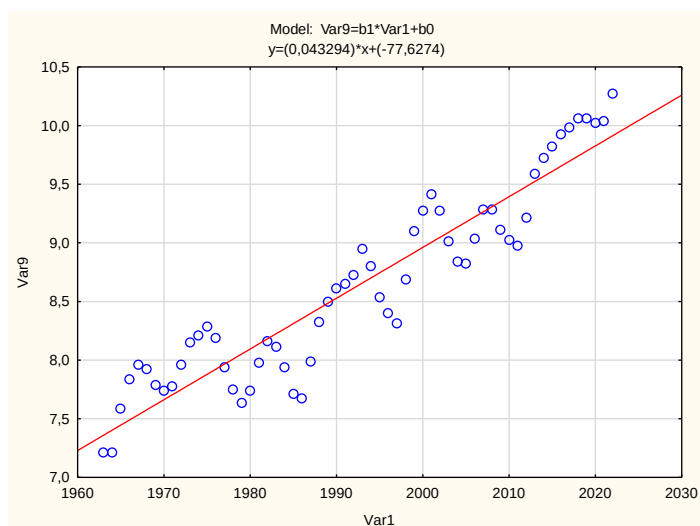
Model: Var6=b1*Var1+b0 (átlaghő) Dep. var: Var6 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 9,080436767 R= ,90087 Variance explained: 81,156%		
N=62	b1	b0
Estimate	0,044380	-79,7811



5. ábra. Lineáris illesztés hármastlagolt adatsorra

- A centírozott adatsor (Var9) eredménye:

Model: Var9=b1*Var1+b0 (átlaghő) Dep. var: Var9 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 4,930583229 R= ,93406 Variance explained: 87,246%		
N=60	b1	b0
Estimate	0,043294	-77,6274

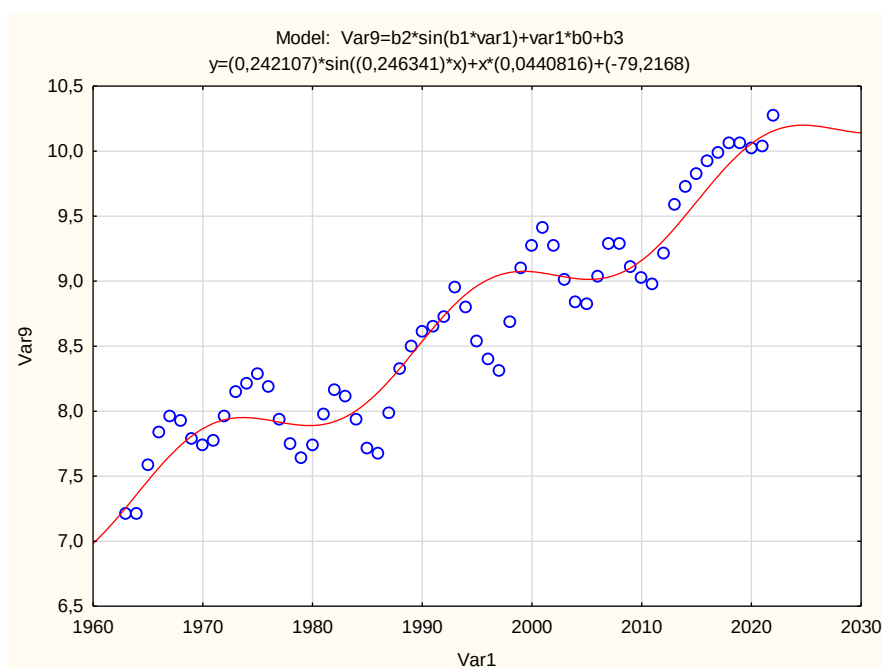


6. ábra. Lineáris illesztés centírozott adatsorra

Áttekintve a lineáris illesztések eredményeit arra a következtetésre jutunk, hogy a nyers adatsor vizsgálata az adatsor nagy szóródása miatt nem kedvező. A korrelációs együttható értéke ezt alátámasztja $R=0,7967$, $R=0,9009$, $R=0,9341$ nyers, hármastlagolt, centírozott sorrendjében. Az R értékének növekedése azonban igazolja a csillapítás sikerességét, így a tendencia vizsgálatához elegendő a centírozott adatsor további vizsgálata, melynek során nem lineáris modellek illesztését hajtjuk végre.

- Additív lineáris-trigonometrikus függvény illesztésének eredménye:

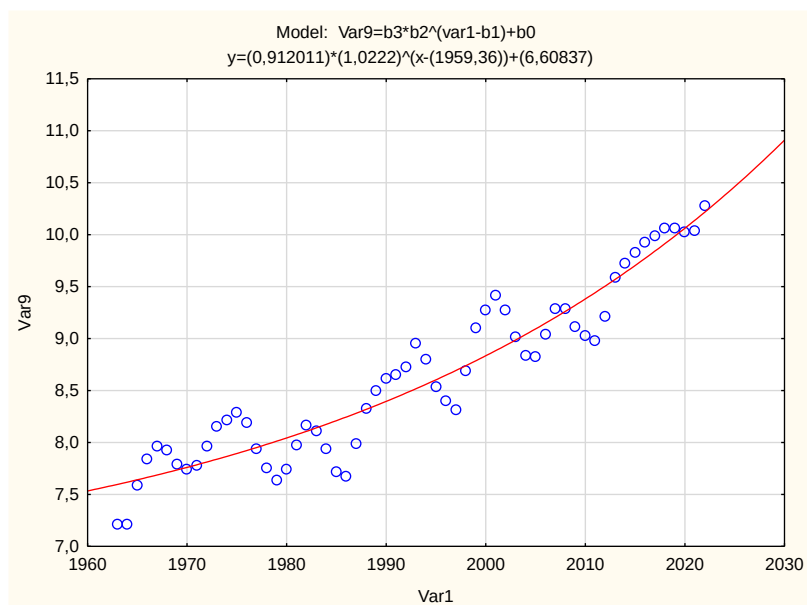
Model: $\text{Var9} = b_2 \cdot \sin(b_1 \cdot \text{var1}) + \text{var1} \cdot b_0 + b_3$ (átlaghó)				
Dep. var: Var9 Loss: (OBS-PRED)**2				
Final loss: 3,214587391 R= ,95752 Variance explained: 91,685%				
N=60	b2	b1	b0	b3
Estimate	0,242107	0,246341	0,044082	-79,2168



7. ábra. Additív lineáris-trigonometrikus függvény illesztése

- Transzformált exponenciális függvény illesztésének eredménye:

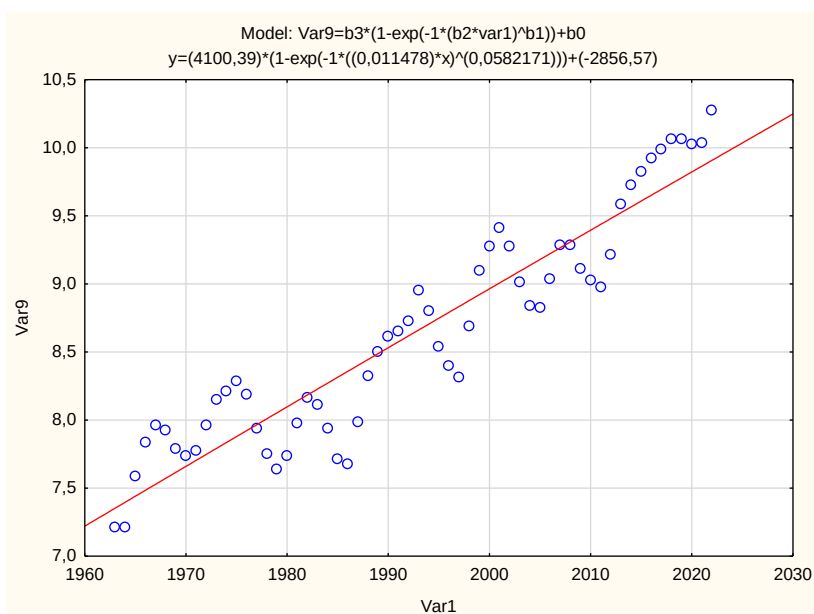
Model: $\text{Var9} = b_3 \cdot b_2^{\text{var1} - b_1} + b_0$ (átlaghó)				
Dep. var: Var9 Loss: (OBS-PRED)**2				
Final loss: 3,991091622 R= ,94698 Variance explained: 89,676%				
N=60	b3	b2	b1	b0
Estimate	0,912011	1,022198	1959,359	6,608373



8. ábra. Transzformált exponenciális függvény illesztése

- Telítési függvény illesztésének eredménye:

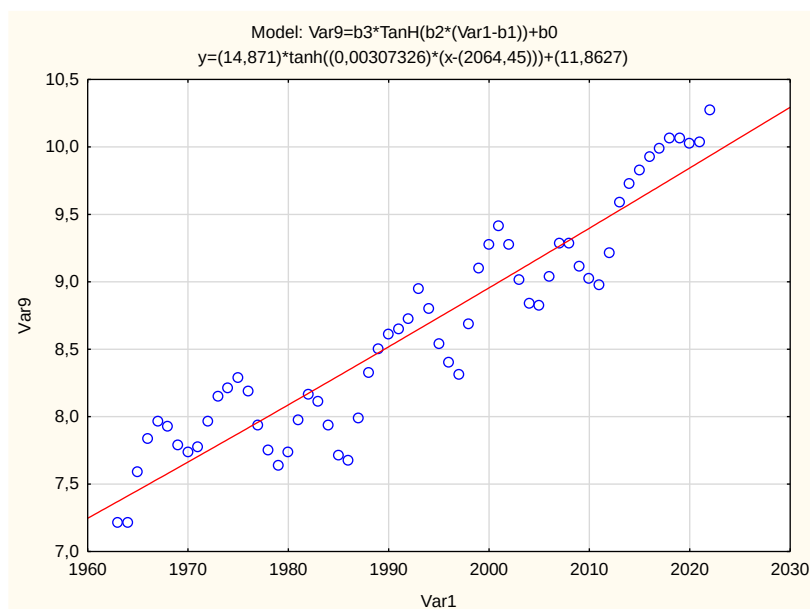
Model: $\text{Var9} = b_3 * (1 - \exp(-1 * (b_2 * \text{var1})^{b_1})) + b_0$ (átlaghő)				
Dep. var: Var9 Loss: (OBS - PRED)**2				
Final loss: 4,974480359 R= ,93345 Variance explained: 87,133%				
N=60	b3	b2	b1	b0
Estimate	4100,38E	0,01147E	0,058217	-2856,57



9. ábra. Telítési függvény illesztése

- Transzformált tangens hiperbolikus függvény illesztésének eredménye:

Model: $\text{Var9} = b3 \cdot \tanh(b2 \cdot (\text{Var1} - b1)) + b0$ (átlaghő)				
Dep. var: Var9 Loss: (OBS-PRED)**2				
Final loss: 4,821994562 R= ,93556 Variance explained: 87,527%				
N=60	b3	b2	b1	b0
Estimate	14,87104	0,003073	2064,450	11,86269



10. ábra. Transzformált tangens hiperbolikus függvény illesztése

Az illesztések illetve alkalmazott modellek esetén számított R értékek alkalmasak egy fajta rangsorolásra. Meg kell azonban jegyezni, hogy R mint korrelációs együttható nem tévesztendő össze a lineáris korrelációs együtthatóval, ami nyilván csak lineáris modellek esetén alkalmazható. Az alábbi táblázat összefoglalja a nem lineáris modellek R értékeit.

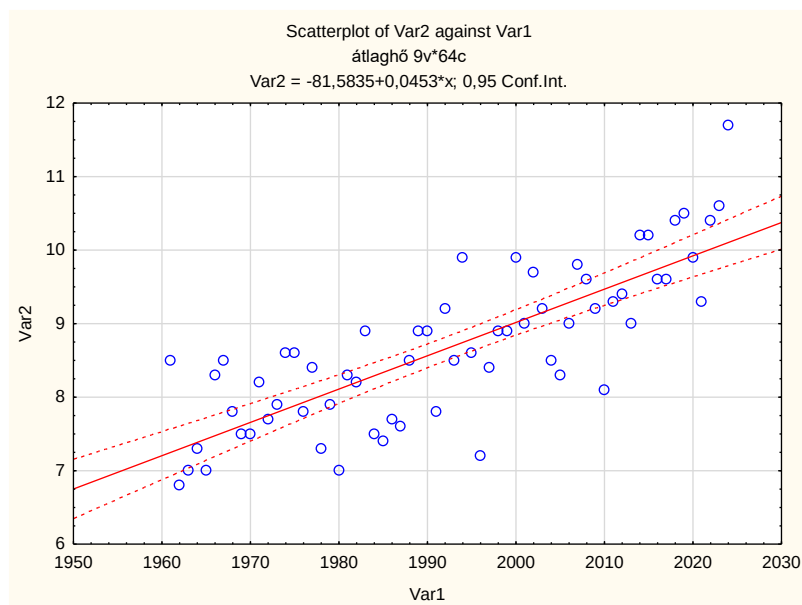
<i>Illesztett modell típusok</i>	<i>R</i>
Additív lineáris-trigonometrikus	0,9575
Exponenciális	0,9470
Telítési	0,9335
Transzformált tangens hiperbolikus	0,9356

2. táblázat. Illesztési R értékek

A táblázati értékek egyértelműen arra utalnak, hogy a folyamatot legjobban leíró modell az additív lineáris-trigonometrikus modell. Ezt követi az exponenciális, majd az utóbbi kettő között az eltérés meglehetősen csekély. Meg kell azonban nyomatékosan jegyezni, hogy az első kettő nem korlátos modell, a vizsgált időintervallumra nézve azonban az illeszkedés statisztikai szempontból megfelelő.

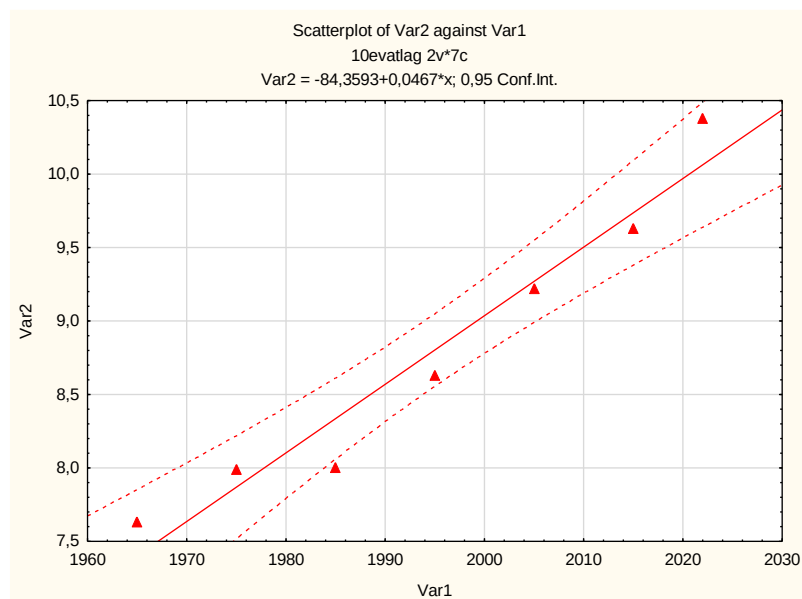
2.3. Szélsőséges éves átlaghőmérsékletek kimutatása

A szélsőséges adatok kimutatása egy bizonytalan, nagy szórással rendelkező adathalmaz esetén, ami időfüggő természeti folyamatból származik nehézkes feladat. Az alkalmazott módszer során az időintervallumra feltételezzük a linearitást és megadjuk a 95%-os konfidencia határokat.



11. ábra. Konfidencia határok a nyers adathalmaz esetén

Jól látható, hogy a módszer a nyers adathalmazra nem alkalmazható. A következőkben az adathalmazt tíz éves részintervallumokra bontjuk és az adatok tíz éves átlagaival kíséreljük meg a vizsgálatot.



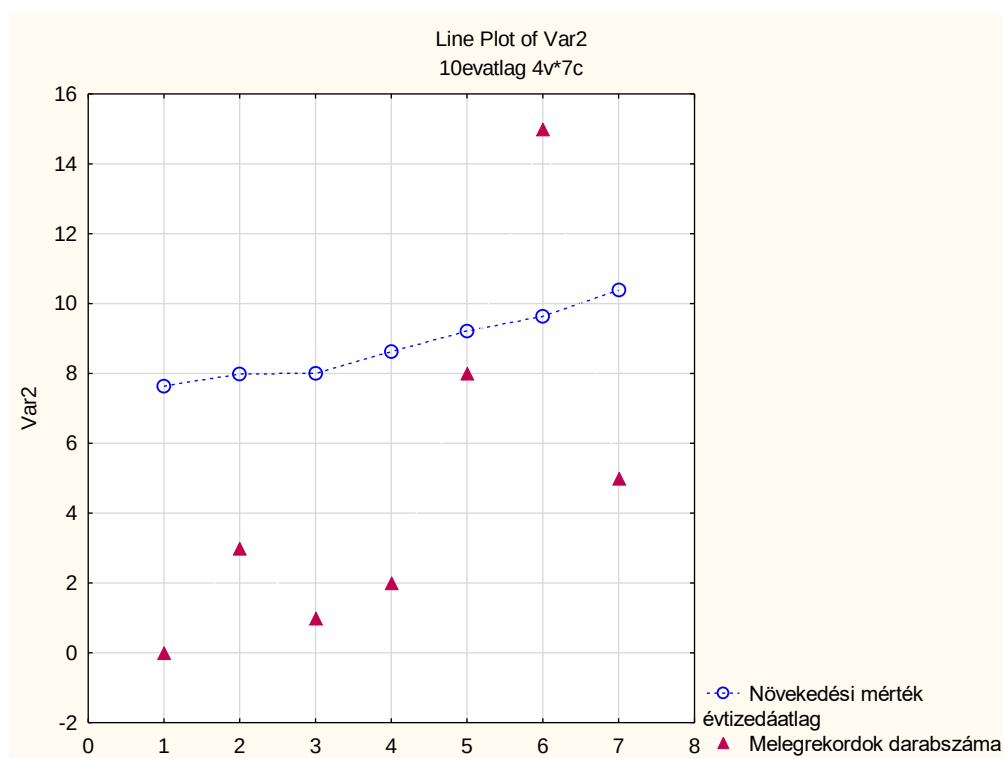
12. ábra. Konfidencia határok tízéves bontás esetén

A 12. ábra arra utal, hogy a vizsgált 10 éves részintervallumok (utolsó csonka 10 év) átlagértékei közül az 1980-1990 évtized hőmérséklet átlaga az alsó 95 %-s konfidenciahatár alá esik, a feltételezett tendenciának nem felel meg.

2.4. Évtizedek átlaghőmérsékletváltozásai és a melegrekordok előfordulásának számai

Az adatok részletes felsorolása nélkül - hiszen ezek szabadon hozzáférhetők az interneten – jegyezzük meg, hogy a vizsgált 64 évben az Európában mért melegrekordok száma 2024. július végéig 34 volt. Az abszolút maximum értéket, 49,1 C° –t 2021.07.20-án mérték Törökország európai területén. A Magyarországon mért eddigi legmagasabb hőmérséklet 41,9 C° Kiskunhalas 2007.07.20. mely értékkel a középmezőnyben vagyunk a 22. helyen. Természetesen a melegrekord nagyságrendje helyfüggő, de ne gondoljuk, hogy ez a tény feltétlenül szignifikáns. Ezt támasztja alá néhány példa, Ukrajna 42 C° 2010, Belgium 41,8 C° 2019 vagy éppen Svájc 41,5 C° 2003.

A földrajzi hely tehát nem feltétlenül mérvadó, a rekordok számának növekedése azonban azt a feltételezést kelti, hogy az emelkedő átlaghőmérséklettel szinifikáns. Feltételezve, hogy a birtokunkban lévő átlaghőmérsékleti adatsor növekedési tendenciája egy közepes tendenciának feltételezhető meghatároztuk a tízéves ciklusok átlaghőmérsékleteinek növekedési mértékeit, valamint utána kerestünk az egyes időszakokban bekövetkező európai hőmérsékleti rekordok számának, és feltételezzük a két változó szignifikáns kapcsolatát. Az alábbi ábrán az évtizedekhez kapcsolódó növekedési mértékek illetve az adott évtizedben előforduló melegrekordok db száma látható.



13. ábra. Átlaghőmérséklet növekedési mértéke és rekord számok

A 13. ábra nem igényel különösebb magyarázatot, arra vonatkozólag viszont, hogy a feltételezés a szignifikáns kapcsolatra elfogadható-e azt a választ adja, hogy nem.

Természetesen igaz az a tény is, hogy a vizsgált időintervallum rövid, emiatt az eredmények megbízhatósága megkérdőjelezhető.

2.5. Elemzés, értékelés

64 év átlaghőmérsékleteinek normalitás vizsgálati értékelése:

Az alkalmazott illeszkedés vizsgálattal kimutatható, hogy a vizsgált adatsor 5%-os tévedési szinten megfelel a nullhipotézisben feltételezett normális eloszlásnak. A tapasztalati gyakoriság maximuma a 2. osztályba esik, majd ezt követi kevés eltéréssel a középső 3. osztály. A tapasztalati és elméleti gyakoriságok különbsége mind két osztály esetén azonos abszolútértékben közelítőleg 4, a második osztályban (O-E) pozitív, a harmadikban negatív. A vizsgálat bár statisztikailag ugyan korrekt, belőle azonban messzemenő következtetéseket nem lehet levonni, annál is inkább mivel időfüggő adatsort vizsgáltunk!

Regressziós eredmények értékelése:

A vizsgálat első lépésében egy közönséges lineáris regressziót alkalmaztunk a nyers adatsorra, ami kimutatta, hogy ilyen formában csak a tendencia jóslása a rövid időintervallumra gyenge korrelációt mutat. Ez indokolta a bizonytalan nagy szórású adatsor csillapítását az adatkiegyenlítési módszerek alkalmazását. A már csillapított adatsor lineáris regressziós eredményei lényegesen szorosabb korrelációt mutattak. Mivel a linearitás nem feltételezhető, így további nem lineáris modellek alkalmazása következett. A négy felhasznált modell közül a legjobb eredményt a korrelációs együttható vonatkozásában a nem szokványos additív modell eredményezte, ami lineáris és trigonometrikus függvény kompozíciója. A modell természetesen csak erre a rövid vizsgált időtartamra vonatkoztatható, megjegyezve, hogy statisztikailag jó illeszkedést prezentál, de a tényleges folyamatra csak véletlenszerű a jó eredmény! Az ezt követő exponenciális modell alkalmasnak bizonyul a folyamat ezen időszakának tendenciális leírására, de nyilván hosszútávú elemzésre nem alkalmas. A telítési függvény és tangens hiperbolikus függvény korlátos függvények, aszimptotikus jelleggel, így alkalmazásuk indokolt lehet a folyamat jellemzésére. Itt azonban ki kell jelenteni, hogy mindkét függvény esetében a vizsgált időintervallum adatai a függvények azon szakaszába esnek ahol a függvények grafikonjai jól láthatóan közel lineárisak.

A négy illesztés közül a fentiek figyelembe vételével kimondható, hogy a 64 éves vizsgálati időszak gyenge exponencialitást mutat, amit igazolnak az illesztett függvény paraméterei.

Szélsőséges átlagértékek kiszűrésének értékelése:

A nyers adathalmaz esetén a szélsőséges átlagok kiszűrése a felhasznált módszerrel nem járható. Az évtizedekre bontott adathalmaz esetén már kimutatható egy a konfidencia intervallumból kieső adat, azonban ne felejtjük el, hogy az adatok többszörös átlagolása révén a kapott eredmény elnagyolt. Ebben az esetben lehet, hogy alkalmasabb rövidebb időintervallumok alkalmazása, vagy adatkiegyenlítés használata a vizsgálat előtt.

Átlaghőmérséklet növekedése és rekordszámok összefüggésének értékelése:

A vizsgálat szignifikáns kapcsolatot keresett az évtizedes átlaghőmérséklet növekedése és az egyes évtizedekben előforduló melegrekordok darabszáma között. Két változó kapcsolatának vizsgálatára többféle módszer alkalmazható. Itt azonban csupán egy grafikus elemzés került bemutatásra. A grafikus eredményből feltételezhető a kezdeti állítás hamissága, miszerint a két vizsgált tényező között nincs szignifikáns kapcsolat.

3. Összefoglaló

A címből „Bizonytalanság, avagy óvatosan a statisztikával” kiolvasható, hogy a vizsgálat tárgya egy olyan adathalmaz, jelen esetben időfüggő adatsor, mely szélsőséges, jelentősen ingadozó, így vizsgálata, kielemezése nehézkes. Mivel hőmérsékleti átlagértékekről van szó, melyek ráadásul éves átlagok, így takarják a mögöttük rejlő további szélsőséges adatokat. A vizsgált időintervallum rövid, hiszen nincs egy század, de arra alkalmas, hogy jellemezhető legyen a vizsgált időszak trendje. A regressziós modell megválasztása ilyen esetben az adatsor külleme alapján történik, kijelentve azt, hogy csupán az adott intervallum jellegére utal, további előre jelzésekre nem alkalmas.

Az eredmények áttekintése után érdemes megjegyezni, hogy bár egy adatsorra szorosan illeszkedő matematikai modell is megalkotható, lásd additív modell - kevesebb adat esetén például akár elérhetjük, azt hogy egy alkalmazott polinom áthaladjon az egyes pontokon - statisztikailag tökéletes az illesztés, de a folyamat szempontjából értelmezhetetlen! Szem előtt kell tehát tartani a tényleges folyamat lehetséges alakulását, és eszerint választani a megfelelő modellt.

Szélsőséges adatok kiszűrése nehézkes feladat, adatkiegyenlítéssel és többszörös átlagolással viszont jelentősen csillapítjuk az adatsort, aminek következtében az torzul, ez azt eredményezheti, hogy a kapott szélsőséges érték valójában nem helytálló.

Mindezen tények arra utalnak, hogy a fentiekben vizsgált adatsorhoz hasonló adatsorok esetén óvatosan kell alkalmaznunk az egyes statisztikai módszereket, s bár lehet az eredmények statisztikai szempontból helyesek, szem előtt kell tartani a vizsgálat tárgyát figyelembe véve az arra vonatkozó szakmai ismereteket.

Irodalomjegyzék

- [1] **Csanády, V., Horváth-Szováti, E., Szalay, L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.
- [2] URL <https://www.meteoblue.com>
- [3] **Csanády, V.**, Időjárás elemzés regressziós eljárás alkalmazásával, Dimenziók, Matematikai Közlemények (2064-2172): 3 pp 25-34 (2015)

Matematika tanítása Z generációs hallgatók számára¹

Horváth-Szováti Erika

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu, ☎ 0009-0000-8351-6069

ÖSSZEFOGLALÓ. A Z generáció tananyaggal, oktatóval kapcsolatos elvárásainak, illetve a hallgatói attitűdnek a gyökeres megváltozását tapasztaljuk. A Z generációs egyetemi hallgatók számára más módszerekkel kell tanítani a matematikát.

ABSTRACT. We are experiencing a radical change in the expectations of Generation Z regarding curriculum and instructors, as well as student attitudes. Mathematics must be taught using different methods for Generation Z university students.

1. Bevezetés

A matematika oktatás problémáiról szóló beszélgetéseink során azt tapasztaljuk, hogy mind az oktatók, mind a hallgatók erős kritikával illetik a másik felet. Fontos lenne, hogy mindkét oldal elismerje a valós szerepét az eredménytelenség alakulásában. Egyértelmű tény, hogy ha a hallgatóknak lehetőségük van az ismereteket, készségeket és kompetenciákat a saját tanulási stílusukhoz leginkább közel álló módon elsajátítani, akkor a tanulás élménnyé és jóval eredményesebbé válhat. Az is vitathatatlan, hogy a cél érdekében a sikeres tanulási folyamat lépcsőfokain mindenkinek végig kell haladnia. Ez a folyamat az alkalmazott tanítási és tanulási módszertől függően több-kevesebb fáradtsággal járhat, de az biztos, hogy befektetett munka (azaz a nélkülözhetetlen elméleti háttér megismerése, gyakorlati problémák megoldása stb.) mindenképpen szükséges hozzá. Proklosz görög történetíró feljegyzése szerint, amikor I. Ptolemaiosz megkérdezte Eukleidésztől, hogy vajon a geometria megtanulásának nincs-e rövidebb és könnyebb módja, akkor Euklidész így válaszolt: "A geometriához nem vezet királyi út." Ez a matematika minden ágára igaz. A hallgatóság részéről a tananyag elsajátításához elhatározás, akaraterő és türelem szükséges. A generációkutatás napjaink sláger témája. A Z generáció számára valóban máshogy kell tanítani a matematikát? Milyen módszerek alkalmasak erre? Találunk könnyebb utakat? Mit tartsunk meg? Mit érdemes elhagynunk? Mit kellene kreatívan újra terveznünk?

2. Miért más a Z generáció?

Az 1945 előtti születésűek a „veteránok” (más néven csendes, vagy építő generáció). Őket követik a baby boomerek (akik 1946 és 1964 között születtek) és az X generációsok (születési idejük 1965 és 1979 közé esik). Az Y generáció az 1980 és 1994 között, a Z az 1995-2009 időintervallumban, az alfa pedig a 2010-ben, vagy utána született embereket foglalja magában. Az X, Y és Z generációk közötti határvonalakat elsősorban a technológiákhoz való viszonyulás

¹ ENGLISH TITLE. Teaching Mathematics to Generation Z students.

KULCSSZAVAK. Z generáció, matematika oktatás, MIOPA-modell, digitalizáció.

KEYWORDS. generation Z, mathematics education, MIOPA-model, digitalization.

alapján húzták meg. A különböző generációk audiovizuális szempontból „más születéskori normalitást” kaptak. Pszichológiai kutatások által bizonyított tény, hogy ez az emberi agy bizonyos területeinek fejlődése szempontjából meghatározó. A veteránokat gyermekkorukban semmilyen audiovizuális hatás nem érte. A baby boomerek még nem, vagy ritkán találkozhattak gyermekkorukban a televízióval (Magyarországon 1957. május elsejétől kezdődött el a rendszeres adás), az X generációsok pedig már a TV világába nőttek bele. Ez egy nagyon meghatározó változás, ugyanis a gyermekkori audiovizuális hatások a későbbiekre nézve számtalan kérdést felvetnek. Erre utal az X elnevezés is, hiszen a matematikában az ismeretlent jelöljük x-szel. A világot 1980-ig inkább közösségorientáltnak, míg 1980-tól énközpontúbbnak tekintjük, amit sokan a sétálómagnó (walkman) megjelenéséhez kötnek. Itt húzták meg a generációk közötti újabb határvonalat. Az Y generáció már ebbe az énközpontú világba született bele. A generációk közötti következő váltást az internet megjelenése jelenti. A Z generáció tagjai ún. „digitális bennszülöttek” (ezt a fogalmat Marc Prensky alkotta 2001-ben [9]), ugyanis az internet kisgyermek koruk óta része az életüknek. Ők a világ első globális nemzedéke, akik a világ bármely pontján ugyanazon a zenén, ugyanazon a kultúrán, ugyanazonokon a híreken nőttek fel. Egyik legjellemzőbb tulajdonságuk a technológiai újdonságok iránti fogékonyság. A Z-seket követi az alfa generáció, akik születése idején már voltak okoseszközök is.

A Z generációs fiatalok jelenleg kb. 15-29 évesek, tehát az egyetemek hallgatói kb. 10 éve közülük kerülnek ki. Ez komoly kihívásokat és változásokat hozott a felsőoktatásban. Ők az első olyan generáció, akiket már a korai gyermekkorukban hatalmas mennyiségű audiovizuális hatás ért. Ezek az ingerek erősen befolyásolják az idegrendszer működését és az agyi fejlődést. A weboldalak böngészésével töltött idő növekedése miatt a régi szellemi funkciók gyengülnek [2]. A felsőfokú oktatásban napjainkban mind a hallgatóság, mind az oktatók gyakran kudarcokat élnek át, ennek egyik oka lehet, hogy itt keresendő.

A megváltozott gondolkodásmód mellé legtöbbször megváltozott attitűd is társul. A Z generáció tagjairól a szakirodalom azt mondja, hogy nagyon kritikusan nézik a körülöttük lévő világot, és sokkal nyíltabban, szabadabban fejezik ki a véleményüket. Nehezebben alkusznak meg számukra kellemetlen, korlátozó dolgokkal. Kreatív ötleteik szép számmal vannak, viszont mivel egy felgyorsult világba születtek bele, így – az előző generációkkal ellentétben – türelmetlenek. Kevésbé tartanak ki céljaik mellett, gyakoribb a felsőoktatásban a szakváltás, vagy a félbehagyott tanulmányok. Ebben természetesen kettősség is van, ugyanis sokak esetében ez az önmegvalósítás útja. Többségüknek nem túl jó a kommunikációs készsége, és az a tapasztalat, hogy eszközeink „okosodásával” együtt évről-évre nő a kommunikációs szakadék a generációk között. A Z-sekre jellemző továbbá, hogy nem eléggé rugalmasak, valamint nagy az önbizalmuk, amit elég sokszor téves önértékelésre alapoznak. Ez a magabiztosság munkavállalóként magas bérigénnyel és a ranglétrán történő gyors előrejutás vágyával párosul. Ritkán elkötelezettek a munkáltatójuk iránt, és gyorsan váltanak munkahelyet. Ez egyben lehet értékes tulajdonság is, mert kiharcolják maguknak azt a bért és munkahelyi kultúrát, amit elfogadhatónak találnak. Kutatások szerint magányosabbak az őket megelőző generációknál, és gyakrabban fordul elő náluk depresszió, szorongás.

A fentiek miatt a Z generáció tagjaival az egyetemi oktatásban is máshogy kell kooperálni. Nagyon nyitottak az őket érdeklő dolgokra, ezek azonban egyetemünkön a képzések jellege miatt ritkán kapcsolódnak a matematikához. Érdeklődés hiányában viszont az előzőleg felsorolt tulajdonságok nagy része jelentősen hátráltatja a tanulást. Próbáljuk követni a képességeik változását, és azokra a kvalitásokra vagyunk kíváncsiak, amelyekben ők a legjobbak. Nagy kérdés azonban, hogy ezeket a kvalitásokat hogyan kapcsoljuk össze a matematikai tananyag átadásával és számonkérésével. Tisztában vagyunk vele, hogy a modern oktatás a tanár és hallgató közötti tudás és gondolatok cseréje. Ez sajnos nehezen valósítható meg akkor, ha a hallgatónak nagyon kevés gondolata van a témával kapcsolatban, vagy egyáltalán nem tud

hozzászólni. Összegezve tehát a célunk az, hogy minél hatékonyabbá tegyük a matematikai tudástranszfert, és a különböző generációkhoz tartozó oktatók és hallgatók között jó legyen a kommunikáció. Keressük továbbá a motivációs lehetőségeket, próbáljuk a hallgatókat aktívan bevonni az oktatásba.

3. A Z generáció tanulási stílusa

Az utóbbi 8-10 évben számos hazai és külföldi kutató végzett felmérést az egyetemi hallgatók körében, melynek célja a Z generáció megváltozott tanulási stílusának a megismerése volt. Ezen felmérések eredményeit a saját tapasztalataink is alátámasztották. Itt összefoglaltuk közülük a legfontosabbakat, egy-két helyen kiegészítve a mi megállapításainkkal.

A Z generáció tananyaggal kapcsolatos elvárásai, észrevételei, véleménye:

1. Az élményközpontú tudáselsajátítást preferálják (pl. projekt módszer, megfigyelések és gyakorlati tevékenységek általi tanulás).
2. Az azonnali visszacsatolásokra, valamint a szórakozásra, érdekességekre nagyon nagy igény van (Tapscott, 2009, [10]).
3. Kevesebb idő alatt elsajátítható tananyagot szeretnének.
4. Kevesebb memoriter legyen (képleteket ne kelljen fejből tudni stb.). Ennek eleget téve a szükséges matematikai összefüggéseket képletgyűjteményben foglaltuk össze, amely számonkérések során is használható, de az a tapasztalatunk, hogy kevesebb pozitív hatása van, mint vártuk.
5. Elmélet helyett több gyakorlat legyen, és azonnal láthatóvá váljék, hogy a megszerzett tudás mire használható. Az „ellenállók” gyakran teszik fel a „minek ez nekem?” „hol fogom használni?” kérdéseket, abban bízva, hogy nem tudunk válaszolni, és oktatóként is belátjuk, hogy felesleges matematikát tanulni. Az általunk kidolgozott matematika tananyag teljes egészében gyakorlati oldalról közelíti meg az egyes eljárásokat, módszereket. Csak a legszükségesebb tételeket mondjuk ki, és nem bizonyítjuk őket, kivétel egy-két olyan egyszerű esetet, amikor a bizonyítás szorosan kötődik a gyakorlati alkalmazáshoz.
6. Szakirodalomból legtöbbször nem szeretnek tanulni, mivel a tananyagban való hosszas elmélyülés egyre kevésbé sikerül.
7. Az önálló, saját tempójú tanulást részesítik előnyben.
8. A fő motiváció a diplomaszerzés, jobb jegyekért nem küzdenek (legfeljebb, ha magasabb ösztöndíj elérése a cél).
9. Egyre nagyobb az igény az elektronikus tananyagok iránt, de itt nem tankönyvek digitalizációjára, illetve hosszú PPT prezentációkra gondolnak.

A Z generáció oktatóval kapcsolatos elvárásai, igényei:

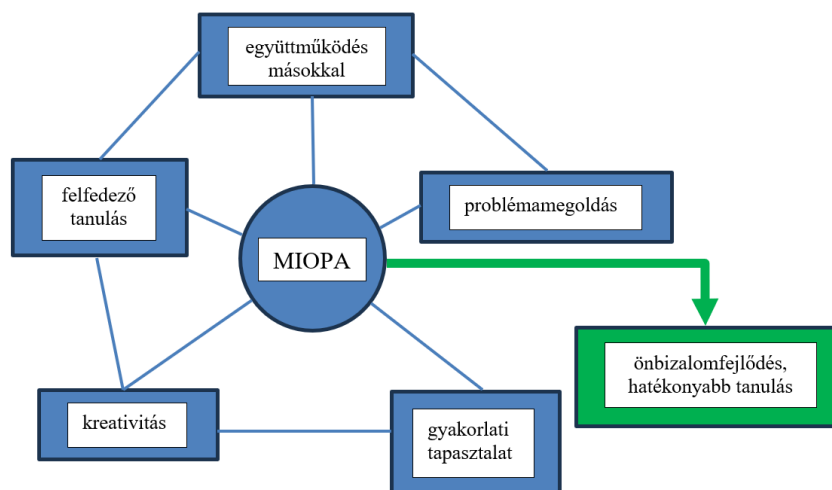
1. Az oktató nemcsak a tudás forrása, hanem mentor és partner is legyen egy személyben (új típusú oktatói szerepkör megjelenése).
2. A többség a barátkozó stílusú oktatókat kedveli (bár a hallgatóság kb. egyharmad része ezzel szemben a szigorúbb oktatókat preferálja).
3. Az igazságosság és következetesség szinte minden hallgató részéről alapvető elvárás (természetesen nagyon nehéz a barátkozó stílus iránti igénynek és az előbb megfogalmazott elvárásnak egyszerre megfelelni, de nem lehetetlen).
4. Az oktatókkal a közösségi médián keresztül történő kapcsolattartás egyre nagyobb hangsúlyt kap, de a személyes találkozás is fontos.

Az oktatók észrevételei:

1. A hallgatóság türelmetlenebb, mint korábban (nehezen sajátítja el a tananyag hosszabb fejezeteit, vagy bele sem fog annak feldolgozásába).
2. Az állandó, tanórák alatt sem szünetelő médiaeszköz-használat elsődlegesen szórakoztató célt szolgál, és elvonja a hallgató figyelmét az óráról. Megpróbáljuk ezt korlátozni, de egy nagy létszámú előadáson nem lehet ellenőrizni, hogy a szabályokat mindenki betartja vagy sem.
3. Az információs és kommunikációs technológiai (IKT) eszközökben rejlő, tanulási folyamatot segítő lehetőségek többnyire kihasználatlanok maradnak (pl. matematika gyakorlatokon ellenőrizhető lenne a függvények kiszámolt lokális szélsőértéke, ha okostelefon segítségével megvizsgáljuk a függvény grafikonját stb.). Ez az oktatási-tanulási élmény kiegészítésére egy jó lehetőség lenne.
4. A tanulási folyamat lépcsőin (érdeklődés < optimizmus < öntudatosság < lelkesedés < tanulási siker) sokan nem haladnak végig. Előfordul, hogy olyan csekély az érdeklődés, hogy a folyamatot el sem kezdik. A nem megfelelő hozzáállás kudarcokat szül, ami sikerélmény hiányában tovább rontja a hozzáállást, azaz ördögi kör.
5. Vannak hallgatók, akik egyáltalán nem látogatják az órákat, előadásokat. Sokszor találkozunk alig feltöltött egyetemi előadótermekkel. A jelenség elleni védekezés egyik módja az órák látogatásának kötelezővé tétele, és a jelenlét katalógusban történő rögzítése. Mi is bevezettük a kötelező óralátogatást, de ez sajnos a testben jelenlévő, és eközben mással foglalkozó hallgatók számának növekedését eredményezte, ami nagyrészt az órára behozott okostelefonoknak és egyéb digitális eszközöknek köszönhető.
6. Gyakori tapasztalat, hogy a levelezős egyetemi hallgatók, bár egzisztenciális és családi teher is lehet rajtuk, munkahelyi elvárásoknak is eleget kell tenniük, mégis nagyobb tanulási aktivitást mutatnak.
7. A rossz tanulási szokások is hátráltatják a tananyag elsajátítását („utolsó éjjel megtanulom ...”).
8. Sokszor szembesülünk a tanuláshoz szükséges kulcskompetenciák hiányával. Bár a személyes adottságokon nem tudunk változtatni, de az Alapozó matematika szabadon választható tantárgy bevezetésével lehetőséget nyújtunk a középiskolai hiányosságok pótlására. Kár, hogy kevesen élnek ezzel a lehetőséggel.
9. Gyakori a téves önértékelésre alapozott önbizalom, sikertelenség esetén sokan másban keresik a hibát.

4. Javaslatok, illetve új módszerek a Z generáció eredményesebb matematika oktatása érdekében

Mosca és szerzőtársai [8] a Z generáció oktatásában a különböző pedagógiai megközelítések együttes alkalmazását, vagyis a MIOPA-modellt (Multiple Inclusions of Pedagogical Approaches) javasolják (1. ábra). A MIOPA-modell azt mutatja, hogy a tanulás hatékonysága növelhető azáltal, ha a felfedező tanulás, a másokkal való együttműködés, a problémamegoldás, a gyakorlati tapasztalat és kreativitás területeit együtt használjuk az oktatás során. Ezáltal fejlődik leginkább a hallgatók önbizalma, és így leghatékonyabb a tanulási folyamat. Azt is megemlítik, hogy a valós világban felmerülő összetett problémák megoldására ezeknek a pedagógiai módszereknek az alkalmazása jobban felkészíti a diákokat, mint a hagyományos, frontális oktatás.



1. ábra. A MIOPA-modell [8]

Az alapozó tárgyak, így a matematika oktatásában a MIOPA-modellt nem egyszerű megvalósítani, de a benne szereplő módszereket, valamint a többi szakmai javaslatot figyelembe véve a következő változtatásokat vezettük be a Matematika tantárgy oktatásában:

1. *Gyakoribb számonkérés.* Kéthetenként, kisebb anyagrészekből íratjuk a zárthelyi dolgozatokat.
2. *Személyre szabott visszajelzés.* Igény esetén a dolgozatok megtekintésekor az értékelést szóbeli magyarázattal egészítjük ki.
3. *Nagyobb hangsúly a személyes kapcsolattartásra.* A Teams üzenetekre, e-mailekre rövid idő alatt válaszolunk. Hallgatói részről elvárás lenne itt is az azonnaliság (pl. késő éjjel másnapra vonatkozó üzenet érkezik, hétvégén jön a hétfő reggelrel kapcsolatos kérdés stb.). Próbáljuk megszokni a Z generáció chat-üzeneteinek stílusát és igyekszünk tolerálni a chat stílusú e-maileket. Előfordult már, hogy a baby boomer vagy X generációs oktatót keresztneven szólította meg a Z generációs hallgató a levelében. Ezt a legnagyobb tisztelettel és udvariassággal utasítjuk vissza.
4. *Megfelelő motiváció.* A téma iránt nem érdeklődő hallgatóságot motiválni nem egyszerű feladat. Ezt a célt szolgálhatja például a szorgalmi időszakban zajló pontgyűjtés és ennek beszámítása az osztályzatba, illetve a megajánlott jegy bevezetése. Az is motiváló erővel bír, ha sikerül elengednünk a tanulás hagyományos értelmezését, és a megtanulandó memoriterek helyett a problémamegoldó képességet és a kreativitást próbáljuk előtérbe helyezni, ami a matematika esetében elég nagy kihívás.
5. *Önálló feladatmegoldás konzultáció lehetőségével.* Minden előadásanyag végén a heti tananyaghoz kapcsolódóan gyakorló feladatokat adunk, amihez heti rendszerességgel fix időpontban konzultációt biztosítunk.
6. *Csoportmunkában megoldandó feladatok.* Előnyök: gondolkodásra ösztönöz, jól összeállított példaszor esetén mindenkinek van feladata, a jobb képességű vagy felkészültebb hallgató magával ragadhatja a gyengébben teljesítő társait. Hátrányok: nagyobb nyüzsgés, kevesebb feladatot sikerül megoldani adott idő alatt, nagyobb a hibalehetőség, ami többletenergia terhet ró az oktatóra. Csoportmunkával egyelőre csak projekthéten próbálkoztunk, a szűk időkeret miatt máskor erre nincs lehetőség.
7. *Projektmunka.* A projektmódszer a hallgatói tevékenységek tudatos tervezését igényli, a megismerés fő forrásává a saját tapasztalatát, érdeklődését, tevékenységét teszi [5]. A

- projekthét során matematikával kapcsolatos témákat is meghirdetünk, szabadon választható formában. A tapasztalataink pozitívak.
8. *YouTube videók használatára ösztönzés.* Az interneten minden témakörhöz rengeteg oktató videó található. Nehézséget az jelenthet, hogy ugyanazon probléma megoldására sokszor többféle módszert is találunk, emiatt nagyon kell figyelni arra, hogy a hallgató által ismert matematikai eszköztáron ne mutasson túl a videóban bemutatott megoldásmenet.
 9. *Digitális tananyagok készítése.* Egyetemünk a Moodle e-learning rendszert használja. Ide feltöltöttük az előadások PPT prezentációit, illetve az előadások videós összefoglalóit. Az előadásvideók lefedik a teljes tananyagot, hosszuk maximum 30 perc. Ezek segítséget nyújthatnak a heti előadásanyag átismétlésében, annak jobb megértésében. Minden hét anyagához 20-20 kérdésből álló teszt feladatsort is közzé tettünk (2. ábra), amelyek a Moodle kínálta lehetőségeket kihasználva különböző jellegűek (igaz-hamis, felelet választós, párosítós stb.). A szemeszter végén egy összefoglaló tesztkérdés sorozat van, ennek eredménye informálja a felhasználót a tudásáról.
 10. *Gamifikáció használata.* A *gamification* jelentése játékosítás, ez egy olyan oktatási módszert jelent, amely során az információk átadása és feldolgozása játékos formában történik (Deterding és mtsi, 2011, [3]). Azokra a pszichés folyamatokra épít, melyek a játék során pozitív élményekhez juttatják a résztvevő(ke)t, így a tudástartalmak könnyebben és tartósabban rögzülhetnek. Ezt a módszert már próbáltuk alkalmazni a Moodle-rendszerbe feltöltött tesztfeladatok közül néhánynál, de további lehetőségeket is keresünk. Elképzelhető továbbá az egyes tesztfeladatok megoldásának pontozással történő jutalmazása, illetve a pontoknak a szemeszter végén az értékelésbe történő beszámítása is. Ezt az értékelési rendszert még nem dolgoztuk ki, egyelőre csak ötletként merült fel.
 11. *Érdekes, vicces feladatok alkalmazása.* A matematika egyes fejezeteiben (pl. valószínűségszámítás) néha tréfásan fogalmazzuk meg a feladatok szövegét (pl. Blicc úr mekkora valószínűséggel találkozik a buszon a jegyellenőrrel stb.). Ez is egy lehetőség az érdeklődés felkeltésére és a figyelem fenntartására. Sajnos a matematikának csak néhány területén van erre mód.

Legyen adott $f(x)=1/x$, $g(x)=2^x$ és $h(x)=3x+1$. Párosítsa az összetartozókat.

2^{-x}	Választás...
2^{3x+1}	Választás...
$3/x+1$	$f(g(x))$ $g(h(x))$ $h(f(x))$

Az $f(x)=1/x$ függvény inverze?

Válasszon ki egyet:

☐ a. Nincs a függvénynek inverze.

☐ b. $f^{-1}(x)=x$

☐ c. $f^{-1}(x)=1/x$

2. ábra. Moodle tesztfeladatok

5. Összefoglaló

A mai diákok már nem ugyanazok az emberek, akiknek tanítására az oktatási rendszerünket terveztük. A jelen és a jövő a digitalizáció, hallgatóink már ebben élnek, és ezzel fognak a munka világában is úton-útfélen találkozni. Ehhez az oktatásnak feltétlenül alkalmazkodnia kell. Míg a régebbi generációk egyetemistái az információk nagy részéhez passzívan jutottak hozzá (pl. meghallgatták az előadást), a mai modern tanulási környezetben a Z generációs hallgatók számára aktív szerepet kell biztosítanunk. Az oktató már nem a tudás egyedüli forrásaként van jelen, hanem megjelenik egy új szerepe is: segítenie kell a diákokat az interneten található információterengben történő eligazodásban.

A matematika azon tudományterületek közé tartozik, amelyek esetén az IKT eszközök oktatásban történő használatának bevezetése elég nagy kihívás. Mégis megfontoltan, felelősségteljesen, az sem baj, ha csak kisebb lépésekkel haladva, de új oktatási módszereket kell alkalmaznunk. Hátrány lehet, hogy a hallgatók könnyen „széttöredezett információhalmaz” birtokába jutnak (az interneten pl. ugyanaz a tananyag több különféle jelölés-rendszerrel, más felépítéssel, más gondolatmenettel szerepelhet, mint az általunk használt struktúra stb.). Ennek ellenére kellenek olyan feladatok, amelyek során használhatják az okostelefonokat, laptopokat (excel, statisztikai programcsomagok stb.) és akár a mesterséges intelligenciával is megoldhatnak bizonyos problémákat.

Nagyon fontos felismerni, hogy amellet, hogy bevonjuk az IKT eszközöket a tanulási folyamatba, szükség van egy bizonyos matematikai eszköztárra, amelyet feltétlenül el kell sajátítani, és „fejből kell tudni”. Hasonlóan ahhoz, ahogy kisgyermekként előbb meg kell tanulni a természetes számok egy szűk intervallumában fejben összeadni és kivonni, és csak utána szabad számológépet használni. Aki nem járatos a matematika bizonyos területein, az nem lesz képes a mesterséges intelligencia segítségével sem megoldást találni a felmerülő kérdésekre. A matematikaoktatás feladata elsősorban nem kész feladatmegoldások betanítása kritikai képességgel nem rendelkező felhasználók számára, hanem a gondolkodásra nevelés, és a logikai készségek fejlesztése. A pusztá tényeket, adatokat ma már az internetről könnyedén ki lehet keresni. A mesterséges intelligencia felhasználói szintű ismeretével rengeteg matematikai műveletet el lehet végezni. Be kell látni azonban, hogy egy probléma megoldása során csak akkor merülnek fel célravezető kérdések, ha az eljárások jelentésével, lépéseivel, a különböző módszerek közötti kapcsolatokkal a felhasználó tisztában van. Ezt a képességet leginkább úgy lehet megszerezni, ha a legegyszerűbb feladattípusokat „fejből és kézzel leírva” begyakorolják a diákok. A kérdés csupán az, hogy hol van az a határ a tananyagban, amit még meg kell tanítanunk, és mi az, amire már nincs szükség, mert a mesterséges intelligencia segítségével is megoldható.

Irodalomjegyzék

- [1] **Árváné Ványai G., Katonáné Kovács J., Popovics P., Gál T.:** A Z generáció felsőoktatással kapcsolatos motivációinak és elvárásainak vizsgálata (Examination of Z Generation's Motivation and Expectations on Higher Education) International Journal of Engineering and Management Sciences, 2. évf. 2017/4., 1–13. doi: [10.21791/IJEMS.2017.4.1](https://doi.org/10.21791/IJEMS.2017.4.1)
- [2] **Carr Nicholas:** Hogyan változtatja meg agyunkat az internet? – A sekélyesek kora. HVG Könyvek. Budapest, 2014.
- [3] **Deterding, O'Hara, Sicart, Dixon, Nacke:** Gamification: Using Game Design Elements in Non-Gaming Contexts (2011). URL https://www.researchgate.net/publication/221518895_Gamification_Using_game_design_elements_in_non-gaming_contexts
- [4] **Gál T., Árváné Ványi G.:** Hogyan tanul a Z generáció? Gradus Vol 5., No (2018) 66-73.

- URL https://gradus.kefo.hu/archive/2018-1/2018_1_ART_004_Gal.pdf
- [5] **Horváth-Szováti Erika:** A matematikatanítás eredményességét növelő módszerek a felsőoktatásban, Dimenziók Matematikai Közlemények, VI. kötet, 2018, doi:10.20312/dim.2018.09
- [6] **Hülber L., Lévai D., Ollé J.:** Út az új generációs digitális tankönyvek megvalósításához. Könyv és Nevelés, XVII. évfolyam, 2015/1. URL <https://folyoiratok.oh.gov.hu/konyv-es-neveles/ut-az-uj-generacios-digitalis-tankonyvek-megvalositasahoz>
- [7] **Molnár Gy:** A tanulói attitűd alakulása felsőoktatási tapasztalatok tükrében. Felnőttképzés IX. évfolyam, 2011/3. URL <https://repozitorium.omikk.bme.hu/server/api/core/bitstreams/5a3c0a6d-71b2-4d1d-b114-49ae3cb133ae/content>
- [8] **Mosca, J. B., Curtis, K. P., Savoth, P. G.:** New Approaches to Learning for Generation Z. Journal of Business Diversity, 19. évf. 2019/3. URL <https://articlegateway.com/index.php/JBD/article/view/2214/2104>
- [9] **Prensky, M.:** Digital Natives, Digital Immigrants Part 1. On the Horizon, (MCB University Press, Vol. 9 No. 5, October 2001) URL <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf>
- [10] **Tapscott, D.:** Grown Up Digital: How The Net Generation Is Changing Your World? (2009) URL [http://sodium.ge/downloads/komunikacisteoria/eng/Grown_Up_Digital_-_How_the_Net_Generation_Is_Changing_Your_World_\(Don_Tapscott\).pdf](http://sodium.ge/downloads/komunikacisteoria/eng/Grown_Up_Digital_-_How_the_Net_Generation_Is_Changing_Your_World_(Don_Tapscott).pdf)
- [11] Új UNESCO jelentés az oktatás jövőiről. URL <https://unesco.hu/hirek/uj-unesco-jelentes-az-oktatas-jovoirol-107377>

Milyen természettudományos alapokkal érkeznek a Soproni Egyetemre a leendő faipari mérnökök?¹

Lang Ágota Anikó

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
lang.agota@uni-sopron.hu,  0009-0007-6357-8896

ÖSSZEFOGLALÓ. Három éve íratok meg az elsőéves faipari mérnök hallgatókkal egy természettudományos kompetenciatesztet. Írásomban a feladatsor bemutatása után a teszt rész eredményeit elemzem, végül kiemelek néhány szöveges választ is. Mindezekből a középszintű oktatásban elsajátított ismeretekre, vagy annak hiányára és az idő előrehaladtával beállt változásokra lehetséges következtetni.

ABSTRACT. For the past three years, I have been administering a scientific competency test to first-year forestry engineering students. In my writing, I will present the task set, analyze the results of the test section, and highlight a few written responses. From these findings, it is possible to draw conclusions about the knowledge acquired (or its absence) during secondary education and observe changes over time.

1. Bevezetés

Az új tanterv-háló 2022 szeptemberében került bevezetésre a Soproni Egyetemen, amelyben új elemként jelent meg a Természettudományos alapismeretek nevű tárgy. Ez az Alapozó fizika tárgyat váltotta az elsőéves faipari mérnök hallgatók órarendjében, és valóban váltást jelentett: nem csak a téma bővült, hanem a feladatmegoldás helyét a mérés, kísérletezés, és ezek kiértékelése vette át. Miután megkaptam a megtisztelő lehetőséget, hogy ezt a tárgyat taníthassam, arra gondoltam, hogy év elején fel kellene mérni, vajon milyen természettudományos alapokkal bocsátják útjukra a középiskolák a hallgatóinkat. Ez a kérdés a következők miatt is érdekes:

A szakgimnáziumokban a 2016/17-es tanévben került bevezetésre a Komplex természettudomány nevű tantárgy, gyakorlatilag teljesen megalapozatlanul. Nem volt kidolgozott tanterv és tanmenet, így tankönyv se. A tantárgyat fizika, kémia, biológia, földrajz szakos kollégák tanították-tanítják; van iskola, ahol csak egy tanár viszi végig az egész tanévben a tárgyat, van ahol megosztják több tanár között. Ennek oka, hogy a tanárképző egyetemeken a „Z” szak (természettudomány-környezettan szak) csak 2017 után indult – és sajnos pontosan annyira „népszerű”, mint a többi természettudományos tanárszak –, hogy kiszolgálhassa ezt a hirtelen felindulásból jött ötletet.

A gimnáziumokban pedig a NAT2020 hozott változást: 9-10. osztályban felpörgetik az összes természettudományos tárgy óraszámát, és aki nem akarja 11-12. osztályban már egyik ilyen tárgyat sem tanulni, akkor rá a Komplex természettudomány tantárgy vár, de elvileg új módszerekkel (mint például projekt készítés) és aktuális témákkal.

¹ ENGLISH TITLE. What scientific foundations do future forestry engineering students bring to the University of Sopron?

KULCSSZAVAK. Természettudomány, felmérés, kompetencia.

KEYWORDS. Science, survey, competence.

Tekintettel a fentebb említett, elsősorban a szakgimnáziumokban kissé kaotikus körülményekre, kíváncsi voltam, hogy vajon mire számíthatunk? Mit tudott adni a Komplex természettudomány a diákoknak? Mivel az első felmérésre 2022 szeptemberében került sor, ez azt jelenti, hogy az akkor elsőéves, szakgimnáziumból érkezett hallgatók többsége már ezt a tantárgyat tanulta – még akkor is, ha technikusképzésben vett részt. A NAT2020 szerint oktatott gimnazisták első köre pedig 2024 májusában érettségizett, vagyis ilyen hallgató az idei, 2024 szeptemberi teszt megírásában fordulhatott elő. Emiatt kértem, hogy jelöljék meg, milyen iskolatípusban vettek részt a középszintű oktatásban illetve melyik évben érettségiztek.

Az alábbiakban az általam készített felmérés eredményei vannak összefoglalva. Egy korábbi, a Soproni Egyetemre bekerülő elsőéves hallgatók matematika tudásáról készített szintfelmérők kiértékelését [1] mutatja be.

2. A kompetenciateszt összeállítása

Bár lettek volna ötleteim a teszt kérdéseire, de ezeket elraktam egy újabb felmérés-trilógiához, és első alkalommal inkább külső forráshoz fordultam. Így az oktas.hu oldalon kerestem és találtam segítséget. A TIMSS mérések kérdéseiből válogattam össze a felmérést, ügyelve, hogy minden természettudományos terület képviselve legyen benne. Az első alkalommal kinyomtatva kapták meg a kérdéseket a hallgatók, azonban a második alkalomra már elkészítettem a Google űrlapos változatot is. Ennek nagy előnye, hogy sokkal könnyebb a kiértékelés, emiatt a 2022-es felmérés válaszait is felvittem űrlapra.

A kiértékelte kérdések száma 17 (2-18. kérdés), az összpontszám pedig 20 pont volt, ami úgy alakult ki, hogy az utolsó kérdéssel 3 pontot lehetett szerezni, az összes többivel pedig 1 pontot.

Ahogy az 1-5. ábrákon bemutatott tesztkérdésekből látszik, igyekeztem többféle szempont szerint válogatni a kérdéseket. Grafikonelemzésnek (13. kérdés) egy út-idő grafikont választottam, amelyen azt az időtartamot kellett leolvasni, amíg a biciklis állt. Táblázatban elhelyezett adatok (17. kérdés) alapján kellett összefoglalni a műtrágya nitrogéntartalma és a rizs terméshozama közötti kapcsolatot. A 2. kérdés egy fizikai köntösbe öltöztetett arányossági feladat. Az atommodell megfelelő ábráját kellett kiválasztani a 10. kérdésben. A 11. kérdés is összetettebb volt, hiszen végig kellett gondolni anyagoként, hogy az adott tulajdonságok illenek-e rá. A többi kérdésnél az iskolában megszerzett vagy a gyakorlatban megtapasztalt tudásukra, illetve természettudományos törvényekre, valamint a józan eszükre támaszkodhattak a hallgatók. Esetleg a 15. kérdésnél – ami egyébként a legjobb eredménnyel kitöltött feladat volt – akár filmekre is, bár a The Core című már több, mint 20 éves. Az egyszeres választásos tesztkérdések mellett 4 olyan feladat is volt, ahol a hallgatóknak maguknak kellett a választ megfogalmazniuk. Ebből 3 tesztkérdéshez kapcsolódott, és a választás megindoklását kérte. Az 5. feladatban pedig 2 olyan körülményt kellett említeni, amelyekhez az óceánok alján lévő élőlények életét megnehezíti. Itt jegyzem meg, hogy a nyomtatott változatban a 9. kérdéshez is kértem indoklást, ezért tudok majd ott is 1-2 észrevételt tenni.

Az A és a B gép vizet pumpál egy folyóból. A táblázat a gépek által egy óra alatt megmozgatott víz mennyiségét, és az ezalatt elhasznált gázolaj mennyiségét mutatja.

	Egy óra alatt megmozgatott víz (liter)	Egy óra alatt elhasznált gázolaj (liter)
A gép	1000	1,25
B gép	500	0,5

2/a Melyik gép alakítja át hatékonyabban a gázolajban lévő energiát munkává?

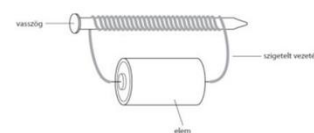
- ☐ A gép
☐ B gép

2/b Válaszát indokolja!



3. A következő jelenségek közül melyekre vonatkozhat az ábrán látható energiaváltozások sorozata?

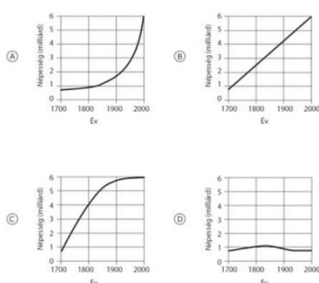
- ☐ Egy lámpa be van kapcsolva
☐ Ég egy gyertya
☐ A benzint elégetve működik egy autó
☐ Az elektromos áram egy hűtőszekrényt működtet
☐ Egyéb: _____



4. Az ábrán egy szigetelt vezetékkel körbetekert vaszöveget látasz. A vezet elemhez van kötve. Mi fog történni a vaszöggel, miközben a vezetékber halad?

- ☐ A szög el fog olvadni
☐ Elektromos áram fog áthaladni a szögön
☐ A szög mágnesessé fog válni
☐ Semmi sem fog történni a szöggel

1. ábra. 2-4. tesztkérdések



6. A fenti grafikonok közül melyik ábrázolja legjobban a világ népességének változását az elmúlt kb 300 évben?

- ☐ A
☐ B
☐ C
☐ D

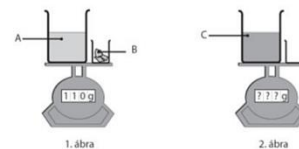
7. Egy tárgynak, pl. egy almának olyan a színe, mint azoknak a fénysugaraknak, amelyek...

- ☐ áthaladnak a tárgyon
☐ elnyelődnek a tárgyban
☐ visszaverődnek a tárgyról
☐ a tárgy körül haladnak

8. Csaba elektródákat helyezett el egy oldatot tartalmazó lombikban, majd az elektródákat egy elemhez csatlakoztatta. Csaba többek között ezt mondta a látottakról: "Az egyik elektródán buborékok keletkeztek." Ez a kijelentés egy

- ☐ megfigyelés
☐ jóslat
☐ következtetés
☐ elmélet
☐ feltevés
☐ Egyéb: _____

A és B anyag együttes tömegét mérlegre mérik az 1. ábrán látható módon. Ezután a B jelű anyagot beteszik a főzőpohárba, ahol C anyag jön létre. Az üres poharat visszatesztük a mérlegre, ahogy a 2. ábrán látható.

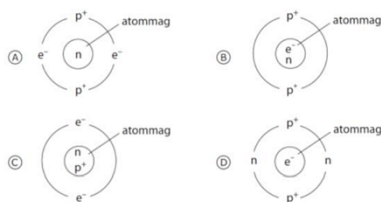


9. A mérleg az 1. ábrán 110 grammot mutat. Mit mutat majd a 2. ábrán?

- ☐ több, mint 110 grammot
☐ pontosan 110 grammot
☐ kevesebb, mint 110 grammot

2. ábra. 6-9. tesztkérdés

Melyik az a modell, amelyik helyesen mutatja a protonok (p^+), elektronok (e^-) és neutronok (n) elhelyezkedését az atomon belül?



A táblázatban különböző anyagok vannak feltüntetve, két csoportra osztva.

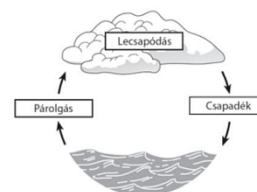
1. csoport	2. csoport
levegő	acél
jég	réz
fá	arany

Melyik alábbi szempont szerint osztottuk az anyagokat az 1. és 2. csoportba?

11. Melyik alábbi szempont szerint osztottuk az anyagokat az 1. és 2. csoportba?

- ☐ Vízben való oldhatóság
☐ Összenyomhatóság
☐ Halmazállapot
☐ Elektromos vezetőképesség

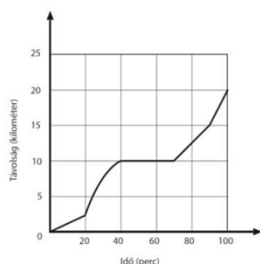
Az alábbi ábra a víz körforgását mutatja a Földön.



12. Mi szolgáltatja a víz körforgásához szükséges energiát?

- ☐ A Hold
☐ A Nap
☐ A szél
☐ Az árapály

3. ábra. 10-12. tesztkérdés



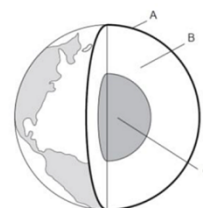
14/a Peti feltett egy lábas vizet a tűzre és melegíteni kezdte. Amint forrásba jött, megmérte a víz hőmérsékletét. A hőmérő 100 °C-ot mutatott. Peti ekkor nagyobb lángra állította a tűzre és még 5 percig forralta a vizet. Ezután megint megmérte a víz hőmérsékletét. Mit mutatott ekkor a hőmérő?

- ☐ 100 °C-nál kevesebbet
☐ 100 °C-ot
☐ 100 °C-nál többet

14/b Fenti választad indokold!

Saját válasz

Az ábrán a Föld három fő rétege látható.



15. Melyik a legmelegebb?

- ☐ A
☐ B
☐ C

13. Ica egy biciklirán defektet kapott. Ezt azonnal megjavította és folytatta az utat. A grafikonon látható, hogyan haladt útja során. Körülbelül mennyi ideig tartott Icának a kerék megjavítása?

- ☐ 20 percig
☐ 30 percig
☐ 40 percig
☐ 70 percig

4. ábra. 13-15. tesztkérdés

Egy földdarabot 10 egyforma parcellára osztottunk. Mindegyik parcellába más-más mennyiségű műtrágyát juttattak. Az összes parcellába rizst ültettek. Az alábbi táblázat a műtrágya mennyiségét és a rizs terméshozamát jelzi az egyes parcellákban.

	Parcella									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A kiszórt műtrágya mennyisége (nitrogénegység/parcella)	0	30	50	60	70	80	100	120	140	160
A rizs terméshozama (kg rizs/parcella)	7,1	8,3	14,2	25,4	26,2	26,2	26,2	26,1	17,6	14,4

16/a A fenti táblázat adatai alapján magyarázd meg, hogy a műtrágya mennyisége miként befolyásolja a rizs terméshozamát!

Saját válasz

17. Az alábbiak közül melyik nem tekinthető megújuló erőforrásnak?

- ☐ petróleum
☐ homok
☐ fa
☐ oxigén

Az alábbi táblázat három vegytiszta anyag (X, Y és Z) néhány tulajdonságát sorolja fel. Az egyik anyag a vas, a másik a víz, a harmadik pedig az oxigén.

Anyag	Olvasás /fagyáspont (°C)	Forráspont (°C)	Jól vezeti-e az elektromos áramot?
X	-218	-183	nem
Y	1535	2750	igen
Z	0	100	nem

16/b Mennyi műtrágyát lenne érdemes használni parcellánként?

18. Azonosítsd a táblázat adatai alapján az anyagokat!

5. ábra. 16-18. tesztkérdés

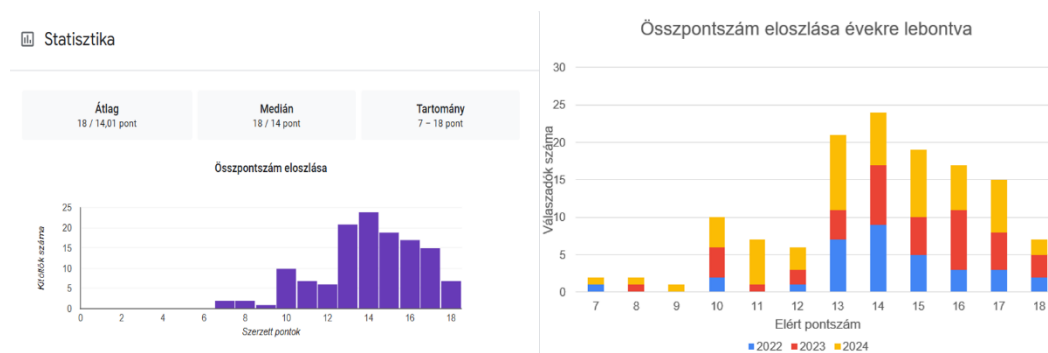
3. A válaszok kiértékelése

Először egy összefoglaló áttekintést adok az eredményekről, majd elemzem a szöveges indoklasként adott válaszokat. Ezek közül néhányat szó szerint idézek, amelyeket dőlt betűvel jelenítek meg. Végül röviden bemutatom a többi tesztkérdés eredményét is.

3.1. Összesítés

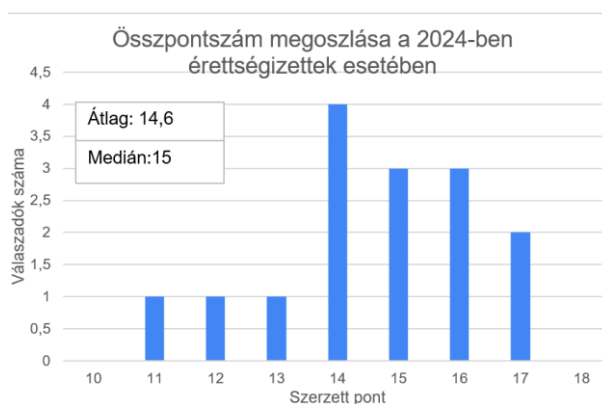
A következő megoszlásban 131 válasz érkezett be: 33 fő 2022-ben, 41 fő 2023-ban és 57 fő 2024-ben töltötte ki a tesztet. Ez egyben azt is jelzi, hogy a szakra jelentkező hallgatók száma növekszik. A Google Űrlapok alkalmazás által készített statisztikát (6. ábra bal oldala: a 3 minta (2022, 2023, 2024) eredményeinek összesítésével kapott adatsor gyakorisági hisztogramja) annyival egészítettem ki a 6. ábra jobb oldalán, hogy évekre lebontva ábrázoltam ugyanezeket

az adatokat. Ez azonban az eltérő éves létszámok miatt megtévesztő lehet az arányokra vonatkozóan, hiszen 2024-ben ugyanannyi legnagyobb pontszámú megoldás született, mint 2022-ben, csak éppen 2024-ben majdnem kétszer annyi volt a tesztet kitöltők száma.



6. ábra. Statisztika

Érdekesség, hogy a medián és az átlag szinte ugyanannyi: 14 pont. A hisztogram alakja hasonlít a normális eloszlásra, bár nem teljes a szimmetria: az elért legnagyobb pontszám csak 4 pontnyira van az átlagtól, míg a minimum 7 pontnyira. A 10 alatti pontszámok azt jelentik, hogy ezek a hallgatók 50% vagy az alatt teljesítettek egy olyan teszten, amit akár egy 8. osztályos tanuló is megír 80-90%-ra. Ilyenkor azzal védekeznek a hallgatók, hogy az említett korosztály emlékezetében még frissen élnek ezek az ismeretek. Csakhogy sajnos a teszt legfeljebb 3-4 olyan kérdést tartalmazott, ami lexikális tudást igényelt. A 10-nél kevesebb pontot elért öt hallgatónak biztosan, de még az átlag alatt teljesítőknek is nehéz dolga lesz a későbbi szemeszterekben például a Mérnöki fizika gyakorlaton. Az itt nyújtott teljesítményük persze nem csak rajtuk múlt, hanem a középiskolán is, ahonnan jöttek. Ahogy a bevezetőben említettem, a szakgimnáziumok többségében nem megoldott a Komplex természettudomány tárgy tanítása. A 17 vagy 18 pontot elérő 22 hallgató közül 6 fő érettségizett szakgimnáziumban és 16 fő gimnáziumban. Utóbbiak olyan nevesebb iskolákból is érkeztek, mint a székesfehérvári Lánosz Kornél Gimnázium; a kecskeméti Katona József Gimnázium vagy a tatabányai Eötvös József Gimnázium, ahol nagy hangsúlyt fektetnek a természettudományos tantárgyakra. Ugyanakkor az egyik emelt szintű fizika érettségivel rendelkező hallgató 13 pontot szerzett – ez az érem másik oldala.



7. ábra. 2024-ben érettségizettek

A 7. ábrán pedig csak a 2024-ben érettségizett hallgatók teljesítménye látható. Összevetve a teljes minta statisztikájával, azt mondhatjuk, hogy ez az évfárat megállta a helyét. A 15 hallgatóból 4 érettségizett szakgimnáziumban és 11 gimnáziumban.

A továbbiakban a szöveges választ is kívánó feladatokat elemzem ki részletesebben.

3.2. Egy kis matematika: melyik gép hatékonyabb?

A második kérdéshez egy táblázatban a gépek által megmozgatott víz mennyiségére és az ahhoz szükséges üzemanyag térfogatára találunk adatokat, amelyek mindkét szempont szerint eltérnek, egyedül az idő – 1 óra – egyezik meg, ezt a szövegből tudhatjuk meg (lásd 1. ábra). Ezekből kiindulva kell összehasonlítani a gépek hatékonyságát aszerint, hogy melyik alakítja át jobb arányban az üzemanyag energiáját munkává. A feladat „tippelős” részén elvárt 10%, akiknek a válaszaiból az derül ki, hogy ők vagy csak a megmozgatott víz mennyiségét vették figyelembe, vagy teljesen összekeveredtek: *mert a B gép 2 óra alatt ugyanannyit fogyaszt, de kevesebbet pumpál* – ami pont fordítva helyes.

A helyes választ adók indoklását 4 csoportba sorolhatjuk:

- nagyvonalú válasz: *Az arányok miatt;*
- tesz összehasonlításokat, de nem tudjuk, mi alapján: *Mert ugyanannyi gázolajjal, mint az A gép, több vizet tud megmozgatni;*
- korrekt, adatokkal alátámasztott összehasonlításokat tesz, aminek alapja, hogy vagy a víz mennyiségét, vagy az üzemanyagot azonos értékre hozza: *B gép 1 liter gázolajból képes 1000 liter vizet megmozgatni, míg az A gépnek ehhez 1,25 liter kell.; Mivel a B gép 1 liter benzinnél 1000 liter vizet tud megmozgatni addig az A gép csak 800 litert;*
- korrekt, adatokkal alátámasztott összehasonlításokat tesz, aminek alapja, hogy vagy a víz mennyiségét, vagy az üzemanyagot azonos értékre hozná, csak elszámolja, mert például 1,25 fele 0,75 lesz.

Egy elgondolkodtató indok a B gép mellett: *Mivel lassabban dolgozik ezáltal kevesebb gázolajat használ a kitermeléshez.* Végül egy érdekes szempont is felmerült az egyik hallgatóban: *mivel a B gép kevesebb gázolajat használ fel, kevesebb a károsanyag kibocsátása ezért hatékonyabbnak gondolom.*

Több válaszadó megjegyezte, hogy a B gép 2 óra alatt tud annyi vizet megmozgatni, mint az A gép, ami az összehasonlításuk alapja volt. Ők precíz válasza törekedtek, de a kérdésben egyébként nem játszott szerepet az idő.

„Nagyvonalú” választ sajnos közel 50%-ban kaptunk, az ezt adó hallgatókat rá kell nevelni arra, hogy ha megvannak hozzá az adatok, akkor korrekten, számolással támasszák alá véleményüket.

3.3. Egy kis fizika: lehet-e a forrásban lévő vizet 100 °C fölé melegíteni?

A 14. kérdésben (lásd 4. ábra) Peti megpróbálkozik ezzel – kérdés, hogy a fizika törvényei engedik-e neki ezt. A hallgatók több, mint ¼-e szerint igen; ők ezek szerint nem ismerik a halmazállapotváltozásra vonatkozó törvényszerűségeket. Ugyanis, ha elérjük egy anyag forráspontját (vagy olvadáspontját), akkor a további hőközlés a halmazállapotváltozásra fordítódik és a hőmérséklet nem emelkedik tovább, amíg az összes anyag halmazállapotot nem váltott. Ily módon a feladatban a hőmérő pontosan 100 °C-ot kell, hogy mutasson, hiába állítjuk magasabb fokozatra a lábos alatt a lángot.

Ami feltűnő a válaszokban, hogy bár a 100 °C-ot 1-2 kivétellel forráspontnak nevezték a válaszokban, de a vízre nem a **forr/elforr** igét használták, hanem a **párolog** kifejezést. Amíg

én mindig szétválasztom a két jelenséget – hiszen a párolgás csak a folyadék felszínén megy végbe, de bármely hőmérsékleten; míg a forrás a folyadék egészében, de csak meghatározott hőmérsékleten – és sosem mondtam azt, hogy forráskor a folyadék belseje is párolog, addig az új, hivatalos 9. osztályos tankönyvekben ez áll.

Nézzük előbb a tévhiteket: *Mivel megnőtt a hő mennyisége a fazék alatt, ezért tovább melegítette a vizet.* Az ehhez hasonló indoklást adókban nem állt össze a kép arról, hogy 100 °C a víz életében egy nevezetes hőmérséklet. A másik csoport ugyan tisztában van vele, hogy: *A víz forráspontja 100 fok, így ennél a hőmérsékletnél kezd el párologni. Ugyanakkor a hőmérséklete lehet magasabb, mint a forráspontja.*

A helyes válaszok közül ez a legszebben megfogalmazott indoklás: *A víz forráspontja 100 fok, és miután ezt elérte, vízgőzzé változik, tehát a hőmérő a még nem elpárolgott, forrásban lévő víz hőmérsékletét mutatta.* Ez a válasz viszont összekever fogalmakat: *100 fokot mutatott, mivel az annál melegebb részecskék elpárolognak a forrás közben* – a részecskék kilépnek a folyadékból, így jön létre a párolgás, mint jelenség.

A precíz válaszadók – mintegy 10 fő – azt is hozzátették, hogy a forráspont 1 atmoszféra nyomáson 100 °C.

3.4. Egy kis biológia: élet az óceán fenekén

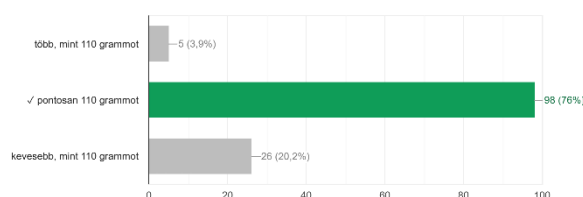
Az 5. feladat az kérte, hogy a hallgatók nevezzenek meg 2 olyan körülményt, amelyet az óceán alján lakó élőlényeknek ki kell bírniuk, alkalmazkodniuk kell hozzá. Én háromra gondoltam: a nagy víznyomás, az alacsony hőmérséklet és a sötétség; de sok válaszban előfordult a lecsökkent oxigénkoncentráció és a táplálék hiánya is, amelyek valóban fennálló nehezítő körülmények. A válaszokban az odavetett 1-1 szó mellett találunk szép kerek mondatokban megfogalmazott álláspontokat, akár egy kis magyarázattal. Azonban nem ebből van több, hanem a pontatlan válaszokból, ahol csak annyit írnak, hogy nyomás, hőmérséklet. Arra azonban nem térnek ki, hogy ezek a fizikai mennyiségek milyen értékekkel rendelkeznek az óceán mélyén, amit már csak speciális élőlények bírnak ki. Ennek oka lehet a tudás hiánya, vagy ismét a nagyvonalúság, amiről viszont le kell szoknia egy leendő mérnöknek.

Néhány egyedi válasz: *extrém időjárás* – talán a hidegre gondolt; *víz alatt nincs levegő; áramlatok; ragadozó élőlények.* A leginkább elgondolkasztató – és sajnos igaz – válasz: *A sok szennyeződés az óceán fenekén rakódhat le.* (Nem tőle kaptuk a 2. kérdésben a károsanyag kibocsátást tartalmazó választ, úgyhogy már 2 olyan hallgató van, aki a környezetre is gondol.)

3.5. Egy kis kémia: mi történik a tömeggel, ha összeöntünk két anyagot?

Erre kíváncsi a 9. kérdés (lásd 2. ábra), ahol a képen egy mérlegen 2 főzőpohárban két különböző halmazállapotú anyag látható. A szilárdat hozzáadva a folyadékhoz, a kapott új anyag tömegét kell megadnunk a komponensekéhez képest: több, kevesebb, vagy marad ugyanannyi.

9. A mérleg az 1. ábrán 110 grammot mutat. Mit mutat majd a 2. ábrán?
98 / 129 helyes válasz



8. ábra. A 9. kérdésre adott válaszok megoszlása a válaszlehetőségek között

Ahogy a 8. ábra mutatja, a hallgatók $\frac{3}{4}$ része gondolta csak, hogy ugyanannyi marad a tömeg, $\frac{1}{5}$ részük szerint csökkenni fog, míg 4% vélekedett úgy, hogy megnő. Mint említettem, 2022-ben ehhez a feladathoz is kértem indoklást, ebből derült ki, hogy a főzőpohár, mint a kémiai (de akár fizikai) kísérletek egyik fontos kelléke, ismeretlen fogalom néhányuknak, így automatikusan arra gondoltak, hogy melegszik is az oldat. Ha így lenne, akkor valóban csökkenhetne a tömeg a párolgás miatt.

A válaszok azt tükrözik néhány esetben, hogy a hallgató nem érti, mit lát a rajzon, illetve mi történik: *az 1. ábrán 2 db súly van, viszont a 2. ábrán csak 1; a másik mérlegen maradt az A anyag; feloldódik a B jelű anyag, ezért elveszíti a súlyát; ugyanakkor az üvegek, mint az első ábrán, de a kis üvegcsének nincs tartalma.*

A helyes válaszok a tömegmegmaradásra hivatkoznak: *kémiai reakció nem jár tömegvesztéssel* vagy erre: *anyag nem vész el, csak átalakul; a B anyagnak csak a halmazállapota változott meg, a tömege nem; a főzőpohárba öntött anyag feloldódott, de attól, hogy nem látható, a súlya nem változott.*

Míg a másik nézet szerint: *a B jelű anyag feloldódott, így annak súlya eltűnt.* Néhányan megpróbáltak új téziseket felállítani: *az A és B anyag mikor reakcióba lép és lesz belőle C anyag, munkát végzett, ami miatt csökkent a súlya.*

De a helyes válaszokhoz is tartoznak meglepő indoklások: *Mert az A anyag ugyanúgy jött létre, ahogy a C.*

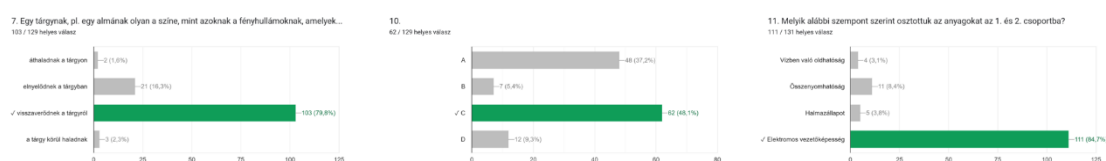
További észrevétel, hogy sok válaszban a tömeg helyett súlyról (sőt „sújról”) beszélnek, ami azt jelenti, hogy még egy csatát meg kell vívni, hogy tisztázzuk a két fizikai mennyiség közötti különbséget, különös tekintettel arra, hogy melyiket mérjük mérleggel.

3.6. Válaszok megoszlása további tesztkérdéseknél



9. ábra. A 3., 4. és 6. tesztkérdésekre adott válaszok megoszlása

Itt említem meg, hogy a 4. kérdésre adták a legkevesebb helyes választ. A kitöltőknek kicsit több, mint egynegyede tudta csak, hogy ha egy szögre szigetelt vezeték tekerünk, akkor az vasmagos tekercsként fog funkcionálni, és ha áramot vezetünk a vezetékbe, akkor fellép az áram mágneses hatása. Elektromos áram akkor tudna áthaladni a szögön, ha nem lenne a vezeték szigetelt. Akik ezt a választ választották, vagy figyelmetlenül olvasták el a feladatot, vagy nincsenek tisztában azzal, hogy a szigetelés pont nem engedi át az áramot. Akik szerint pedig megoldva – nos, az ő fejükkkel nem tudok gondolkodni.



10. ábra. A 7. és 10-11. tesztkérdésekre adott válaszok megoszlása

A 10. feladatban (lásd 3. ábra) a helyes atommodellt kellett kiválasztani rajzok alapján. Végül is nyert a helyes megoldás (48%), de sokan (37%) gondolták azt, hogy a protonok is a mindössze neutronot tartalmazó mag körül röpködnek, az elektronokkal együtt.

4. Tanulságok

Ahogy az összesítésből is láthattuk, a bejövő első éves hallgatók természettudományos előismeretei nagyon eltérőek és sokuknál – közel 50% - erősen hiányosak. Azonban ez a tudás legtöbbjüknel predesztinálja a Mérnöki fizika tárgyból nyújtott teljesítményüket. Azért ezt a tárgyat említem, mert erre van rálátásom, hogy hogyan szerepelnek például vizsgán. Írnokként szoktam bent ülni, és néha helyettük is elsüllyednék, például, amikor olyan kérdésre nem tudnak válaszolni, hogy mi a nehézségi gyorsulás – amit egyébként mérünk is a Természettudományos alapismeretek gyakorlaton. Vannak 2022-ben beiratkozott hallgatók, akik még nem tették le ezt a vizsgát. Ők többnyire az alsó kvartilisban találhatók ezen a teszten elért pontszámuk alapján. Persze szorgalommal és ambícióval lehet a hiányokat pótolni, de nem egyszerű. Azonban a természettudományos kompetenciák fejlesztése kulcsfontosságú ahhoz, hogy a hallgatók felkészültek legyenek a jövő kihívásaira, és képesek legyenek helyes döntéseket hozni tudományos alapokon. Erre törekszünk a Természettudományos alapismeretek tárgy oktatásával, de a nagyon mély hiányosságok megszüntetéséhez az érintett hallgatóknak is több energiát kellene befektetniük.

Irodalomjegyzék

- [1] **Barta Edit:** A szintfelmérő dolgozat mint mérőeszköz: célkitűzések, eredmények és következtetések, Dimenziók Matematikai Közlemények, 11, 2023, doi:10.20312/dim.2023.06

A matematika oktatás változása a Soproni Egyetemen (1. fejezet: 1943-1968)¹

Csanády Viktória

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu,  0009-0004-3461-4892

Horváth-Szováti Erika*

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu,  0009-0000-8351-6069

ÖSSZEFOGLALÓ. A matematika oktatás tananyagában, módszereiben az elmúlt 80 évben hatalmas változások voltak. A körülmények, az oktatás célja, a rendelkezésre álló idő mennyisége állandóan változott. Ezt a folyamatot próbáljuk áttekinteni egyetemünkön a rendelkezésre álló irodalom és egyéb tárgyi emlékek segítségével, természetesen, a teljesség igénye nélkül.

ABSTRACT. There have been huge changes in the curriculum and methods of mathematics education in the last eighty years. The circumstances, the purpose of education, and the amount of time available were constantly changing. We are trying to review this process at our university, with the help of the available literature and other material memories, of course without the need for completeness.

1. Bevezetés

A felsőoktatásban a matematika tananyag és óraszámok nagyon sokat változtak az utóbbi 80 évben. Írásunkban az 1940-es évek első felétől 1968-ig terjedő időszakban zajló matematika oktatást vizsgáljuk, elsősorban az erdőmérnök képzésre koncentrálunk. Tervezzük, hogy a későbbiekben ezt az áttekintést napjainkig, azaz a 2020-as évek közepéig elvégezzük. Tanulmányunk azért is rendkívül időszerű, mert jelenleg a néhány évente bekövetkező szerkezeti átalakulás és egyéb körülmények változása miatt költözés, lomtanulítás, könyvtári selejtezések zajlanak, így fogynak a nem digitalizált jegyzetek, régi kéziratok. Talán az utolsó pillanatot ragadjuk meg az eddigiéket vázlatos összegzésére.

Érdekes látni, hogy milyen jelentős módosulás következett be a tantárgyak tematikájában, óraszámokban, követelményekben. Általánosságban elmondható, hogy a változások egyik oka a felsőoktatásban résztvevők – oktatáspolitikai és egyéb körülmények miatt bekövetkező – számának növekedése. Míg 1960-as években a népességben a diplomások aránya kb. 4% volt (tehát csak a legjobb képességűek kerültek a felsőoktatásba), addig 2021-re majdnem 25%-ra nőtt. Ezek a változások nem csak hazánkra, hanem az EU minden országára igazak. Nyilván nem támaszthatunk ugyanolyan követelményeket jelenleg a népesség kb. 25%-ával szemben, mint amit korábban a 4%-kal szemben állítottunk. A másik ok a generációs változások, illetve

¹ ENGLISH TITLE: Changes in mathematics education at the University of Sopron 1.

KULCSSZAVAK: Matematika a felsőoktatásban, oktatástörténet, Walek Károly, Kiss Ignác.

KEYWORDS: Mathematics in higher education, education history, K. Walek, I. Kiss.

* Levelező szerző (corresponding author).

a technikai fejlődés. Az áttekintett kb. 80 év hosszúságú időintervallumban a hallgatóság a veterán generációtól indulva eljutott a Z generációig. A veterán generáció, a baby boomerek és X-esek még egészen más képességekkel rendelkeztek, mint az Y és Z generáció tagjai. A legnagyobb változás az utóbbi 10–15 évben tapasztalható, amikor a felsőoktatásban megjelentek a Z-sek, vagyis a „digitális bennszülöttek” (Marc Prensky nevéhez köthető elnevezés). Az az elvárás, hogy a diplomás munkavállaló képes legyen az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére, az elmúlt évtizedekben végig aktuális volt, és most is az. Ezt többek között (vagy leginkább?) matematikai tanulmányok segítségével lehet elérni. Tehát a matematika oktatásának jelentősége a XXI. században is változatlan.

A tananyag változási folyamatának áttekintését az 1940-es évekkel kezdjük, felkutattuk a rendelkezésünkre álló régi egyetemi jegyzeteket és egyéb forrásokat. A teljesség igénye nélkül dolgoztunk.

2. A magyarországi felsőoktatás az 1940-50-es években

A Soproni Egyetem (és jogelődjei) az erdőmérnökképzés anyaintézménye. A Selmechányán III. Károly által 1735-ben alapított Bergschule (Bányatisztképző Iskola) 1762-ben, Mária Terézia uralkodása alatt akadémiai rangot kapott. Ez volt az első állami alapítású oktatási intézmény hazánk területén. Elsőként 1763-ban az Ásványtani, Kémiai, Kohászattani Tanszék alakult meg, majd 1765-ben jött létre a második professzúra, a matematika, fizika, mechanika-gépészet oktatására, tehát a matematika oktatás gyökerei Selmechányán egészen 1765-ig nyúlnak vissza. Az erdészeti oktatás itt 1808-ban kezdődött, amikor Heinrich David Wilckens vezetésével erdészeti tanintézet létesült. Ezt 1846-ban egyesítették a Bányászati Akadémiával, így az intézmény neve 1846-tól 1904-ig M. kir. Bányászati és Erdészeti Akadémia (K. K. Berg-und Forstakademie), majd 1904-től M. kir. Bányászati és Erdészeti Főiskola lett. Mivel 1919-ben Selmechánya a megalakuló Csehszlovákiához került, a főiskola teljes felszerelésével, személyzetével és hallgatóságával Sopronba költözött. Az áttelepülés után 1922-ben az intézmény neve Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskolára változott [8,9].

A főiskola 1934-ben elvesztette önállóságát, és 1949-ig M. kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Bánya-, Kohó- és Erdőmérnöki Kara néven működött. Ezt követően 1949-ben a Bányamérnöki Kart a Miskolcon újonnan alakult Nehézipari Műszaki Egyetemhez csatolták. Ezután a Sopronban maradt két kar rövid ideig a Budapesti Műszaki Egyetem Erdő- és Földmérőmérnöki Karaként működött tovább (1949-1950), majd a Magyar Agrártudományi Egyetem Erdőmérnöki Kara lett (1950-1952) [8,9].

1952-ben alakult meg Sopronban az önálló Erdőmérnöki Főiskola (1952-1962). Az Erdőmérnöki Karon belül 1957-ben elindult a faipari mérnökök képzése, majd az önálló Faipari Mérnöki Kar létrehozásával 1962-ben megalakult az Erdészeti és Faipari Egyetem [8,9].

Az 1950-es években a politikai változásokkal párhuzamosan a felsőoktatás intézményi rendszere is átalakult. A tervgazdálkodásnak megfelelően meghatározták a főiskolai és egyetemi keretszámokat. Az 1950-1954 közötti ötéves terv szerint a hallgatók létszámát 23 620 főről fokozatosan 56 600-ra kellett emelni (az esti képzéssel együtt). Megkötés volt az is, hogy a hallgatóság 70 százalékának munkás- és parasztszármazásúnak kellett lennie, illetve a nők arányát is előre meghatározták [1]. Ennek teljesítése érdekében a felsőoktatási intézményeknek a felvételtkor nagyon erős engedményekre kellett belemenniük. A bukott, illetve elégséges eredményt elért tanulók kivételével szinte mindenkit fel kellett venni, még akkor is, ha nyilvánvaló volt, hogy a gyenge képességű, vagy nem eléggé szorgalmas hallgatók le fognak morzsolódní. Az egyéves, majd később kétéves szakérettségis tanfolyamok az 1948/49-es tanévtől indultak el és 1955-ben szűntek meg. Ezalatt kb. 20 000 tanuló végzett ilyen keretek között, és egy bizonyos részük bekerült a felsőoktatásba. Ennek a történelmi háttérnek az

ismeretében még inkább meglepett bennünket a korszak erdőmérnök képzésének tananyaga. A mai erdőmérnök hallgatók ilyen nehézségű tananyaggal már nem tudnának megbirkózni.

Ennek az időszaknak az áttekintésében segítségünkre volt a néhai Dr. Csanády Etele egyetemi adjunktus munkásságát összefoglaló kötet [3], illetve az általa hallgató korában, 1949-ben kézzel írt órajegyzetei is.

3. Walek Károly és Kiss Ignác intézetigazgatósága (1949-től 1968-ig terjedő időszak)

Az 1950-es évek elején írt jegyzetek Walek Károly és Kiss Ignác nevéhez fűződnek (az ő előadásai alapján, vagy általuk készültek). Dr. Walek Károly (1878-1952) pécsi bányászcsaládból származott, majd a selmecbányai akadémián szerzett bányamérnök diplomát. Az akadémia matematika tanszékén a ranglétra szokásos lépcsőfokain haladva 1911-ben kapott egyetemi tanári kinevezést. Az ehhez szükséges posztgraduális tanulmányait a müncheni egyetemen végezte, ahol 1907-ben a matematikai tudományok doktorává avatták. Az első világháborút követően a főiskolával együtt Sopronba költözött [2,8]. Kiss Ignác (1900-1969) a soproni főiskolán, kohómérnöki szakon szerzett oklevelet 1924-ben. Tanulmányait Berlinben folytatta, ahol alkalmazott matematikát hallgatott, többek között A. Einstein és M. Planck előadásain is részt vehetett. Ezt követően 1927-től a soproni főiskola matematikai tanszékén dolgozott. Szakmai pályafutása csúcán 1954-től tanszékvezető egyetemi docens, majd 1962-től az 1968-ban bekövetkező nyugdíjazásáig tanszékvezető egyetemi tanár volt [2,8].

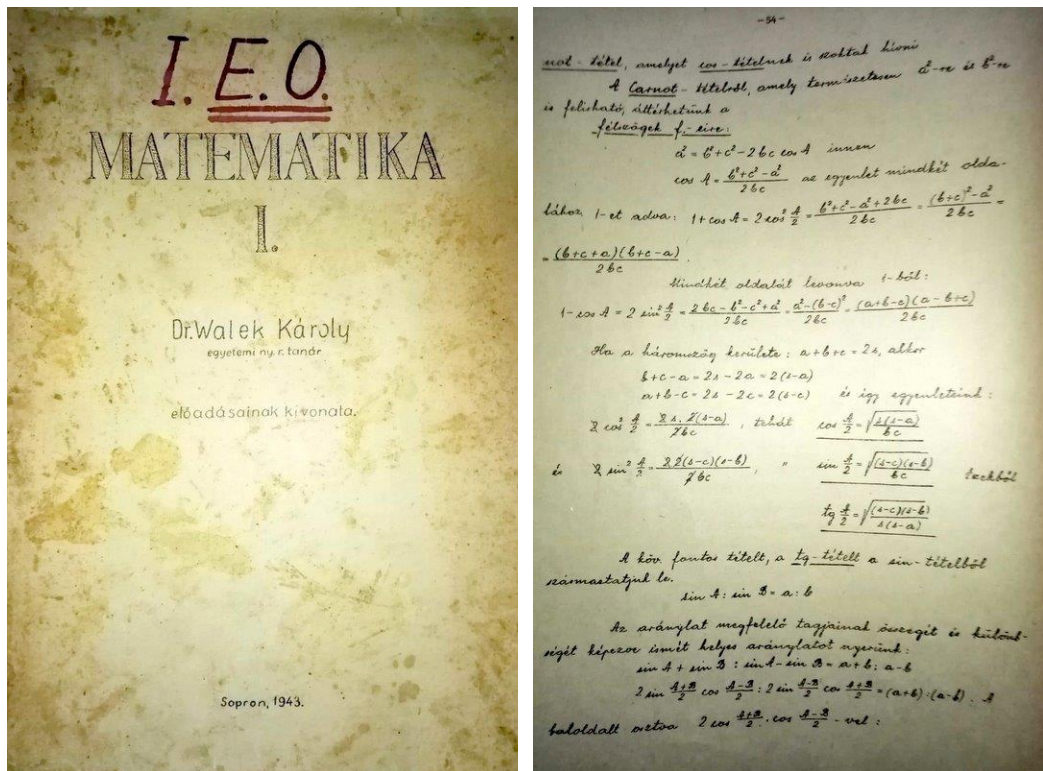
Időrendben a rendelkezésünkre álló első forrás a Walek Károly által 1943-ban írt Matematika I. kézirat [4] (1. kép). A birtokunkban lévő, 1949-ből származó, kézzel írt hallgatói órai jegyzet (2. kép) – Dr. Csanády Etele hagyatéka – azt igazolja, hogy a Walek-kéziratban szereplő teljes tananyag leadásra került. Igaz ugyan, hogy az utolsó témakör számonkérése a következő szemeszterre csúszott át. Mielőtt részletesen tárgyalnánk a két szemeszter tematikáját, mindenképpen említést kell tennünk az óraszámokról. Az 1950/51-es tanévben mindkét félévben a heti óraszám 6 előadás és 4 gyakorlat volt, emellett a hiányosságokkal küzdő, esetleg hátrányos helyzetből induló hallgatók számára lehetőség volt a Matematikai Klub (heti két óra konzultáció) látogatására, ami a felzárkózást segítette. Ez az óraszám az évek során kicsit változott, pl. az 1956/57-es tanévben mindkét félévben heti 4 óra előadás és heti 4 óra gyakorlat volt [8].

3.1. A Matematika I. tananyag témakörei

A Matematika I. tananyagot a [4] irodalom alapján dolgoztuk fel. A magas óraszámok lehetőséget biztosítottak arra, hogy az *első fejezetben* ne csak rögtön új témaköröket lássanak a hallgatók, hanem ismételve alapozzák meg a szükséges tudást. Az algebrai műveletek áttekintése és a számfogalom fejlődése témakörben szó esik az alapvető hatványozási, gyökvonási és logaritmikus azonosságokról, de az akkori világ technikai szegénysége miatt még az írásban történő gyökvonásról is. Újdonságként szerepel továbbá a Newton-féle binomiális képlet, amit negatív egész számú kitevővel is alkalmaztak, a későbbiekben kiterjesztve pozitív törtkitevő esetére is.

A *második fejezet* témakörei a trigonometria, a síkvektorok és a komplex számok. A trigonometriában áttekinti a szükséges legfontosabb összefüggéseket, külön foglalkozik a tiszta szám esetével. Gyakorlati feladatokkal világít meg bizonyos alapfogalmakat (lejtés, emelkedés vetület), majd kibővíti általános háromszög estére eljut egészen a tangens-tételig. Áttekinti a trigonometrikus függvények főbb jellemzőit. Mivel nagyon sok gyakorlati feladat az $\text{Asin } x + B\cos x = C$ trigonometrikus egyenlet megoldásával végződik, erre külön frappáns megoldást

kínál. Külön foglalkozik a Pothenot-féle feladattal (hátra metszés), mivel a geodéziában ez a hallgatók számára fontos ismeret. Ezt követően áttér a síkvektorokra, ahol tárgyalja a legfontosabb vektorműveleteket, majd a komplex számokra, ahol természetesen a trigonometrikus alak dominál.



1-2. kép. Dr. Walek Károly: Matematika I. (Kézirat) [4]

A harmadik fejezet témája az egyenletek. Először egy egyismeretlenes lineáris egyenlet kerül bemutatása, melyet rögtön a két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása követ. Tárgyalja a Cramer-szabályt, ehhez természetesen bevezeti a determináns és mátrix fogalmát, mátrix rangját, és vizsgálja a mátrix rangokat a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeként. Háromnál több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerekkel nem foglalkozik, nyilván azért, mert a determinánsok kiszámítása ezekben az esetekben már időigényes feladat (kivéve azokat a speciális eseteket, amikor „ideálisak” az együtthatók). Ugyanitt tárgyalja még a „négyzetes egyenletet”, valamint a harmadfokú egyenletet Cardano-formulával.

A negyedik fejezet analitikai síkmértan, ami tartalmazza az ezelőtt 15 éve középiskolában még oktatott koordináta geometriát, kiegészítve számtalan, a gyakorlatban jól használható képlet bemutatásával (pl. sokszög területének számítása koordinátákból, három pont egy egyenesre esésének feltétele stb.). Ezt követően külön kiemeli a koordinátatranszformációt. Részletesen tárgyalja az egyenes egyenletének különböző alakjait, majd szerepelnek a tananyagban a másodrendű görbék (kör, ellipszis, hiperbola, parabola, egyenes-pár) többféle koordinátás alakban alkalmazva, és transzformálva. Külön gyakorlati példaként kitér az interpolációra 3 ponton átmenő parabola esetén, valamint 4 ponton átmenő harmadrendű parabola esetén. Bemutatásra kerül a Newton-féle interpoláció, valamint a Lagrange-féle képlet.

Az ötödik fejezet a függvényekkel foglalkozik. Érdemes talán felsorolni őket (itt jegyezzük meg, hogy az elnevezéseket a jegyzethez hűen használjuk).

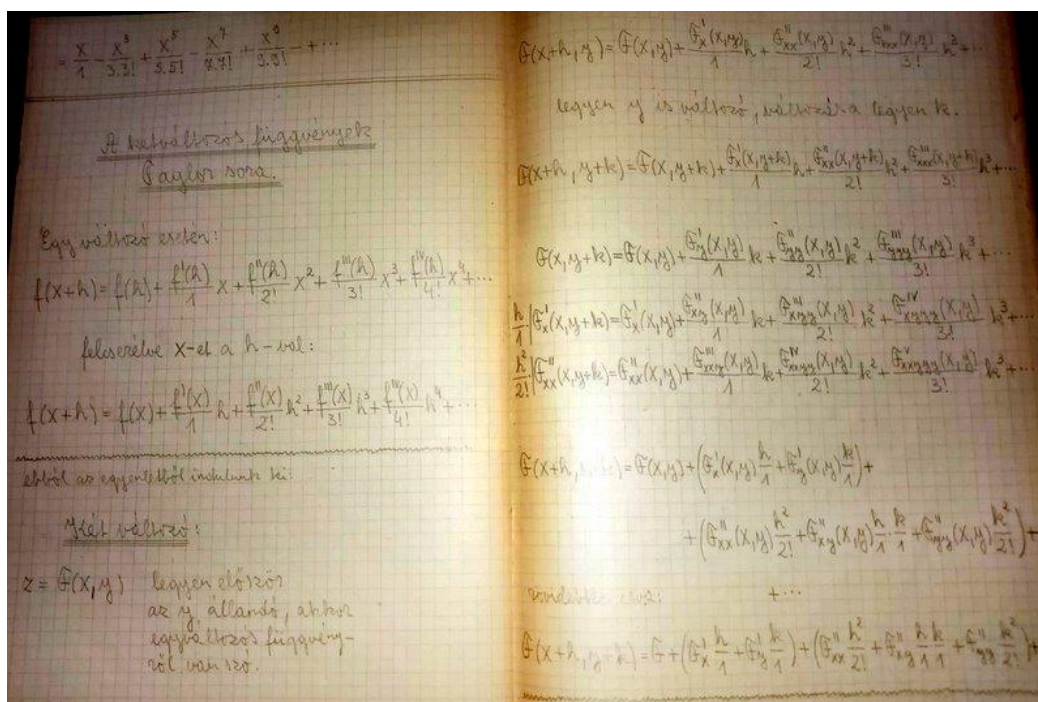
Algebrai függvények:

- racionális egész (polinom függvény),
- racionális tört,
- irracionális algebrai függvények.

Transzcendens függvények:

- exponenciális,
- hiperbolikus,
- logaritmus,
- területmérő vagy area,
- trigonometrikus,
- körmérő vagy arkusz.

Ez a fejezet részletesen foglalkozik a függvények tulajdonságaival és a határérték fogalmával is. Az elemi függvényeket részletezi, az exponenciális függvény esetén kitér a kamatos kamat számítására, valamint a járadékszámításra. Bevezeti az e-szám fogalmát és külön hangsúlyt fektet a hiperbolikus függvényekre és inverzeikre, valamint a trigonometrikus és körmérő függvényekre.



3. kép. Csanády Etele első éves erdőiparimérnök hallgató jegyzete

A hatodik fejezet a differenciálszámítás. A differenciálhányados formulájának felhasználásával számos fent említett függvény esetén levezeti a derivált függvényt. Ezután a deriválási szabályokkal foglalkozik, az összetett függvények és inverz függvény deriváltja, a paraméteres függvény deriváltja, az implicit függvény deriváltja, valamint a logaritmus differenciálás kerül terítékre. A magasabb rendű deriváltakat és a teljes differenciál fogalmát is bevezeti és magyarázza. A differenciálszámítás alkalmazásaként kúpszeletek érintőivel kapcsolatos feladatokat tárgyal, de a részletektől eltekintve például meghatározza a ciklois egyenletét, illetve annak egy adott pontjába húzható érintőnek az egyenletét is. Ezt követően függvényvizsgálat, majd szöveges szélsőérték feladatok szerepelnek a fejezetben. Ezután jön a Rolle -tétel, majd a határérték számítás, és a Bernoulli-l'Hospital-szabály. A fejezet utolsó témája a paraméteres alakban megadott függvények érintőinek megadása.

A *hetedik fejezet* az integrálszámítás. Ezt az anyagrészt valószínűleg később, a tananyag újra tervezésekor már a Matematika II. tárgyhoz sorolták, mivel a rendelkezésünkre álló 1954-ből származó Matematika II. jegyzet első fejezete ugyanez.

3.2. A Matematika II. tananyag fejezetei

A Matematika II. tananyagot az [5] jegyzet alapján dolgoztuk fel.

Első fejezet: A határozatlan integrál. Ez a témakör magába foglal többféle helyettesítéssel (lineáris, trigonometrikus, hiperbolikus), parciális integrálást, parciális törtekre bontást. Tananyag volt a trigonometrikus függvények hatványainak integrálása, illetve trigonometrikus azonosságok használatával megoldható feladatok.

Második fejezet: A határozott integrál. Részletes elméleti bevezetés (az alsó és felső területösszegek határértéke) után a határozott integrál tulajdonságai (levezetésekkel alátámasztva), és alkalmazásai következnek. Az első alkalmazás a területszámítás, ahol ellipszis, ciklois területét, és szektor alakú területek kiszámítását is tartalmazza. A görbe alatti terület meghatározására háromféle numerikus (közelítő) integrálási módszer is van a jegyzetben: érintőmódszer, húrmódszer (vagyis kétféle trapézsabály, a jegyzet trapéz-képletnek nevezi őket) és a Simpson-szabály. A határozott integrál következő alkalmazása a térfogatszámítás (a jegyzetben „forgástestek köbtartalma” elnevezéssel). Itt a manapság szokásos alkalmazásokon túl egészen meglepő - az erdőszetben fatérfogat számítás szempontjából hasznos - eseteket is tárgyal a jegyzet: parabolikus kúp, neiloid, prizmaidok, tórusz. További alkalmazás az ívhossz (megemlítenéd pl. a ciklois ívhossza), illetve a forgástestek felszínének kiszámítása. Ez utóbbi természetesen bizonyítással, azaz csonkakúp palástterületek összegének határértékére visszavezetve. Összességében elmondható, hogy az integrálás témakör jóval részletesebb, mint manapság, és sokkal nagyobb hangsúlyt fektet a bizonyításokra, mint napjainkban.

Harmadik fejezet: Analitikus térmértan. Az analitikus geometria alapjaitól indul a fejezet, továbbá térbeli vektorok és azokkal kapcsolatos műveletek, „a térbeli pontok összerendezői” (azaz a térbeli polárkoordináták), sík egyenlete, pont és sík távolsága, koordináták transzformációi (paralel eltolás, tengelyrendszer elforgatása), egyenes egyenletei többféle alakban, az iránykoszinuszok és iránytangensek közötti összefüggések vannak a jegyzetben. Ezeket követik a másodrendű felületek egyenletei: gömb, ellipszoidok, hiperboloidok (egypalástú és kétpalástú), paraboloidok (elliptikus és hiperbolikus), hengerek (körhenger, elliptikus, hiperbolikus és parabolikus).

Negyedik fejezet: A két és több változós függvények differenciálása. Ez az anyagrész a parciális deriválás (kétfváltozós függvények esetén részletes geometriai magyarázattal), illetve teljes differenciál bevezetésével kezdődik. Ezt követően a hibaszámítás (abszolút hiba, relatív hiba), Euler tétele a homogén függvényekről, magasabb rendű parciális deriváltak következnek és a „fejtetlen implicit függvények differenciálása” (ma már kicsit furcsán hangzik a „fejtetlen” jelző) zárja a fejezetet.

Ötödik fejezet: A végtelen sorok, a függvények sorba fejtése, a MacLaurin és Taylor-féle sor. Itt található a végtelen sor definíciója, a geometriai sor, annak konvergenciája, illetve a végtelen sorok konvergenciája (konvergencia-kritérium, abszolút konvergencia). A további témák a hatványsorok, konvergenciájuk, a MacLaurin-sor fogalma, és néhány nevezetes függvény MacLaurin-sora. Ezután következik az e^x , $\sin x$ és $\cos x$ függvények MacLaurin-sorának felhasználásával a komplex számokra vonatkozó Euler-féle képlet bevezetése, majd a komplex számok exponenciális alakja. A tananyag része a logaritmus fogalmának kiterjesztése a komplex számok halmazára, a hiperbolikus függvények és a $\tanh$ függvény végtelen sora. A Taylor-sor és alkalmazásai téma is nagyon részletes. Bemutatásra kerül az egyenletek közelítő megoldása, a Newton-féle képlet, a „maximum és minimum-számítás szabályának általánosítása” (azaz a lokális szélsőérték számítás) bizonyítással olyan esetekre, ahol a

magasabb rendű derivált értékei eltűnnek az n -edik deriváltig. Ezt követően a ciklometrikus és area függvények sorbafejtése (az $\arctg x$ és $\arct h x$, valamint az $\arcsin x$ és $\operatorname{arsh} x$ végtelen sora) van a jegyzetben, majd a sorbafejtéssel történő integrálást tárgyalja (zárt alakban, elemi függvényekkel nem kifejezhető integrálok esetén). Ez utóbbira példa a „Gauss-féle valószínűségi integrál”, azaz az $\int_0^x e^{-x^2} dx$ integrál kiszámítása sorbafejtéssel. A fejezetet a két- és többváltozós függvények Taylor-sora zárja.

Hatodik fejezet: A kétváltozós függvények viszonylagos maximuma és minimuma. A „viszonylagos” jelentése helyi, azaz lokális. Tárgyalja a szükséges és elegendő feltételt, az utóbbi elméletének részletes bizonyítása is olvasható a kétváltozós függvények Taylor-sorának képletével. Ezután következik a feltételes maximum és minimum (az eljárás lépéseinek részletes bizonyításával), majd a legkisebb négyzetek elve. A normálegyenletek levezetése kétféle módon is szerepel a jegyzetben: a kétváltozós függvények szélsőértékének, valamint a feltételes szélsőértéknek a felhasználásával.

Hetedik fejezet: A differenciálszámítás alkalmazása a síkmértanra. A fejezet a síkgörbék különböző megadási módjaival kezdődik (explicit, implicit vagy paraméteres alak). Ezt követi az érintő egyenletének megadása mindhárom esetre, valamint foglalkozik az esetlegesen előforduló szinguláris pontokkal (kettős pont, csúcspont, izolált pont) is, bemutatva ezeket konkrét példákkal. Szerepelnek benne az aszimptoták kétféle esetben: az aszimptota párhuzamos valamelyik koordináta tengellyel, vagy ferde helyzetű. Mindegyikre példákat olvashatunk mind explicit, mind implicit alakban megadott görbe egyenletekkel. Tárgyalja a görbe vonal normálisát és az érintési paramétereket, a burkoló görbéket. A görbe vonalak görbülete (a kör görbülete) és a görbületi kör is szerepel a jegyzetben. Az ívelem kifejezése „sarkkoordinátákkal” (mai szóhasználat: r és φ polárkoordinátákkal) is a tananyag része.

Nyolcadik fejezet: Differenciál-egyenletek. Ez az anyagrész a definícióval, majd a rendszám és fokszám szerinti csoportosítással kezdődik. Ezt követi a differenciálegyenlet-rendszer fogalma, majd a közönséges differenciálegyenletek témaköre. A megközelítés geometriai irányból történik, amely szerint a differenciálegyenlet megoldása az a görbe, melynek érintői a differenciálegyenlet által adottak. Ezt szerkesztéssel be is bizonyítja. Használja a változók szétválasztásának módszerét, az általános és partikuláris megoldás fogalmát. A differenciálegyenletek alkalmazásaként az ortogonális trajektóriák differenciálegyenletét, illetve annak megoldását tárgyalja. A másodrendű differenciálegyenletek közül az $y'' = a$, $y'' = f(x)$, $y'' = f(y')$ és $y'' = f(y)$ típusok találhatók a jegyzetben. A negyedik esetre példa a $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha^2 y$ differenciálegyenlet, ami a rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ennek megoldásával zárul a fejezet.

Kilencedik fejezet: Gömbháromszögtan. Ez a téma alapfogalmakkal (főkör, gömbháromszög, triéder, lapszögek stb.) kezdődik, majd ezeket követik a gömbháromszögtan tételei (oldalak és szögek közötti összefüggések), Mollweide Delambre egyenletei, Neper (Napier) -féle analógiák, a gömbháromszög területe, L'Huilier-féle képlet. Szó van a fejezetben továbbá speciális derékszögű gömbháromszögekről is.

Tizedik fejezet: A valószínűségszámítás elemei. Bevezetésre kerül a valószínűség fogalma, és a következő csoportosítás: „aritmetikai vagy szaggatott” valószínűség, „geometriai vagy folytonos” valószínűség (mai elnevezéssel: diszkrét vagy folytonos). A tananyagban szerepel a valószínűségek összeadástétele, szorzástétele, és az összetett valószínűség. Tárgyalja a Bernoulli-féle eloszlást és normális eloszlást, valamint a számtani középérték, négyzetes középérték, a középértéktől való átlagos (lineáris) és négyzetes eltérés (szórásnégyzet) fogalmát is. A számtani középértékek eltérése, más néven négyzetes hibája ($\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$) is említésre kerül. Szól továbbá a normális eloszlás „függvényéről” is, ami alatt a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét érti. Ennek a függvénynek a legfontosabb tulajdonságait bizonyítja (maximumhely és inflexió pontok helye, görbe alatti terület), majd a szórás definíciójából

kiindulva levezeti, hogy a normális eloszlás szórása éppen az inflexiós pontok origótól vett távolsága. A jegyzet utolsó oldalán utalás van a valószínűség és a sűrűségfüggvény görbe alatti terület kapcsolatára. További részletezés nélkül közli, hogy az integrál az integrálandó függvény végtelen sorba fejtésével oldható meg, és az integrál értékeket táblázatba foglalták (a táblázatot nem közli és nem használja további feladatok megoldásában sem).

3.3. Kisebb változások az 1968-ig terjedő időszakban

A Roxer Egon egyetemi adjunktus által 1954-ben Dr. Walek Károly egyetemi tanár és Kiss Ignác egyetemi docens előadásai alapján összeállított Matematika II. jegyzet [6] mutat egy-két változást. A differenciálszámítás és a differenciálhányados geometriai alkalmazása témakörök a Matematika I. tananyagból a Matematika II. tananyagba kerültek át. A differenciálszámítás alkalmazása a síkmértanra című fejezet szűkült, és megjelent benne a csavarvonal egyenlete, illetve érintői. Eltűnt az analitikus térmértan és a gömbháromszögtanról szóló anyagrész. A differenciálegyenletek témaköre bővült az elsőrendű lineáris differenciáleggyellett és megoldási módszereivel valamint az állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet homogén esetével, ami a csillapított rezgőmozgás differenciálegyenlete.

Az 1960/61. tanévben egy országos felsőoktatási reform zajlott, amely célul tűzte ki a tananyagok felülvizsgálatát, korszerűsítését, és jobban felkészített diplomás mérnökök képzését [8]. A levéltár gyűjteményében megtalálhatók a tanszékek programvitájáról szóló jegyzőkönyvek, a Matematika Tanszék vitája 1961. március 8-án zajlott [9]. Itt olvasható, hogy Kiss Ignác szerint a tananyag jelentősen nem redukálható, kb. 10%-os csökkentést tart elképzelhetőnek (4.a kép). A többiek hozzászólásaira válaszul Roxer Egon elmondta, hogy a tanszék a matematikai statisztika oktatására már elkezdett felkészülni, és amint igény lesz rá, tudják tanítani. Hangsúlyozta, hogy ez csak külön órakeret terhére valósítható meg (4.c kép). A felsőoktatási reform során a tanszékek elképzeléseiből, javaslataiból alig valósult meg valami, alapvető változtatásra ténylegesen nem került sor. Az egyetem valamennyi tantárgyát és tanszékét figyelembe véve az oktatási reformban csak a Matematika III. c. tárgy (Matematikai statisztika) 3. félévben történő bevezetése új elem. Ennek a tárgynak az előadója Dr. Roxer Egon lett, erre vonatkozólag egy általa 1969-ben írt és az egyetem által 1970-ben kiadott jegyzetet találtunk. Feltételezzük, hogy az 1962 őszén induló Matematika III. tárgy tematikája nagyjából azonos ennek az anyagával. Első részének címe *Matematikai statisztika*, a másodiké *A lineáris programozás*.

Az I. rész a valószínűségszámítás és statisztika általunk jelenleg tanított témaköreit öleli fel, sőt néhol meg is haladja azt (pontbecslés, intervallumbecslés, döntésmélet, nemparaméteres próbák, egyszerű és kettős varianciaanalízis). A regressziószámítás témaköre bővebb a mai tananyagnál (lineáris függvény illesztése, logaritmizálással „lineárisra visszavezethető görbevonallú kapcsolat”, másodfokú parabola illesztése, hiperbola illesztése). Az illesztett függvény megbízhatóságát r -próbával vizsgálja. A jegyzet tárgyalja továbbá a trendszámítást lineáris, exponenciális és parabolikus trendfüggvények esetén. Mivel számológép, illetve számítógépes programcsomagok ekkor még nem álltak rendelkezésre, így egy-egy feladat megoldása hosszadalmas számítások, táblázatokba foglalt lépések sorozata.

A II. részben szerepelnek a lineáris algebra egyes fejezetei (lineáris függőség-függetlenség fogalma, elemi bázistranszformáció, mátrixok, determinánsok), illetve a lineáris programozás témakörének egyes részei (grafikus módszer, szimplex módszer).

Feltételezhető, hogy a matematika tananyag 1968-ig nem módosult számottevően. Ezt követően egy újabb fejezet kezdődött egyetemünk matematika oktatásának történetében, amikor Moór Artúr professzor vette át a Matematika Tanszék vezetését (1968-1985).

J e g y z ő k ö n y v

felvéve 1961 év március hó 8-án az Erdőmérnöki Főiskola Pártirodájának tárgyaló szobájában.

Tárgy: Az Erdőmérnöki Főiskola Matematikai tanszékének programváltása.

A vita vezetője Kiss Ignác tanszékvezető egyetemi docens megnyitó szavaival üdvözlöi a megjelenteket, majd röviden vázolja a matematikai oktatás célját és az előadás, valamint a gyakorlatok részére biztosított órakeretet. Továbbá tájékoztatást ad a tanszék előadási módjáról egyben közli, hogy az eltelt 10-15 év alatt a szaktanszékek részéről sok új követelménnyel léptek fel a matematika újabb területeinek ismertetésére vonatkozóan. A tananyag reformja során a régi anyagnak mintegy 10 %-át el lehetett hagyni. Az óraszám viszont a háboru

Csanádi: /Kémia/ A hallgatók csakugyan gyakran figyelmetlenek, ami néha a könnyelműség határát surolja.

A Kémia tanszék a pH érték megállapításánál a $-lg x = a$ kifejezést használja, amelyet x szerint kell megoldani. Ezt a hallgatók nehezen értik meg. Kérjük a Matematika tanszéket, hogy ebben megfelelően segítségünkre legyen.

Roxer: A jelenlegi órakeret nem elegendő az anyag mennyiségének a fentiek szerinti kívánalmaknak megfelelő bővítésére. Ettől függetlenül azonban tanszékünk már foglalkozik a valószínűségszámítás és matematikai statisztikának a mi viszonyainknak megfelelő feldolgozásával.

Kiss: A logarléc kezelés elméleti és gyakorlati oktatását már évek óta megvalósítottuk. A logarléccel való számítás rutinjának megszerzéséhez azonban idő tekintetében kevésbé van lehetőségünk. A tanszék fej-

4. a-b-c-d kép. Részletek a felsőoktatási reform kapcsán zajló programvita jegyzőkönyvéből
(Megj.: Csanádi név alatt Dr. Csanády Etele értendő, Forrás: [9])

3.4. Összefoglalás

Az 1949-1968 időszakban a matematika tananyag a mainál sokkal részletesebb volt, jóval magasabb óraszámokkal. Napjainkban a számológép és számítógép használata miatt sok, korábban a számítások elvégzéséhez nélkülözhetetlen matematikai módszer megtanítása feleslegessé vált, ami jelentős tananyagcsökkentést tett lehetővé. Erre egy példa az, hogy ma már nincs szükség logarlécra a számolás során. A múlt század közepén ennek használatát be kellett gyakorolni, ami időigényes feladat volt (ld. a 4.d képen Kiss Ignác hozzászólását ezzel kapcsolatban). A logarléccel való munka viszont megkövetelte a nagyságrendek fejben történő ellenőrzését, emiatt ritkábbak voltak a nagyságrendi hibák, mint manapság. A számológép- vagy számítógéphasználat során ezzel szemben akár egy elütésből adódóan is keletkezhet ilyen jellegű hiba, melynek kontrolja már elmarad. A matematikai statisztika oktatását is jelentősen megkönnyíti a számológépek statisztika üzemmódja, illetve a számítógépes programcsomagok.

Végezetül megjegyezzük, hogy – mint az a fentiekben több helyen olvasható – a jegyzetben találoztunk régies, mai fül számára szokatlan kifejezésekkel. Közülük néhány pl.: szakadozott

vonat (szaggatott vonal), fejtetlen függvény (implicit alakú), sarkkoordináták (polárkoordináták), szaggatott valószínűség (diszkrét valószínűség) stb. Ezek által nosztalgikus hangulatba kerülve, az 1950-es évekbe visszarepülhettünk.

Irodalomjegyzék

- [1] **Keresztes Cs.:** „Összeformni a dolgozó néppel” - A felsőoktatás helyzetének elemzése 1952-ből. ArchivNet 20. évfolyam (2020) 5-6. szám URL <https://www.archivnet.hu/osszeformni-a-dolgozo-neppel-a-felsooktatas-helyzetenek-elemzese-1952-bol>
- [2] **Magyar életrajzi lexikon** <https://mek.oszk.hu/00300/00355/html/index.html>
- [3] **Csanády E., Csanády V.:** Dr. Csanády Etele munkássága (1949-1992): „Hűséges szolgája bomlott századának”, Sopron, Magánkiadás (2015.)
- [4] **Dr. Walek Károly:** Matematika I. (Kézirat), 1943.
- [5] **Dr. Walek Károly:** Matematika II., Erdőmérnöki Főiskola Sopron (Kézirat), 1954.
- [6] **Roxer Egon** (szerk.) Dr. Walek Károly és Kiss Ignác előadásai alapján: Matematika II., Erdőmérnöki Főiskola Sopron (Kézirat), 1958.
- [7] **Dr. Roxer Egon:** Matematika III. - Matematikai statisztika és lineáris programozás alapjai (Jegyzet). Erdészeti és faipari egyetem Erdőmérnöki Kar, 1970.
- [8] Az erdészeti felsőoktatás 200 éve (alias Erdészeti Almanach) I-II-III. kötet. URL <https://emk.uni-sopron.hu/az-erdeszeti-felsooktatas-200-eve-1>
- [9] Hungaricana Könyv- és Dokumentumtár URL https://library.hungaricana.hu/hu/view/SOPRON_TANSZEK_ERT_1960-1961/?pg=63&layout=s

A Fermat-féle prímteszt R-kódjának optimalizálása¹

Tóth Zsolt

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Alaptudományi Intézet
toth.zsolt@uni-sopron.hu, 0000-0003-0999-784X

ÖSSZEFOGLALÓ. A kutatás célja az R nyelven megvalósított Fermat-próba tesztelése és hatékonyabbá tétele volt. Az R-kódban a moduláris hatványozást manuálisan implementáltuk, míg a főleg összehasonlítási alapként szolgáló Python natív függvényét használtuk. A teljesítménytesztet két intervallumban végeztük el, és megvizsgáltuk a párhuzamos feldolgozás, valamint a R-be ágyazott C++ függvények hatását. Eredményeink rávilágítanak arra, hogy az R rugalmassága és egyes kódrészletek gépközelibb nyelveken való felgyorsítása jelentős előnyöket biztosíthatnak a nagy számításigényű feladatok megoldásában.

ABSTRACT. The aim of the research was to test and improve the efficiency of the Fermat primality test implemented in R. In the R code, modular exponentiation was manually implemented, while Python's native function, primarily used as a benchmark for comparison, was utilized. Performance tests were conducted over two intervals, and we examined the effects of parallel processing and C++ functions embedded in R. Our results highlight that the flexibility of R, combined with speeding up certain code segments using lower-level languages, can offer significant advantages in solving computationally intensive tasks.

1. Bevezetés

A prímtesztelés egy olyan matematikai eljárás, amelynek célja annak megállapítása, hogy egy adott természetes szám prím-e. Ez a probléma alapvető jelentőségű a számelméletben és számos gyakorlatias célú alkalmazásban, például a kriptográfiában. A prímtesztelés egyik fontos eljárása a Fermat-próba [2], amelynek több változata is létezik.

A dolgozat keretében megvizsgáltuk, hogy a Fermat-próba alapváltozatának a statisztikusok és adatelemzők által gyakran használt R programozási nyelvben [6] írt kódja milyen eljárásokkal tehető hatékonyabbá. Vizsgálataink nem voltak teljes körűek, de rávilágítottak arra, hogy az R környezetének rugalmassága és az adattudományban példátlan nyelvi gazdagsága a *gyorsR* filozófiáját követve számos programozási területen kihasználható.

Az R (és elődje, az S) eredetileg általános célú és a magas szintű programozási nyelveken belül korántsem lassú nyelv, hiszen alapfüggvényeit a gyorsaság kedvéért jelentős részben Fortranban, C-ben és C++-ban írták, de használatát a nem feltétlenül programozói vénával megáldott tudományos kutatók, illetve a szakterületekhez kapcsolódó oktatás elvárásaihoz szabták [7]. Az adott tudományterület (kényelmi) igényeihez igazított csomagok viszont az R széles körű elterjedésének köszönhetően jelentős részben nem professzionális programozói megközelítés

¹ ENGLISH TITLE. Optimizing the Fermat primality test in R code.

KULCSSZAVAK. Fermat-féle prímteszt, R, Python, C++, benchmark.

KEYWORDS. Fermat primality test, R, Python, C++, benchmark.

mentén, R-ben készültek. Sebességük gyakran nem a legoptimálisabb, mint ahogy a nem optimalizált kódok bármely programozási nyelvben lehetnek lassúak. Ez jellemzően még közepes és nagy adatállományokra épülő kutatási és oktatási feladatok esetén sem jelent gondot, hiszen pl. a két ezredmásodperc helyett egy tizedmásodperc alatt lefutó kód az elemzések jellege miatt többnyire semmilyen problémát nem okoz. Extrém nagy adatállományok vagy számítási igények (pl. nagy prímek keresése, gépi tanulás) esetén viszont – ahol a kódok akár hetekig futnak – annál inkább. Tisztán programozói perspektívából természetesen vissza lehet térni a gyorsabb, gépközelibb nyelvekhez, azonban ez a legtöbb kutató és oktató számára frusztráló elvárás, hiszen az elemzési módszertan közvetlen megvalósítását teljesen „kiveszi a kezükből”. Ráadásul nem reális, hogy a tudományos életben és az oktatásban felmerülő programozási feladatokat minden esetben alacsony szintű – vagy legalábbis sokkal gyorsabb – programozási nyelvekben professzionális tudásra szert tett programozók oldják meg, hiszen egyszerűen nincs ennyi humán kapacitás, illetve az ilyen típusú programozási feladatoknál az adott szakterületet is alaposan ismerni kell. Az oktatás – különösen a nem programozói kurzusokon tanuló, Z-generációhoz tartozó diákok oktatása – során pedig az amúgy is riasztó fejlesztőkörnyezet gépközelivé alakítása megfelelően (az elvárhatóhoz képest egészen kivételes módon) felkészült oktatók mellett is borítékolható pedagógiai csőd [3].

Követhetőbb módszernek tűnik, ha csak a problémás kódrészletekre koncentrálunk. R-ben optimalizáljuk, vagy esetleg más programozási nyelvet, professzionálisabb programozási módszertant követve felgyorsítjuk azokat. Az R mindkét megoldást „ab ovo” támogatja. Dolgozatunkban erre mutattunk néhány példát, majd az alkalmazásokat a programozási „benchmark” mérési és statisztikai eszközeivel hasonlítottuk össze.

2. Anyagok és módszer

Az elemzés során először felvázoltuk a Fermat-féle prímteszt alapvető jellemzőit és pszeudokódját. A módszertani jellemzők mellett a megvalósítás R-kódjának és az összehasonlítási alapként szolgáló Python-kód legfontosabb részeit és jellemzőit is közöltük, majd két eltérő méretű intervallumra teszteltük a kódok sebességét. Ezután párhuzamos feldolgozással és klaszterezéssel, ill. a moduláris hatványozást C++-ban implementálva az R-kódot felgyorsítottuk. A kódokat ebben az esetben is csak fő vonalakban közöltük, s itt is mértük azok sebességét. Végül a kapott eredményeket a megfelelő statisztikai próbákra építve összehasonlítottuk.

2.1. A vizsgált algoritmus

A Fermat-féle prímteszt a kis Fermat-tételen alapul. A tétel szerint, ha p prímszám és a egy olyan egész szám, amely nem osztható p -vel, akkor

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Ez azt jelenti, hogy ha p prímszám, akkor bármely a -ra, amely nem osztható p -vel, a^{p-1} -t p -vel elosztva 1 maradékot kapunk (Algoritmus 1.).

Léteznek olyan összetett n számok, amelyeknél (1) teljesül bizonyos a -kra. Ezeket az összetett számokat Fermat-pszeudoprímeknek nevezzük. A pszeudoprímek speciális osztályát alkotják a Carmichael-számok, amelyek különlegesen abból a szempontból, hogy bármely a -ra, amely relatív prím n -hez, (1) teljesül.

A Fermat-próba tehát egyszerű és gyors algoritmus a prímszámok ellenőrzésére, de nem minden esetben megbízható, mivel a pszeudoprímek és a Carmichael-számok hamis pozitív

Algoritmus 1. Fermat-féle prímteszt

```

1: Input: Egy egész szám  $p$ , és egy pozitív egész  $a$ , ahol  $1 < a < p - 1$ 
2: Output: Valószínűleg prím vagy Nem prím
3: procedure FERMATPRÓBA( $p$ ,  $a$ )
4:   if  $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$  then
5:     return Nem prím
6:   else
7:     return Valószínűleg prím
8:   end if
9: end procedure

```

eredményeket adhatnak, azaz nem prímekre is teljesíti az (1) tulajdonságot. Részben az anomáliák esélyének csökkentésére a Fermat-féle prímtesztnek több módosított változata létezik. Azonban a Fermat-próba „hatékonysága” megfelelő módszert követve magas [4]. A hamis pozitív eredmények kiszűrését szolgáló, összetettebb módszerek használatától most eltekintettünk.

2.2. A kódok kialakításának szempontjai

Mindkét nyelv esetén definiáltunk egy-egy függvényt, amelynek futási idejét a megfelelő számú elemről álló objektum segítségével teszteltük. Emellett törekedtünk az alkalmazott módszert a programozás alapelemeire (szekvencia, feltételes elágazás, iteráció) korlátozni, de esetenként az alapsomagok (gyors) függvényeit is használtuk. A kódolás során speciális könyvtárakat tehát csak „végszükségből” hívtunk meg, a lehető legelemibb programozási módszertant követtük. A futtatás során mindent megtettünk a futatókörnyezet eltéréseinek és anomáliáinak kiküszöböléséért [10]. Az R-ben, a Fermat-féle prímteszt során kénytelenek voltunk a moduláris hatványozást definiálni, míg a Pythonban erre nem volt szükség a rendelkezésre álló `pow` függvény miatt, amelyet C-ben írtak, s meglehetősen gyors függvénynek számít [1]. Viszont a Python használata során külön meg kellett hívunk a `random` és a `time` modulokat.

A prímszámkeresést az $\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq N\}$ intervallumokban végezzük el, ahol $N = 100$ és $N = 10000$. Bár variabilitásra és anomáliákra nem számítunk, az $1 - \beta = 0,8$ statisztikai erőt általában biztosító $m = 30$ kísérletet (futtatást) $m = 50$ -re növeltük. A kiinduló Fermat-próba során eltértünk az általánosan használt és ajánlott $k = 10$ értéktől, $k = 30$ -ra módosítottuk. (A k a véletlenszerűen választott a alapok számát jelöli.) Az összehasonlíthatóság kedvéért $N = 100$ esetében is, ahol erre nem lett volna szükség [5]. Nagyobb intervallumok esetén folytatott vizsgálatok során ez kiküszöbölheti a hamis pozitív eredményeket. Az előtesztelés során a Fermat-próbánál előfordult, hogy $k = 10$ és $N = 10000$ mellett nem minden esetben kaptunk 1229 prímet, $k = 30$ esetén ez nem fordult elő.

A kísérletek során – valószínűleg a legtöbb matematika- és statisztikatanár számára is elérhető konfigurációkhoz hasonló – Intel(R) Core(TM) i3, 3 GHz-es processzort, 8 GB RAM-ot és 64 bites Windows 10 operációs rendszert használtunk. A programkódokat R 4.3.2-ben, az `Rcpp` csomag R-verzióval kompatibilis C++ nyelvi változatában és Python 3.12.0-ban írtuk. A programkódoknak csak a legfontosabb részleteit és jellemzőit adtuk meg, azonban az összes kód elérhetőségét biztosítottuk [8]. A prímteszt megvalósítás szempontjából központi jelentőségű függvényét R-ben és Pythonban hasonló módon valósítottuk meg, a korábban jelzett jellemzőkkel és eltérésekkel (1. táblázat). Az R-kódban a futási időt a `Sys.time()` függvénnyel mértük, amely minden teszt futásának kezdetén és végén rögzítette az időt.

A Python-kód hasonló módon működött, de a `time.perf_counter()` függvényt hasz-

R

```
fermat_teszt <- function(n, k) {
  if (n <= 1) {
    return("Összetett")
  }
  if (n == 2) {
    return("Prím")
  }
  for (i in 1:k) {
    a <- sample(2:(n - 2), 1)
    # Moduláris hatványozás
    result <- 1
    base <- a %% n
    exp <- n - 1
    while (exp > 0) {
      if (exp %% 2 == 1) {
        result <- (result * base) %% n
      }
      exp <- exp %% 2
      base <- (base * base) %% n
    }
    if (result != 1) {
      return("Összetett")
    }
  }
  return("Prím")
}
```

Python

```
def fermat_teszt(n, k):
    if n <= 1:
        return "Összetett"
    if n == 2:
        return "Prím"
    for _ in range(k):
        if n > 3:
            a = random.randint(2, n - 2)
        else:
            a = 2
        # Moduláris hatványozás
        result = 1
        base = a % n
        exp = n - 1
        while exp > 0:
            if exp % 2 == 1:
                result = (result * base) % n
            exp //= 2
            base = (base * base) % n
        if result != 1:
            return "Összetett"
        return "Prím"
```

1. táblázat. A megoldás alapfüggvénye R-ben és Pythonban

náltuk időmérésre.

A Fermat-próba felgyorsítása érdekében az R `parallel` könyvtárát használtuk, amely lehetővé tette a párhuzamos feldolgozást. A `detectCores()` függvénnyel meghatároztuk a rendelkezésre álló processzormagok számát, majd a számok párhuzamos feldolgozásához klasztereket képeztünk.

Másik módszerünk az R-kódot lassító kódrészlet kiváltása volt C++ programozási nyelvben. Az `Rcpp` csomag lehetővé tette, hogy C++ kódot ágyazzunk be R-be, így a számításigényes moduláris hatványozást felgyorsíthattuk (2. táblázat).

A fenti módszerekkel előálló kódokat parancssor segítségével futtattuk.

A vizsgálatok révén tehát összesen nyolc, egyenként ötven elemű mérési eredményt kaptunk, $N = 100$ -ra és $N = 10000$ -re is négyet-négyet. Az így előálló adatállományok tartós elérhetőségét biztosítottuk [9].

A kapott eredményeket (a futási időket) a kísérleti eredmények/minták összehasonlításakor gyakran használt statisztikai próbák segítségével, illetve egyszerű arányokkal fejeztük ki.

3. Eredmények

A mért futási idők – külön-külön az $N = 100$ és az $N = 10000$ értékek által fémjelzett négyelemű csoportokban – egyszerű szemrevételezés után is igen jelentős különbséget mutattak, amit az elvégzett próbák is megerősítettek. A normalitás vizsgáló Shapiro-Wilk próba p -értékei minden esetben jelentősen az $\alpha = 0,05$ alatt maradtak, a Levene-próba szintén alacsony p -értékei pedig

C++

```

#include <Rcpp.h>
#include <random>
using namespace Rcpp;
// Moduláris hatványozás függvény
long long modexp(long long base, \
long long exp, long long mod) {
    long long result = 1;
    base = base % mod;
    while (exp > 0) {
        if (exp % 2 == 1) {
            result = (result * base) % mod;
        }
        exp = exp >> 1;
        base = (base * base) % mod;
    }
    return result;
}
CharacterVector fermat_test\
(int k, int max_n) {
    CharacterVector results(max_n);
    for (int n = 1; \
        n <= max_n; ++n) \
    {
        if (n <= 1) {
            results[n - 1] = "Összetett";
            continue;
        }
        if (n == 2) {
            results[n - 1] = "Prím";
            continue;
        }
        std::default_random_engine\
            generator;
        std::uniform_int_distribution\
            <long long> distribution(2,\
            n - 1);
        bool is_prime = true;
        for (int i = 0; i < k; ++i) {
            long long a = distribution\
            (generator);
            if (modexp(a, n - 1, n) \
            != 1) {
                is_prime = false;
                break;
            }
        }
        results[n - 1] = is_prime ? \
        "Prím" : "Összetett";
    }
    return results;
}

```

2. táblázat. A moduláris hatványozás C++ kódja

az azonos szórásokra vonatkozó nullhipotézist zárták ki. Ezzel nyilvánvalóvá vált, hogy az átlagok összehasonlítása, ill. az átlagok összehasonlítására szolgáló próbák (T-próba, Welch-próba) használata értelmetlen. Esetünkben tehát csak az egyes minták mediánjai hasonlíthatók össze. Ezek azonossága a nagy eltérés miatt fel sem merült, de azonosságukat a párosan elvégzett Wilcoxon-próbák és a négyes csoportokban elvégzett Mann-Whitney U-próbák igen alacsony p -értékei is kizárták.

N	Módszer	Medián	Arányszámok
100	R	0,00652802	151
	Python	0,0009081	21
	R (parallel)	0,005262017	122
	R (<i>rcpp</i>)	$4,315376 \times 10^{-5}$	1
10000	R	0,4835695	121
	Python	0,0911599	23
	R (parallel)	0,2730645	68
	R (<i>rcpp</i>)	0,003997445	1

3. táblázat. A futási idő mediánjai (mp) és a legkisebb időre vetített arányszámok

A mérési eredmények mediánjai igen jelentős különbségeket mutatnak (3. táblázat). Jól látható, hogy a moduláris hatványozást hatékony függvénnyel kezelő Python-kód sokkal gyorsabbnak bizonyult, mint a kezdeti R-kód. A parallel programozás viszonylag kis mértékben csökkentette az R-kód futási idejét, azonban az *rcpp* csomaggal beépített C++ kódrészlet az

R-kód extrém (151-, ill. 121-szeres) gyorsulását eredményezte. Az N 100-szorosára (100-ról 10000-re) növelése a futási időt a Python-kódnál 100-szorosára, a kiinduló R-kódnál 74-szeresére, a parallel programozással támogatott R-kódnál 52-szeresére, az *rcpp*-vel támogatott R-kódnál 93-szorosára növelte. Úgy tűnik tehát, hogy nagyobb feladatnál (esetünkben) a Python-kód és az R (*rcpp*) kód előnye valamelyest kisebbnek bizonyult.

4. Konklúzió

Az R és a Python elleni programozói kritikák nem mindig veszik figyelembe a két programozási nyelv gyakran „speciális” felhasználói körét, tehát azt, hogy mindkét nyelv viszonylag könnyen elsajátítható és – ha a programok kialakításának munkaerő-szükségletét is figyelembe vesszük – hatékonyabb elemzési eszköz kutatók, oktatók, tanárok, diákok kezében, mint pl. a szoftver-fejlesztésben használt programozási nyelvek. A programkódok esetleges lassúságát is ebben a kontextusban érdemes szemlélnünk. A mérési eredmények megerősítették azt a feltevésünket és egyben tapasztalatunkat, hogy a statisztikai-adatelemzési területen a funkcionalitást és a rugalmasságot tekintve talán a legjobban teljesítő R egyfajta hibrid szemléletet követve – ha az esetleg lassabb programkódelemeket szükség szerint felgyorsítjuk – hatékonyan használható erőforrás-igényesebb feladatok esetén is. A minden programozási területen rugalmas, gazdag funkcionalitású és egyszerű szintaktikájú Python-hoz hasonlóan az R mélyén ott futnak – vagy bármikor kialakíthatóak – gyors, de gyakran professzionális programozói kvalitásokat igénylő C-, C++ és Fortran-kódok, amelyek hidat képeznek a 20. század közepe óta felhalmozott, manapság talán nem eléggé tisztelt, programkódokban kifejeződött tudással. Ez a tudás azonban pl. az R viszonylagos felhasználóbarátsága nélkül jóval kisebb körben lenne mobilizálható a mai, megváltozott, felgyorsult körülmények között.

Irodalomjegyzék

- [1] *python/cpython*, 2024, original-date: 2017-02-10T19:23:51Z.
URL <https://github.com/python/cpython>
- [2] **Crandall, R. and Pomerance, C. B.**: *Prime Numbers: A Computational Perspective*, Springer, New York, 2005, 2nd edn.
- [3] **Horváth-Szováti, E.**: *A matematikatanítás eredményességét növelő módszerek a felsőoktatásban*, *Dimenziók*, **6** (2018), No. 6, 73–77, number: 6. doi: [10.20312/dim.2018.09](https://doi.org/10.20312/dim.2018.09).
- [4] **Khadir, O. and Szalay, L.**: *Experimental results on probable primality*, *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, **1** (2009), No. 2, 161–168.
- [5] **Knuth, D.**: *Art of Computer Programming, The: Seminumerical Algorithms, Volume 2*, Addison-Wesley Professional, Boston, 1997, 3rd edn.
- [6] **Pödör, Z.**: *Adatbányászat – FIM algoritmusok*, *Dimenziók*, **1** (2013), No. 1, 51–56, number: 1.
- [7] **Pödör, Z.**: *Az R szoftver alkalmazása az Adatbányászat tárgy oktatásában*, *Dimenziók*, **3** (2015), No. 3, 14–20, number: 3. doi: [10.20312/dim.2015.02](https://doi.org/10.20312/dim.2015.02).
- [8] **Tóth, Z.**: *Fermat-féle prímszámpróba kódjai*, Zenodo, 2024 doi: [10.5281/zenodo.13916614](https://doi.org/10.5281/zenodo.13916614).
- [9] **Tóth, Z.**: *Fermat-féle prímszámpróba mérési eredményei*, Zenodo, 2024 doi: [10.5281/zenodo.13918303](https://doi.org/10.5281/zenodo.13918303).
- [10] **Wickham, H.**: *Advanced R, Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2020, 2nd edn. doi: [10.1201/9781351201315](https://doi.org/10.1201/9781351201315).

Az általánosított szedeniók és a vektor-mátrixok algebrája¹

Péntek Kálmán

Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Savaria Egyetemi Központ, Berzsényi Dániel
Pedagógusképző Központ, Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu,  0000-0002-9467-7025

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban az általánosított Cayley-Dickson-féle eljárással megkonstruáljuk az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$, az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebráját. Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával. A $\mathbb{C}_\alpha$ és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ asszociatív, de az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nem asszociatív algebrák. A probléma megoldására Zorn, M.A. 1931-ben értelmezte a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ általánosított szedeniók vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In this paper, with the use of generalized Cayley-Dickson process we construct the algebra of generalized complex numbers $\mathbb{C}_\alpha$, the algebra of generalized quaternions $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, the algebra of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ and the algebra of generalized sedenions $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Any finite dimensional associative algebra is isomorphic to a subalgebra of total matrix algebra. The $\mathbb{C}_\alpha$ and $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ is associative, but the algebra $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ and $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix representation of split octonions algebra in 1931. In the last section of the paper, we construct the vector-matrix representation of generalized sedenions $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

1. Bevezetés

Ez a dolgozat a szerző általánosított oktoniókról 2023-ban megjelent [10] munkájának szerves folytatása. Először kiegészítjük az általánosított oktoniók algebrájára vonatkozó ismereteket, majd megalapozzuk az általánosított szedeniók algebráját.

A Cayley-Dickson-féle [3] megkettőzési eljárás Albert[1] által értelmezett általánosítását felhasználva több lépésben egymásra épülő algebrák egész sorozatához juthatunk így el. Először a valós számok $\mathbb{R}$ struktúrájából, mint önmaga feletti 1-dimenziós algebrából kiindulva a megkettőzési eljárással nyerjük az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebráját. Az $\alpha = 1$ értékadás esetén a klasszikus Gauss-féle komplex számokat eredményezi az eljárás.

Ezután ennek a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrának a megkettőzésével juthatunk el az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, de asszociatív algebrájához. Az $\alpha = \beta = 1$ választás mellett a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók adódnak.

¹ ENGLISH TITLE. The algebra of generalized sedenions and vector-matrices.

KULCSSZAVAK. Cayley-Dickson eljárás, általánosított oktonió, általánosított szedenió, Zorn-féle vektor-mátrix.

KEYWORDS. Cayley-Dickson process, generalized octonion, generalized sedenion, Zorn vector-matrix.

Ezen $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra megkettőzése vezet el az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem is asszociatív, de alternáló algebrájához. Az $\alpha = \beta = \gamma = 1$ értékek választásával a klasszikus Cayley-Graves-féle oktoniók származtathatók az eljárásból. Dolgozatunk előző részében lényegében eddig jutottunk el a [10] felépítésben.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra megkettőzésével tudjuk majd ezután értelmezni az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\delta \in \mathbb{R}$) 16-dimenziós algebráját, s megvizsgáljuk annak legfontosabb algebrai tulajdonságait. A dolgozat utolsó fejezetében pedig megadjuk az általánosított szedeniók algebrája vektor-mátrix reprezentációját.

2. Az általánosított oktoniókról

Ebben a fejezetben kiegészítjük az általánosított oktoniókra vonatkozó azon ismereteket, amelyek szükségesek a dolgozat későbbi részeihez.

Az előző dolgozatban bemutatott felépítés eredményeként az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúrában, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben létezik egy olyan, $\{e_i\}_{i=0}^7$ általánosított oktonió-egységeknek nevezett elemekből álló bázis, amelyben a bázis elemei között érvényes a [10] dolgozat végén bemutatott Cayley-féle szorzótábla.

Minden $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem egyértelműen írható fel ekkor

$$(1) \quad o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$$

alakban, amelyet az általánosított oktonió *valós algebrai alakjának* nevezünk. Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra egy olyan 8-dimenziós, $\mathbb{R}$ test feletti vektortér, amelyben érvényesek az alábbi számolási szabályok:

Skalárral való szorzás, ha $r \in \mathbb{R}$, $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$(2) \quad r \cdot o = r \cdot (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) = \sum_{i=0}^7 (r \cdot a_i) \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma},$$

Összeadás, ha $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$, $o' = \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$(3) \quad o + o' = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^7 (a_i + b_i) \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra szorzási művelete pedig egy bilineáris leképezés, így a struktúra e szorzási művelete disztributív az összeadásra nézve, amelyet az oktonió-egységek Cayley-féle szorzótáblája teljesen és egyértelműen meghatározza:

Szorzás, ha $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$, $o' = \sum_{j=0}^7 b_j \cdot e_j \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$(4) \quad o \cdot o' = (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) \cdot (\sum_{j=0}^7 b_j \cdot e_j) = \sum_{i,j=0}^7 (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}.$$

További részletek a [9] dolgozatban találhatók.

Az $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem *konjugáltján* az $\bar{o} = a_0 \cdot e_0 - \sum_{i=1}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniót értjük.

Könnyen beláthatjuk, hogy a konjugált képzésére vonatkozóan teljesülnek a következő összefüggések: Ha $r \in \mathbb{R}$ és $o, o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

- a) $\bar{\bar{o}} = o$ involutív
- b) $\overline{r \cdot o} = r \cdot \bar{o}$ homogén
- c) $\overline{o + o'} = \bar{o} + \bar{o'}$ additív
- d) $\overline{o \cdot o'} = \bar{o'} \cdot \bar{o}$ anti-mutiplikatív.

Egyszerű számolással igazolhatjuk a következő állítás helyességét.

Ha $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o = a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 + \gamma a_4^2 + \alpha\gamma a_5^2 + \beta\gamma a_6^2 + \alpha\beta\gamma a_7^2 \in \mathbb{R}.$$

Az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonió *normáján* a fenti állításban szereplő valós számot értjük, azaz

$$(5) \quad N(o) := o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o \in \mathbb{R}.$$

A Cayley-Graves számok $\mathbb{O}$ struktúrájára vonatkozó megfelelő tétel [5] természetes általánosításával analóg módon bizonyítható a következő állítás:

Ha $o, o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

- (a) $N(o \cdot o') = N(o) \cdot N(o')$, a norma egy multiplikatív függvény,
- (b) az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem invertálható pontosan akkor, ha $N(o) \neq 0$,
- (c) ha $o, o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ invertálható elemek, akkor $o \cdot o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ is invertálható és érvényes az $(o \cdot o')^{-1} = (o')^{-1} \cdot (o)^{-1}$ összefüggés.

Az $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$, $o' = \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elempár *skaláris szorzatán* az

$$(6) \quad o \circ o' := a_0 b_0 + \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha\beta a_3 b_3 + \gamma a_4 b_4 + \alpha\gamma a_5 b_5 + \beta\gamma a_6 b_6 + \alpha\beta\gamma a_7 b_7 \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

Egyszerű direkt számolással láthatjuk be a skaláris szorzat alábbi tulajdonságait:

A $\circ: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$, $(o, o') \mapsto o \circ o'$ egy szimmetrikus bilineáris leképezés, ha $r \in \mathbb{R}$, $o, o', o'' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

- (a) $o \circ o' = o' \circ o$, kommutatív,
- (b) $(r \cdot o) \circ o' = o \circ (r \cdot o') = r \cdot (o \circ o')$, homogén,
- (c) $(o + o') \circ o'' = o \circ o'' + o' \circ o''$, a skaláris szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Az $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonió *valós részén* (*skalár rész*) az

$$(7) \quad S(o) := a_0 \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes részén* (*vektor rész*) pedig a

$$(8) \quad V(o) := U = \sum_{i=1}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{R}^7$$

elemet értjük.

A fentiekből következik, hogy minden $o = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem egyértelműen írható fel

$$(9) \quad o = S(o) + V(o) = a_0 + U$$

alakban, amelyet az általánosított oktonió *Hamilton-féle alakjának* nevezünk.

Ha egy $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonióra $S(o) = 0$ teljesül, akkor *tiszta képzetes oktonióról* beszélünk, ezek halmazát $\text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ szimbólummal jelöljük.

Ha $U = \sum_{i=1}^7 a_i \cdot e_i$, $V = \sum_{i=1}^7 b_i \cdot e_i \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ két tiszta képzetes oktonió, akkor ezek szorzatára egyszerű számítás eredményeként érvényes az alábbi összefüggés:

$$(10) \quad U \cdot V = -(\alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3 + \gamma a_4 b_4 + \alpha \gamma a_5 b_5 + \beta \gamma a_6 b_6 + \alpha \beta \gamma a_7 b_7) + [(\beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2 + \gamma a_4 b_5 - \gamma a_5 b_4 - \beta \gamma a_6 b_7 + \beta \gamma a_7 b_6)e_1 + (-\alpha a_1 b_3 + \alpha a_3 b_1 + \gamma a_4 b_6 + \alpha \gamma a_5 b_7 - \gamma a_6 b_4 - \alpha \gamma a_7 b_5)e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1 + \gamma a_4 b_7 - \gamma a_5 b_6 + \gamma a_6 b_5 - \gamma a_7 b_4)e_3 + (-\alpha a_1 b_5 - \beta a_2 b_6 - \alpha \beta a_3 b_7 + \alpha a_5 b_1 + \beta a_6 b_2 + \alpha \beta a_7 b_3)e_4 + (a_1 b_4 - \beta a_2 b_7 + \beta a_3 b_6 - a_4 b_1 - \beta a_6 b_3 + \beta a_7 b_2)e_5 + (\alpha a_1 b_7 + a_2 b_4 - \alpha a_3 b_5 - a_4 b_2 + \alpha a_5 b_3 - \alpha a_7 b_1)e_6 + (-a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 - a_4 b_3 - a_5 b_2 + a_6 b_1)e_7]$$

E két tiszta képzetes oktonió $U \circ V$ szimbólummal jelölt *skaláris szorzatán* a (10) előállítás első, gömbölyű zárójelben szereplő kifejezését, $U \times V$ szimbólummal jelölt *vektoriális szorzatán* pedig a (10) előállítás második, szögletes zárójelben szereplő kifejezését értjük. Így tehát érvényes az

$$(11) \quad U \cdot V = -(U \circ V) + [U \times V]$$

előállítás. Az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ halmazban értelmezett $\circ$ skaláris szorzat maga is egy szimmetrikus bilineáris leképezés, amely a $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra szintén $\circ$ jellel jelölt skaláris szorzatának leszűkítése.

Egyszerű, bár hosszadalmas számolással igazolhatjuk, hogy az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ halmazban értelmezett $\times$ vektoriális szorzat pedig egy anti-szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre teljesülnek az alábbi összefüggések:

Ha $r \in \mathbb{R}, U, V, W \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$, akkor

$$(a) \quad V \times U = -(U \times V), \text{ anti-kommutatív,}$$

$$(b) \quad (r \cdot U) \times V = U \times (r \cdot V) = r \cdot (U \times V), \text{ homogén,}$$

ha az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ struktúrában a skalárral való szorzást az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra megfelelő műveletének leszűkítésével értelmezzük.

$$(c) \quad (U + V) \times W = U \times W + V \times W \text{ a vektoriális szorzás jobbról disztributív az összeadásra,}$$

$$(d) \quad U \times (V + W) = U \times V + U \times W \text{ a vektoriális szorzás balról disztributív az összeadásra.}$$

Érvényesek továbbá a következő összefüggések is:

$$(e) \quad U \times U = 0, \text{ ahol } 0 = \sum_{i=1}^7 0 \cdot e_i \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}) \text{ a zéruselem,}$$

$$(f) \quad (U \times V) \circ U = 0 \in \mathbb{R} \text{ ortogonalitási tulajdonság,}$$

$$(g) \quad (U \times V) \circ V = 0 \in \mathbb{R} \text{ ortogonalitási tulajdonság.}$$

Az (f) és (g) szerint tehát a vektoriális szorzás eredménye ortogonális a szorzat mindkét tényezőjére. A 7-dimenziós vektoriális szorzásra vonatkozó további ismeretek pl. [6], [12] és [13] dolgozatokban találhatók.

A (11) összefüggés természetes általánosításaként igazolható, hogy ha Hamilton-féle alakjával

$$a_0 + U, b_0 + V \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma},$$

akkor

$$(12) \quad (a_0 + U) \cdot (b_0 + V) = (a_0 \cdot b_0 - U \circ V) + (a_0 \cdot V + b_0 \cdot U + U \times V).$$

Itt a jobb oldali első zárójeles kifejezés a Hamilton-féle alakban nyert szorzat valós, a második zárójeles kifejezés pedig a szorzat képzetes része.

3. Általánosított szedeniók

Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrájából kiindulva tekintsük az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ direktszorzatot, s értelmezzük e halmazban a következő műveleteket:

$$(13) \quad \text{Skalárral való szorzás: } r \cdot (u_0, u_1) := (r \cdot u_0, r \cdot u_1),$$

$$(14) \quad \text{Összeadás: } (u_0, u_1) + (v_0, v_1) := (u_0 + v_0, u_1 + v_1),$$

$$(15) \quad \text{Szorzás: } (u_0, u_1) \cdot (v_0, v_1) := (u_0 \cdot v_0 - \delta \cdot \overline{v_1} \cdot u_1, u_1 \cdot \overline{v_0} + v_1 \cdot u_0),$$

ahol $\delta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, továbbá $r \in \mathbb{R}, (u_0, u_1), (v_0, v_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek.

Egyszerű, bár időigényes számítással bizonyítható a következő állítás:

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ direktszorzat a (13) – (15) műveletekkel egy 16-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, amelyben $0_s := (0_o, 0_o)$ az összeadás, $1_s := (1_o, 0_o)$ a szorzás neutrális eleme.

Ezen algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti 16-dimenziós vektortérben az általánosított oktoniók $\{e_i\}_{i=0}^7$ bázisának felhasználásával

$$(16) \quad 1_s = (1_o, 0_o) = (e_0, 0_o), (e_1, 0_o), (e_2, 0_o), \dots, (e_7, 0_o), F := (0_o, 1_o) = (0_o, e_0), (0_o, e_1), (0_o, e_2), \dots, (0_o, e_7)$$

egy természetes bázist alkot.

A $V := \{(u_0, 0_o) : u_0 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}\}$ részalgebrát alkot az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrában, mivel zárt a (13) – (15) műveletekre nézve. Az

$$(17) \quad f_s: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow V, u_0 \mapsto (u_0, 0_o) \text{ leképezés egy } \mathbb{R} \text{ algebra-izomorfizmus, így az}$$

$$(18) \quad f_s^*: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}, u_0 \mapsto (u_0, 0_o) \text{ egy beágyazási } \mathbb{R} \text{ algebra-monomorfizmus.}$$

A beágyazás eredményeként nyert struktúrát $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított szedeniók algebrájának* nevezzük.

Az $F = (0_o, 1_o) \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elemre teljesülnek a következő összefüggések:

$$(a) \quad F^2 = -\delta,$$

$$(b) \quad \text{bármely } u_1 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \text{ esetén } (0_o, u_1) = u_1 \cdot F,$$

$$(c) \quad \text{minden } (u_0, u_1) \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{ elem egyértelműen írható fel } u_0 + u_1 \cdot F \text{ alakban,}$$

amely alakot az általánosított szedeniő *oktoniő-algebrai alakjának* nevezzük.

Minden $u_0, u_1 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ egyértelműen írható fel (9) alapján $u_0 = a_0 + U$, illetve $u_1 = b_0 + V$ Hamilton-féle alakban, ezért a fentiek szerint minden általánosított szedeniő is egyértelműen állítható elő

$$(19) \quad s = u_0 + u_1 \cdot F = (a_0 + U) + (b_0 + V) \cdot F$$

alakban, ahol $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ és $U, V \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$. A (19) előállítást az általánosított szedeniő Hamilton-féle alakjának nevezzük.

Az általánosított szedeniők oktoniő-algebrai alakjával való számolás szabályait foglalja össze a következő állítás:

Ha $r \in \mathbb{R}, u_0 + u_1 \cdot F, v_0 + v_1 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor

$$(a) \quad \text{Skalárral való szorzás: } r \cdot (u_0 + u_1 \cdot F) = (r \cdot u_0) + (r \cdot u_1) \cdot F$$

$$(b) \quad \text{Összeadás: } (u_0 + u_1 \cdot F) + (v_0 + v_1 \cdot F) = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) \cdot F$$

$$(c) \quad \text{Szorzás: } (u_0 + u_1 \cdot F) \cdot (v_0 + v_1 \cdot F) = (u_0 \cdot v_0 - \delta \cdot \overline{v_1} \cdot u_1) + (u_1 \cdot \overline{v_0} + v_1 \cdot u_0) \cdot F.$$

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk a következő állítást:

Ha $r \in \mathbb{R}$, $e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ ($0 \leq i \leq 7$) a természetes bázis elemei és $F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor érvényesek az

$$(20) \quad (r \cdot e_i) \cdot F = r \cdot (e_i \cdot F) \quad (0 \leq i \leq 7)$$

összefüggések.

Az általánosított oktoniók valós algebrai alakja, az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakja és a fenti állítás szerint azonnal adódik a következő előállítás:

Ha $u_0 = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$ és $u_1 = \sum_{i=0}^7 a_{i+8} \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor az $s = u_0 + u_1 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elem egyértelműen írható fel

$$(21) \quad s = a_0 \cdot e_0 + a_1 \cdot e_1 + \dots + a_7 \cdot e_7 + a_8 \cdot (e_0 \cdot F) + a_9 \cdot (e_1 \cdot F) + \dots + a_{15} \cdot (e_7 \cdot F)$$

alakban.

Az $F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elem tulajdonságait rögzítő állítás (b) részének felhasználásával a (16) bázis elemeire vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$(22) \quad E_0 := (e_0, 0_o), E_1 := (e_1, 0_o), \dots, E_7 := (e_7, 0_o), E_8 := (0_o, e_0), \\ E_9 := (0_o, e_1), \dots, E_{15} := (0_o, e_7),$$

ekkor a fenti állítás alapján minden általánosított szedenió egyértelműen írható fel

$$(23) \quad s = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i$$

formában. Ezt az előállítást az általánosított szedenió *valós algebrai alakjának* nevezzük, az előállításban szereplő $\{E_i\}_{i=0}^{15}$ elemeket pedig *általánosított szedenió-egységeknek* hívjuk.

Egyszerű direkt számolással láthatjuk be [4] klasszikus oktoniókra bemutatott állításának mintájára a következő állítást:

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniókra és az $E_8 = F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elemre érvényesek a következő azonosságok:

- (a) $(a + 0_o \cdot E_8) \cdot (b + 0_o \cdot E_8) = a \cdot b$,
- (b) $(a + 0_o \cdot E_8) \cdot (0_o + b \cdot E_8) = a \cdot (b \cdot E_8) = (b \cdot a) \cdot E_8$,
- (c) $(0_o + a \cdot E_8) \cdot (b + 0_o \cdot E_8) = (a \cdot E_8) \cdot b = (a \cdot \bar{b}) \cdot E_8$,
- (d) $(0_o + a \cdot E_8) \cdot (0_o + b \cdot E_8) = (a \cdot E_8) \cdot (b \cdot E_8) = E_8^2 \cdot (\bar{b} \cdot a)$.

Megjegyezzük, hogy az (a) részben szereplő összefüggés szerint az olyan általánosított szedeniókkal, amelyek „képzetes része” nulla, úgy kell számolni, mint a közönséges általánosított oktoniókkal.

Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebra szorzási művelete mindkét oldalról disztributív az összeadás műveletére nézve, így e szorzást egyértelműen meghatározza az általánosított szedenió-egységek Cayley-féle szorzótáblája. A fentiek alapján már bizonyítható a következő:

1. Tétel. Az általánosított szedenió-egységek Cayley-féle szorzótáblája a Függelék táblázatában található.

BIZONYÍTÁS. A műveleti táblázat bal felső 8×8 -as parcellája az előző állítás (a) része szerint azonos az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniók egységeinek szorzótáblájával. A műveleti táblázat jobb felső 8×8 -as parcellája a fenti állítás (b) részének felhasználásával igazolható. A műveleti táblázat bal alsó 8×8 -as parcellájának helyessége a fenti állítás (c) részének alkalmazásával számolható ki. Végül a műveleti táblázat jobb alsó 8×8 -as parcellája a fenti állítás (d) része alkalmazásával igazolható. ■

Vegyük észre, hogy a Táblázat belső tartományának bal felső 2×2 –es mezője a $\mathbb{C}_\alpha$, bal felső 4×4 –es mezője a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, bal felső 8×8 –as mezője pedig az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra egységeinek szorzótáblája.

Az általánosított szedeniő-egységeknek a Táblázatban bemutatott szorzótáblája néhány fontos tulajdonságát említjük.

- (a) A Táblázat minden sora és minden oszlopa minden általánosított szedeniő-egységet pontosan egyszer tartalmaz.
- (b) E_0 a struktúra szorzási neutrális eleme: $E_0 \cdot E_i = E_i \cdot E_0 = E_i$ ($0 \leq i \leq 15$).
- (c) Az E_0 általánosított szedeniő-egység skalárszorosai pontosan a Táblázat főátlójában találhatók.
- (d) A Táblázat főátlója feletti háromszög alakú tartomány főátlóra vonatkozó tükörképe éppen a főátló alatti háromszög alakú tartománya ellentétes előjellel, vagyis a Táblázat antiszimmetrikus a főátlóra nézve: $E_j \cdot E_i = -E_i \cdot E_j$ ($i \neq j, i, j \neq 0$).

A (d) tulajdonságból közvetlenül következik, hogy az általánosított szedeniók szorzási művelete nem kommutatív. Legyen továbbá $X := E_1 + E_{12}, Y := E_2 + E_{15} \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitását felhasználva adódik $X \cdot Y = 0_s$, vagyis ezen struktúra tartalmaz zérusosztókat. Egyszerű számítással beláthatjuk azt is, hogy e két elemmel

$$(24) \quad (X \cdot X) \cdot Y \neq X \cdot (X \cdot Y) \text{ és } (X \cdot Y) \cdot Y \neq X \cdot (Y \cdot Y)$$

teljesül, vagyis $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ egy nem alternáló algebra. Ezért viszont ezen algebra szorzása nem lehet asszociatív sem, ellenkező esetben ugyanis teljesülnie kellene a (24) azonosságoknak is.

Az általánosított szedeniók (23) valós algebrai alakja és a Táblázat felhasználásával egyszerűen igazolhatók az alábbi számolási szabályok:

Ha $r \in \mathbb{R}, s_1 = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i, s_2 = \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot E_i \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor

- (a) skalárral való szorzás: $r \cdot s_1 = r \cdot (\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i) = \sum_{i=0}^{15} (r \cdot a_i) \cdot E_i$,
- (b) összeadás: $s_1 + s_2 = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i + \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot E_i = \sum_{i=0}^{15} (a_i + b_i) \cdot E_i$,
- (c) szorzás: $s_1 \cdot s_2 = (\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i) \cdot (\sum_{j=0}^{15} b_j \cdot E_j) = \sum_{i,j=0}^{15} (a_i \cdot b_j) \cdot (E_i \cdot E_j)$.

4. Az általánosított szedeniók reprezentációja vektor-mátrixokkal

Első lépésként a $\delta \in \mathbb{R}$ paraméter segítségével építsük fel az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\delta$ algebráját az $i \notin \mathbb{R}$ képzetes egységgel, amelyre tehát $i^2 = -\delta$ teljesül. Ezt követően pedig az $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ paraméterekkel konstruáljuk meg az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebráját az előző részekben látottak szerint.

Értelmezzünk műveleteket most a $\mathbb{C}_\delta^7 := \{(w_1, w_2, \dots, w_7) : w_j \in \mathbb{C}_\delta (1 \leq j \leq 7)\}$ direktszorzatban a következő módon:

skalárral való szorzás: ha $t \in \mathbb{C}_\delta, W = (w_1, w_2, \dots, w_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$, akkor

$$(25) \quad t \cdot W = t \cdot (w_1, w_2, \dots, w_7) := (t \cdot w_1, t \cdot w_2, \dots, t \cdot w_7),$$

összeadás: ha $W = (w_1, w_2, \dots, w_7), Z = (z_1, z_2, \dots, z_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$, akkor

$$(26) \quad W + Z = (w_1, w_2, \dots, w_7) + (z_1, z_2, \dots, z_7) := (w_1 + z_1, w_2 + z_2, \dots, w_7 + z_7).$$

A $\mathbb{C}_\delta$ algebra az összeadás és a szorzás műveletével ugyanakkor egy kommutatív, nem zéró gyűrű, amely ezért egy invariáns bázis számú gyűrű is egyben. Így a $\mathbb{C}_\delta^7$ struktúra egy $\mathbb{C}_\delta$ feletti 7-rangú baloldali szabad modulus a

$$(27) \quad B_1 := (1_c, 0_c, \dots, 0_c), B_2 := (0_c, 1_c, 0_c, \dots, 0_c), \dots, B_7 := (0_c, 0_c, \dots, 1_c)$$

standard bázissal. E modulus műveleteinek értelmezéséből következik, hogy minden

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_7) = (u_1 + i \cdot v_1, u_2 + i \cdot v_2, \dots, u_7 + i \cdot v_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$$

elem egyértelműen írható fel

$$(28) \quad W = U + i \cdot V$$

alakban, ahol $U = (u_1, u_2, \dots, u_7), V = (v_1, v_2, \dots, v_7) \in \mathbb{R}^7$.

A (10) összefüggés ötletéből kiindulva a $\mathbb{C}_\delta^7$ szabad modulusban egy skaláris szorzás és egy vektoriális szorzás műveletet vezethetünk be a következő módon:

Skaláris szorzás:

ha $W = (w_1, w_2, \dots, w_7), Z = (z_1, z_2, \dots, z_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$ és $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, akkor legyen

$$(29) \quad W \circ Z := \alpha w_1 z_1 + \beta w_2 z_2 + \alpha \beta w_3 z_3 + \gamma w_4 z_4 + \alpha \gamma w_5 z_5 + \beta \gamma w_6 z_6 + \alpha \beta \gamma w_7 z_7 \in \mathbb{C}_\delta,$$

Vektoriális szorzás:

$$(30) \quad W \times Z := (\beta w_2 z_3 - \beta w_3 z_2 + \gamma w_4 z_5 - \gamma w_5 z_4 - \beta \gamma w_6 z_7 + \beta \gamma w_7 z_6, -\alpha w_1 z_3 + \alpha w_3 z_1 + \gamma w_4 z_6 + \alpha \gamma w_5 z_7 - \gamma w_6 z_4 - \alpha \gamma w_7 z_5, w_1 z_2 - w_2 z_1 + \gamma w_4 z_7 - \gamma w_5 z_6 + \gamma w_6 z_5 - \gamma w_7 z_4, -\alpha w_1 z_5 - \beta w_2 z_6 - \alpha \beta w_3 z_7 + \alpha w_5 z_1 + \beta w_6 z_2 + \alpha \beta w_7 z_3, w_1 z_4 - \beta w_2 z_7 + -\beta w_3 z_6 - w_4 z_1 - \beta w_6 z_3 + \beta w_7 z_2, \alpha w_1 z_7 + w_2 z_4 - \alpha w_3 z_5 - w_4 z_2 + \alpha w_5 z_3 - \alpha w_7 z_1, -w_1 z_6 + w_2 z_5 + w_3 z_4 - w_4 z_3 - w_5 z_2 + w_6 z_1) \in \mathbb{C}_\delta^7.$$

Egyszerű, bár elég hosszadalmas számítással bizonyítható, hogy a fenti $\circ$ skaláris szorzás egy szimmetrikus, a $\times$ vektoriális szorzás pedig egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés a $\mathbb{C}_\delta^7$ struktúrában:

Tetszőleges $t \in \mathbb{C}_\delta$ és $W, Z, W', Z' \in \mathbb{C}_\delta^7$ esetén

- (a) $W \circ Z = Z \circ W$ kommutatív,
- (b) $(t \cdot W) \circ Z = W \circ (t \cdot Z) = t \cdot (W \circ Z)$ homogén,
- (c) $(W + W') \circ Z = W \circ Z + W' \circ Z$ és $W \circ (Z + Z') = W \circ Z + W \circ Z'$ disztributív,
- (d) $W \times Z = -Z \times W$ anti-kommutatív,
- (e) $(t \cdot W) \times Z = W \times (t \cdot Z) = t \cdot (W \times Z)$ homogén,
- (f) $(W + W') \times Z = W \times Z + W' \times Z$ és $W \times (Z + Z') = W \times Z + W \times Z'$ disztributív,
- (g) $W \times W = \mathcal{O}$, ahol $\mathcal{O} = (0_c, 0_c, \dots, 0_c) \in \mathbb{C}_\delta^7$ a zéruselem,
- (h) $(W \times Z) \circ W = 0_c$ és $(W \times Z) \circ Z = 0_c$ ortogonalitási tulajdonság.

Érvényes továbbá a következő két fontos állítás:

1. Lemma. A $\mathbb{C}_\delta^7$ struktúra $\circ$ és $\times$ műveletei az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ struktúra megfelelő, szintén $\circ$ és $\times$ jellel jelölt műveleteinek természetes kiterjesztései.

2. Lemma. Ha $a + i \cdot b \in \mathbb{C}_\delta$, továbbá $U, V, U', V' \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$, s ezért $U + i \cdot V, U' + i \cdot V' \in \mathbb{C}_\delta^7$, akkor teljesülnek a következő azonosságok:

- (a) $(a + i \cdot b) \cdot (U + i \cdot V) = (a \cdot U - \delta \cdot b \cdot V) + i \cdot (a \cdot V + b \cdot U),$
- (b) $(U + i \cdot V) \circ (U' + i \cdot V') = [U \circ U' - \delta(V \circ V')] + i \cdot [U \circ V' + V \circ U'],$
- (c) $(U + i \cdot V) \times (U' + i \cdot V') = [U \times U' - \delta \cdot (V \times V')] + i \cdot [U \times V' + V \times U'].$

Tekintsük most a

$$(31) \quad H(\mathbb{C}_\delta) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{C}_\delta, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{C}_\delta^7 \right\}$$

alakú – *vektor-mátrixoknak* nevezett – hipermátrixok halmazát, s értelmezzünk e halmazban műveleteket a következő módon:

Skalárral való szorzás: ha $r \in \mathbb{R}, A \in H(\mathbb{C}_\delta)$, akkor legyen

$$(32) \quad r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix},$$

Összeadás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\delta)$, akkor legyen

$$(33) \quad A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix},$$

Szorzás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\delta)$, akkor legyen

$$(34) \quad A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \\ := \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}.$$

Két ilyen vektor-mátrixot természetesen pontosan akkor nevezünk *egyenlőnek*, ha azok komponensről komponensre megegyeznek.

Legyen ezután

$$(35) \quad s := (a + U) + (b + V) \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (a, b \in \mathbb{R}, U, V \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}))$$

egy tetszőleges általánosított szedenió és rendeljük hozzá azt az $A \in H(\mathbb{C}_\delta)$ hipermátrixot, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$(36) \quad A_{11} := a + i \cdot b, A_{22} := a - i \cdot b \in \mathbb{C}_\delta, A_{12} := -U + i \cdot V, A_{21} := U + i \cdot V \in \mathbb{C}_\delta^7.$$

A továbbiakban az ilyen alakú hipermátrixok halmazát *általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok* halmazának nevezzük és a $\text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$ szimbólummal jelöljük. Zorn eredetileg a split oktoniók reprezentálására fejlesztette ki a vektor-mátrixokat [14], [15].

Ha teljesen következetesen akarunk eljárni, akkor a dolgozatunk [10] első részében felbukkanó, az általánosított oktoniókat reprezentáló Zorn-féle vektor-mátrixokat utólag célszerűbb $\text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma)$ szimbólummal jelölni, hiszen ott a hipermátrixok mellékátlójában $\text{Im}(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ 3-dimenziós, az általánosított szedeniók kapcsán jelen munkában szereplő Zorn-féle vektor-mátrixok mellékátlójában pedig $\text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ 7-dimenziós elemei állnak.

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$, akkor $r \cdot A, A + B, A * B \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$ teljesül, tehát az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt ezen műveletekre nézve, így e struktúra részstruktúrát alkot a $H(\mathbb{C}_\delta)$ hipermátrixok struktúrájában.

Most már kimondhatjuk és bizonyíthatjuk is dolgozatunk fő eredményét, az általánosított szedeniók reprezentációs tételét.

2.Tétel. Az

$$(37) \quad F: \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta), (a + U) + (b + V) \cdot F \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix}$$

leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

BIZONYÍTÁS. Levezetésünkben a szinte tökéletes analógia miatt az általánosított oktoniókra vonatkozó reprezentációs tétel [10] gondolatmenetét követjük végig. Mint arra már a fentiekben is utaltunk, itt a szereplő vektor-mátrixok mellékatlójában nem 3, hanem 7-dimenziós elemek szerepelnek. Ezért bizonyításunkat szükségtelen részletezni, csupán az egyes lépéseket vázoljuk.

Az F egy bijektív leképezés, hiszen az $F^{-1}: \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta) \rightarrow \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ inverz hozzárendelés is leképezés.

Ha $r \in \mathbb{R}$ és $s \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor a (19) és (32) alapján egyszerű számítással beláthatjuk, hogy

$$(38) \quad F(r \cdot s) = r \cdot F(s)$$

teljesül, s ezért az F egy homogén leképezés. Ha $s, s' \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor a (19) és (33) felhasználásával

$$(39) \quad F(s + s') = F(s) + F(s')$$

adódik, s így az F egy additív leképezés. Az eddigiek azt jelentik, hogy az F egy $\mathbb{R}$ vektortér-izomorfizmus.

Az általánosított oktoniók reprezentációs analóg tétel lépéseit tovább követve, figyelembe véve esetünkben az $i^2 = -\delta$ összefüggést, tetszőlegesen

$$(40) \quad s = (a + U) + (b + V) \cdot F, \quad s' = (a' + U') + (b' + V') \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, $U, V, U', V' \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$) elempárra teljesül az

$$(41) \quad s \cdot s' = (a^* + U^*) + (b^* + V^*) \cdot F$$

előállítás, ahol

$$(42) \quad \begin{aligned} a^* &= a \cdot a' - \delta \cdot b \cdot b' - U \circ U' - \delta \cdot (V \circ V') \in \mathbb{R} \\ b^* &= a \cdot b' + a' \cdot b - U \circ V' + U' \circ V \in \mathbb{R} \\ U^* &= a \cdot U' + a' \cdot U + \delta \cdot b \cdot V' - \delta \cdot b' \cdot V + U \times U' - \delta \cdot (V \times V') \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}) \\ V^* &= a \cdot V' + a' \cdot V - b \cdot U' + b' \cdot U - U \times V' + U' \times V \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}). \end{aligned}$$

Ekkor pedig

$$(43) \quad F(s \cdot s') = \begin{pmatrix} a^* + i \cdot b^* & -U^* + i \cdot V^* \\ U^* + i \cdot V^* & a^* - i \cdot b^* \end{pmatrix}$$

teljesül. A (34) összefüggés felhasználásával most

$$(44) \quad F(s) * F(s') = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' + i \cdot b' & -U' + i \cdot V' \\ U' + i \cdot V' & a' - i \cdot b' \end{pmatrix},$$

e két vektor-mátrix szorzatára az 1. és 2. lemma felhasználásával beláthatjuk, hogy szintén

$$(45) \quad F(s) * F(s') = \begin{pmatrix} a^* + i \cdot b^* & -U^* + i \cdot V^* \\ U^* + i \cdot V^* & a^* - i \cdot b^* \end{pmatrix}$$

következik, így összevetve a (43) összefüggéssel

$$(46) \quad F(s \cdot s') = F(s) * F(s')$$

adódik, ami azt jelenti, hogy az F egy multiplikatív leképezés. A fentekkel együtt ez pontosan azt bizonyítja, hogy az F leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus. ■

A most bizonyított izomorfizmus alapján igaz az alábbi állítás.

Következmény. A $Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$ struktúra egy 16-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív, nem asszociatív és nem alternáló algebra az $\mathbb{R}$ test felett.

3. Tétel. A $H(\mathbb{C}_\delta)$ struktúra $*$ műveletére tetszőleges $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in H(\mathbb{C}_\delta)$ elempárra teljesül a

$$(47) \quad (A * B) * A = A * (B * A)$$

flexibilitási azonosság.

BIZONYÍTÁS. Számítsuk ki a (47) összefüggés mindkét oldalát, majd komponensről komponensre haladva hasonlítsuk össze az eredményül nyert két vektor-mátrixot.

Először a két vektor-mátrix bal felső komponensét hasonlítjuk össze. A kijelölt műveletek elvégzése után a $\mathbb{C}_\delta^7$ modulus skaláris és vektoriális szorzata műveletének (h) ortogonalitási tulajdonságát felhasználva könnyen adódik e komponensek egyenlősége. Ehhez teljesen hasonlóan a (h) ortogonalitási tulajdonság alapján nyerhetjük a két vektor-mátrix jobb alsó komponensének egyenlőségét is.

Ha most a jobb felső komponenseket hasonlítjuk össze, akkor a kijelölt műveletek elvégzése, az összevonások után a $\mathbb{C}_\delta^7$ modulus skaláris szorzás (a) kommutatív tulajdonságát, a vektoriális szorzás (g) tulajdonságát felhasználva, majd az azonos tagok mindkét oldalról történő elhagyása után e két komponensből a következő összefüggés marad:

$$(48) \quad (A_{12} \times B_{12}) \times A_{21} = A_{21} \times (B_{12} \times A_{12}).$$

A jobboldalon szereplő mennyiség viszont a vektoriális szorzás (d) tulajdonsága alkalmazásával egyenlővé alakítható a baloldali mennyiséggel. Így ez a két vektor-mátrix jobb felső komponense egyenlőségét igazolja. Teljesen hasonlóan a bal alsó komponensek összevetéséből az

$$(49) \quad (A_{21} \times B_{21}) \times A_{12} = A_{12} \times (B_{21} \times A_{21})$$

összefüggés marad, amelynek jobboldalán szereplő mennyiség a vektoriális szorzás (d) tulajdonsága alkalmazásával a baloldalon levő mennyiséggel alakítható egyenlővé, ami ezen komponensek egyenlőségét igazolja.

A fentiek együttesen igazolják, hogy a $*$ művelet valóban flexibilis a $H(\mathbb{C}_\delta)$ struktúrában. ■

A $H(\mathbb{C}_\delta)$ vektor-mátrixok halmazában értelmezett skalárral való szorzás, összeadás és szorzás $Zorn(\mathbb{C}_\delta)$ halmazra vonatkozó zártsága miatt érvényes az alábbi

Következmény. A $Zorn(\mathbb{C}_\delta)$ struktúra egy flexibilis algebra.

Végül az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ és a $Zorn(\mathbb{C}_\delta)$ algebra izomorfiaja alapján igaz a munkánkat záró

Következmény. Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ struktúra egy flexibilis algebra.

5. Összefoglalás

Dolgozatunkban a klasszikus valós test feletti, egymásra épülő algebraikkal foglalkoztunk. A konstrukció során az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárást alkalmaztuk [2] és [11]. A valós számokból az első megkettőzéssel az általánosított komplex számok 2-dimenziós, megkettőzésükkel az általánosított kvaterniók 4-dimenziós, ezek megkettőzésével az általánosított oktoniók 8-dimenziós [7], [8], a végül ezek újabb megkettőzésével az általánosított szedeniók 16-dimenziós algebraját nyerhetjük. Az általánosított komplex számok

és az általánosított kvaterniók algebrája asszociatív, az általánosított oktonióké alternáló, míg az általánosított szedeniók algebrája csupán flexibilis.

A véges dimenziós asszociatív algebrák mátrixokkal reprezentálhatók, az általánosított oktoniók és általánosított szedeniók nem asszociatív algebrái viszont eredményesen írhatók le a Zorn-féle vektor-mátrixok segítségével. A vizsgált 2×2 -es vektor-mátrixok főátlójában általánosított komplex számok, míg mellékátlójában ilyen általánosított komplex számokból álló vektorok szerepelnek. Az itt levő tiszta képzetes kvaterniók körében természetes módon bukkan fel a 3-dimenziós általánosított skaláris- és a vektoriális szorzás művelete az általánosított oktoniók leírására. Ezzel teljesen analóg a tiszta képzetes oktoniók körében természetesen lép fel a 7-dimenziós általánosított skaláris- és a vektoriális szorzás művelete az általánosított szedeniók leírása kapcsán.

Az algebrák vázolt felépítési láncja természetesen tovább is folytatható a növekvő 2 hatványok felé, azonban látható, hogy az ismételt megkettőzésekkel fokozatosan fogynak az értékes algebrai tulajdonságok. A dolgozatban szereplő algebrák a valós számok fogalmának erőteljes általánosításaként foghatók fel. Vizsgálatuk a klasszikus számok struktúráinak mélyebb megértését szolgálhatja.

Irodalomjegyzék

- [1] **Albert, A.A.**: Quadratic forms permitting composition. *Annals of Mathematics*, vol. 43 (1942), 161-177.
- [2] **Bremner, M.R. – Murakami, L. – Shestakov, I.P.**: Nonassociative Algebras. In: Hogben, L. (ed.): *Handbook of Linear Algebra*. CRC. Press. (2013).
- [3] **Dickson, L.E.**: On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. *Annals of Mathematics*, 2nd. 20(3), (1919), 155-171. doi: [10.2307/1967865](https://doi.org/10.2307/1967865)
- [4] **Ebbinghaus, H.D. – Hermes, H. – Hirzebruch, F. – Koecher, M. – Mainzer, M. – Mainzer, K. – Neukirch, J. – Prestel, A. – Remmert, R.**: *Numbers*. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. (1991).
- [5] **Kantor, I.L. – Szolodovnyikov, A.Sz.**: *Hiperkomplex számok*. Gondolat, Budapest (1985).
- [6] **Massey, W.S.**: Cross Product of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 90. No. 10.(1983), 697-701. doi: [10.1080/00029890.1983.11971316](https://doi.org/10.1080/00029890.1983.11971316)
- [7] **Péntek K.**: Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. *Dimenziók. Matematikai Közlemények VI. kötet.* (2018),25-30. doi: [10.20312/dim.2018.03](https://doi.org/10.20312/dim.2018.03)
- [8] **Péntek K.**: Az általánosított oktonióalgebrák egy új felépítéséről. *Dimenziók. Matematikai Közlemények VII. kötet.* (2019),19-27. doi: [10.20312/dim.2019.03](https://doi.org/10.20312/dim.2019.03)
- [9] **Péntek K.**: Az általánosított oktonióalgebrákról. *Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények 18. Szombathely*, (2020), 7-20.
- [10] **Péntek K.**: Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája. *Dimenziók. Matematikai Közlemények XI. kötet.* (2023),11-20. doi: [10.20312/dim.2023.02](https://doi.org/10.20312/dim.2023.02)
- [11] **Rosenfeld, B.**: *Geometry of Lie groups*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.(1997).
- [12] **Schray, J. – Manogue, C.A.**: Octonionic representation of Clifford algebras and triality. *Foundations of Physics* 26 (1), (1996), 17-70.
- [13] **Silagadze, Z.K.**: Multi-dimensional vector product. *Journal of Physics A: Mathematical and General* Vol. 35 (23), (2002), 4949-4953.
- [14] **Zorn, M.A.**: Theorie der alternativen Ringe. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer, Berlin, Heidelberg.(1931), 123-147.
- [15] **Zorn, M.A.**: Alternativkörper und quadratische Systeme. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer, Berlin, Heidelberg.(1933), 395-402.

Függelék

$\cdot$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	
E_2	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}		
E_3	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}			
E_4	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}				
E_5	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}					
E_6	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}						
E_7	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}							
E_8	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}								
E_9	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}									
E_{10}	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}										
E_{11}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}											
E_{12}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}												
E_{13}	E_{13}	E_{14}	E_{15}													
E_{14}	E_{14}	E_{15}														
E_{15}	E_{15}															

Táblázat. Az általánosított szedenió-egységek Cayley-féle szorzótáblája

Matematika a politechnikában és az építészetben¹

Andor Krisztián

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar, Kreatívipari Intézet
andor.krisztian@uni-sopron.hu,  0009-0008-5693-1169

ÖSSZEFOGLALÓ. Az ókori világtól az újkorig sok fejfájást okozott a nagy terek lefedése minél kevesebb oszlop felhasználásával. A kupolaszerkezetek megjelenése azzal a kompromisszummal járt, hogy a szerkezetben fellépő normáligénybevételek csak negatív értékűek lehettek, azaz csak nyomás felvételére voltak alkalmasak, így felfelé nagy „ívet” kellett kanyarítaniuk az építőmestereknek, megakadályozva a további hasznos szintek alkalmazását. Bernoulli-Navier párosról elnevezett hipotézis segítségével (a hajlított gerenda keresztmetszetei síkok maradnak) lehetővé váltak a pozitív normálerők kellő pontosságú szintű meghatározása. A rugalmas szál differenciálegyenletének meghatározásával megnyílt az út az építészetben a többszintes épületek tervezhetősége előtt.

ABSTRACT. From the ancient world to the modern era, covering large spaces using as few columns as possible caused many headaches. The appearance of the dome structures came with the compromise that the normal demand incomes occurring in the structure could only have a negative value, i.e. they were only suitable for absorbing pressure, so the builders had to make a big "curve" upwards, preventing the use of additional useful stories. With the help of a hypothesis named after the Bernoulli-Navier pair (the cross-sections of the bent beam remain flat), it became possible to determine the positive normal forces with sufficient accuracy. By defining the differential equation of the elastic line, the way was opened in architecture for the design of multi-story buildings.

1. Bevezetés

A nagy csarnokokat az ókorban oszlopcsarnokokkal (ld. egyiptomi, görög kultúra) tudták csak megoldani (az őskorban barlang volt a fedett lakóhely). Az újkor hajnalán született meg az igény ennek kiváltására. Ekkor kezdtek el foglalkozni rácsos szerkezetekkel és gerendákkal. Nagyon sok kutató, matematikus próbálta ezt az építészeti igényt mind jobban modellezni több-kevesebb sikerrel, néha egymástól külön. Galilei mellett mások is megfigyelték a konzoltartó felső és alsó öveinek eltérő viselkedését (1. ábra). Azonban az eltérő anyagstruktúrákban elvesztek az általános következtetések levonásához.

Végül a természettudományban a matematikai módszerek felhasználása nyitotta meg az utat, mint az számos más felfedezés esetén is megtörtént. A hajlított gerenda differenciálegyenlete vezetett el végül egy általános és egyszerű képlethez, melyet aztán már nem csak az elméleti fejtegetésben, hanem más politechnikai tudományokban is tudtak alkalmazni. Így a rugalmas szál közelítő differenciálegyenlete elindulhatott hódító útjára, mely során választ adhattak a kutatók és tervezők számos olyan kérdésre, melyek addig blokkolták a mérnöki modellezést.

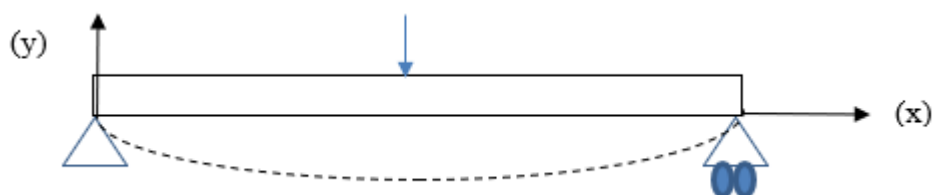


1. ábra. Galilei rajza a konzoltartóról

2. Matematikai egyenletek, tételek

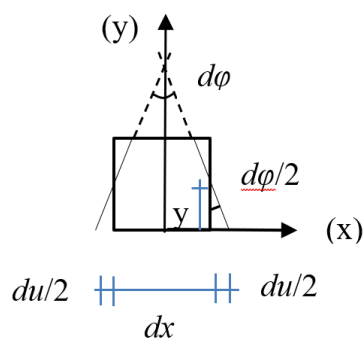
A mechanikában tanított és tanult gerendaelmélet a hajlított tartó vizsgálatával kezdődik.

Első körben a hajlított gerenda (2. ábra) geometriai megfigyelése történik, azaz geometriai egyenletek felírására kerül sor.



2. ábra. Hajlítással terhelt gerenda

Kiragadva egy közbenső (dx) vastagságú keresztmetszetet, kicsit felnagyítsuk azt fel és az alábbi geometria rajzolható fel.



3. ábra. Hajlított gerenda közbenső keresztmetszete a megváltozott szélső síkokkal

Azzal a feltételezéssel élve, hogy a meghajlított gerenda megváltozott keresztmetszeti szélső oldalai az egyszerűsítés kedvéért nem görbülnek meg, hanem síkok maradnak (Bernoulli-Navier hipotézis), felírható az alábbi egyszerű trigonometriai megfigyelés (3. ábra alapján):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{du}{2}}{y}.$$

Mivel tartószerkezetekről van szó, melyektől elvárás a kicsiny alakváltozás, így kis x értékekre $\operatorname{tg}(x)$ közelíthető x -szel, 2-vel egyszerűsítve az alábbi képletet kapjuk.

$$d\varphi = \frac{du}{y}. \quad (1)$$

A relatív alakváltozás felírható az alábbi formában:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}.$$

Az egyenlet rendezhető du -ra és így a (1) egyenlet alakja

$$d\varphi = \frac{\varepsilon_x dx}{y}.$$

Az egyenletet rendezni lehet ε_x -re, ekkor

$$y \frac{d\varphi}{dx} = \varepsilon_x$$

következik. A $\frac{d\varphi}{dx}$ kifejezés felismerhető, hogy nem más, mint a tartó κ_x görbülete az adott keresztmetszetben és a geometriai egyenlet végkövetkeztetése

$$y\kappa_x = \varepsilon_x. \quad (2)$$

A geometriai egyenlet után az anyagegyenlet felhasználásával, lineáris anyagmodellt feltételezve a következő egyenletet eredményezi (Hooke törvénye):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (3)$$

ahol

σ_x : az x irányú (tartó tengelyével egyező irányú) normálfeszültség (fajlagos erő),

E : a tartó anyagának rugalmassági modulusza,

ε_x : a korábban is ismertett relatív alakváltozás normál irányban (x).

Mivel a geometriai végegyenletben ε_x szerepel, érdemes az egyenletet erre rendezni, így

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

A mechanikában végül az egyensúlyi egyenletek felírásával folytatható a modellezés menete, mely az egyensúlyt feltételezi, vagyis, hogy a szerkezet statikus állapotban van; az aktív és passzív erők egyensúlyban vannak, illetve, ha láthatóvá tesszük a belső erőket (képzeletben elvágjuk a tartót), akkor a külső és belső erők is kiegyenlítik egymást.

Az egyensúlyi egyenletek közül elsőként a vízszintes (x irányú) erők összegzését végezzük el egy képzeletben elvágott tartón, láthatóvá téve az elvágott keresztmetszetben a belső fajlagos erőket (x irányú feszültségeket) [1].

$$\sum F_x = 0 = \int_A \sigma_x dA$$

A fenti egyenletben átható, hogy az nem tartalmaz erőket, mivel a tartón csak y irányú terhelésből (aktív erő) csak függőleges (y irányú) reakcióerők (passzív erők) ébredhetnek. Így az összegzés a láthatóvá tett fajlagos erőkre szorítkozik; a keresztmetszetben fellépő húzó- és nyomóerőknek, melyek a fajlagos erők (σ_x) integrálásával egyezik, egyensúlyban kell lenniük. Az egyenlet folytatható a (3) egyenlet behelyettesítésével, azaz

$$\sum F_x = 0 = \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA.$$

Felhasználva a (2) egyenletben kapott képletet, a

$$0 = \int_A E y \kappa_x dA$$

összefüggés adódik. A fenti egyenletben a konstansok kiemelhetők az integráljel elé, így

$$0 = E \kappa_x \int_A y dA.$$

Triviális megoldáson túli megoldást keresve az integrál 0-val való egyezését kell vizsgálni, hiszen egy hajlított tartó görbülete (κ_x) nem nullák, ahogy az anyagának merevsége sem (E). Felismerhető, hogy az integrál nem más, mint a keresztmetszet elsőrendű nyomatéka, mely akkor nulla, ha a súlyponti tengelyre van felvéve azt. Ebből levonható az a következtetés, miszerint a keresztmetszetben fellépő húzó és nyomófeszültségek a keresztmetszet súlypontjában nulla. Így a következő egyensúlyi egyenletet (nyomatéki egyenlet) a keresztmetszet súlypontjára kell majd felírni. Nyomatékot (M_z) okoznak a tartó tengelyére (x) merőleges erők egy adott keresztmetszet (z) tengelyére (hajlítás tengelye), valamint a nem elhanyagolható magasságú tartó keresztmetszetében ébredő belső erők a keresztmetszet ugyancsak (z) irányú súlyponti tengelyére. Tehát

$$\sum M_z = 0 = M_z + \int_A \sigma_x y dA.$$

Ismét felhasználva a (2) és (3) egyenletek képleteit, behelyettesítéssel az

$$\sum M_z = 0 = \int_A E \varepsilon_x y dA = \int_A E y \kappa_x y dA$$

egyenletet kapjuk. Kiemelve az integráljel elé a konstansokat, átrendezve a $-M_z$ -t a túloldalra ismét egy érdekes mechanikai kifejezést látható az integráljel után:

$$-M_z = E \kappa_x \int_A y^2 dA.$$

Itt is felismerhető, hogy az integrál jelen esetben a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, amit idegen szóval inerciának nevezünk és ez esetben I_z -vel jelölhetünk. Az egyenlet szépen rendezhető az alábbi szerint.

$$-M_z = E \kappa_x I_z. \quad (4)$$

A (4) egyenlet κ_x -re rendezve a hajlítónyomaték és a hajlítómerevség hányadosa, mely a mérnöki számítások egyik alappillére lesz rajzolódik ki, vagyis a görbület egyenesen arányos a hajlítónyomatékkal (M_z) és fordítva arányos a hajlítómerevséggel (EI_z).

$$\kappa_x = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (5)$$

A görbület matematikai összefüggése a

$$\kappa_x = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

képlettel írható fel.

Mérnöki megfontolásból kijelenthető ugyancsak a tartószerkezetektől elvárható kis alakváltozásra hajlamosság mentén, hogy terhelés hatására a lehajlás (y) kis értékű legyen ($l/250$). Nem nehéz belátni, amennyiben egy tartó nem hajlik le nagyon, akkor a lehajlás x -mentén történő megváltozása (y') is csekély lesz. A képletben a lehajlásváltozás négyzetre van emelve, így annak értéke még csekélyebb lesz; szinte nulla, így kijelenthető, hogy

$$\kappa_x \approx y''.$$

A (5) egyenletbe helyettesítve eljutunk a hőn keresett rugalmas szál közelítő differenciálegyenletéhez. Tehát

$$y'' \approx -\frac{M_z}{EI_z}.$$

A továbbiakban lehet bizonyítani a hajlított tartóban ébredő feszültségek számítására alkalmazott képletet, mely azonban túlmutat jelen előadás keretén.

3. Összefoglaló

A rugalmas szál közelítő differenciálegyenlete mérnöki szempontból kellő pontossággal modellezi a hajlított tartót. Minden más műszaki tudományban a hajlított gerenda modellezéséhez ezt a képletet alkalmazzák, így a Zimmermann-Eisemann féle levezetésben a vasúti pályák terhelésének modellezésénél is.

Jelen tanulmány is bizonyítja, hogy a műszaki felsőoktatásban a matematika emelt szintű ismerete nélkülözhetetlen. Bizonyítja azt is, hogy a matematika a gyakorlatban nagyon segíti a mechanika fejlődését, mely a mérnöki gondolkodás alappillére.

Köszönetnyilvánítás

Itt szeretném megköszönni Németh László és Szalay László kollégáim segítségét, kitartását a nehéz időkben, a tudomány átmentését. A kézirat bírálójának külön szeretném kifejezni a köszönetemet a cikk alapos átolvasása és hasznos tanácsai miatt.

Irodalomjegyzék

- [1] Kaliszky, S., Kurutzné, K.M., Mechanika II., Szilárdságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2000), 49–502.

Irracionális számokról középiskolásoknak¹

Zsuppán Sándor

Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
zsuppans@gmail.com,  0009-0006-3454-1528

ÖSSZEFOGLALÓ. A $\sqrt{2}$ irracionálisának olyan ismert bizonyításait mutatjuk be és hasonlítjuk össze, amelyek az emelt szintű matematika érettségien elvárt ismeretanyag különböző témaköreire épülnek. Röviden vizsgáljuk ezen bizonyítási módszerek általánosítási lehetőségeit más másodfokú illetve magasabb fokú algebrai számok esetén, valamint azt is, hogy hogyan kaphatunk belőlük az adott algebrai irracionális számot jól közelítő racionálist. A kapott eredményeket numerikus kísérletekkel szemléltetjük.

ABSTRACT. We present and compare some well-known proofs for the irrationality of $\sqrt{2}$, which are accessible for high-school students in the sense, that they are built on ideas which are parts of the requirements for an advanced level high-school graduation exam in mathematics in Hungary. We briefly investigate generalizations of these proofs for other quadratic irrationals and for algebraic irrationals of higher degree. We also consider possibilities for obtaining rational approximations using ideas from the investigated proofs. We illustrate the results with some numerical experiments.

1. Bevezetés

A $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tétel különféle bizonyításainak nagy száma és sokfélesége jelzi, hogy annak ellenére, hogy már nagyon régen igazolták, mégsem vesztett érdekességéből az idők során. Sőt, a tételt és egy bizonyítását az emelt szintű matematika érettségi vizsgát tevőknek ismernie kell. A matematika érettségi részletes vizsgakövetelményei [1] szerint ugyanis "[...] az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatóak, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló hallgatók felkészítése történik [...]". Ezen speciális anyagrészek egyike a "1.2.1 Fogalmak, tételek és bizonyítások a matematikában", azaz emelt szinten szükséges ismerni alapvető bizonyítási módszereket; továbbá "2.3 Racionális és irracionális számok" témakörben "Bizonyítsa, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám."

Ebben a rövid jegyzetben a $\sqrt{2}$ irracionálisának néhány olyan bizonyítását mutatjuk be, amelyek az emelt szintű matematika érettségien elvárt ismeretanyag különböző részeire (oszthatóság, számrendszerek, sorozatok, hasonlóság) építenek. Nem az a cél, hogy teljes áttekintést adjunk a különféle módszerekről, hiszen ezek száma meglehetősen nagy és közülük több is olyan ismeretanyagot igényel, amely az érettségien elvárható szinten túlmutat. Csak kiemelünk néhány megközelítést, ami középiskolás szinten feldolgozható és akár egy érettségi feleletben

¹ ENGLISH TITLE. About irrational numbers with high-school methods

KULCSSZAVAK. irracionális szám, közelítő tört, középiskolai módszerek.

KEYWORDS. irrational number, approximate fraction, high-school level methods.

is előadható. Ahelyett, hogy a szakirodalomból egyenként keresnénk ki a különféle gondolatmeneteket, kiindulópontként az [5] honlapot választhatjuk, amely a tétel 29 féle bizonyítását gyűjtötte össze és mutatja be (hivatkozásokkal együtt), némelyikből többféle változatot is. Mivel az egyes bemutatott ötletek különböző érettségi témakörökből valók, ezért szemléltethetjük velük az ezen témakörök közötti kapcsolatokat is. Vizsgáljuk, hogy a bemutatott módszerek mennyire általánosíthatók – részben maradv a emelt szintű érettségi ismeretanyagán belül – más kvadratikuss vagy magasabb fokú algebrai számok (pl. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\sqrt[n]{2}$) irracionálisának kimutatására. Megvizsgáljuk továbbá, hogy a bemutatott bizonyítások alapján hogyan nyerhetünk az irracionális számot jól közelítő közönséges törtet. Ezeket a módszereket olyan numerikus kísérletek eredményeivel szemléltetjük, amelyhez szükséges programozási készségek nem esnek messze digitális kultúra érettségén elvárt szinttől.

2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sokféleképpen

Az ebben a részben bemutatásra kerülő gondolatmenetekben közös, hogy indirekt megközelítéssel indulnak, azaz indirekt felteszik, hogy a $\sqrt{2}$ felírható közönséges tört alakban

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, (b \neq 0) \quad (*)$$

sőt némelyben az is szükséges, hogy ezen tört számlálója és nevezője relatív prím legyen vagy másképp fogalmazva a nevezője a lehető legkisebb legyen. A legkönnyebben úgy juthatunk célhoz, hogy a bizonyításban alkalmazunk egy "erős" másik tételt, amelyet azonban középiskolában nem bizonyítunk.

1. Bizonyítás ([8] és [5, Proof 3]). A számelmélet alaptétele szerint a (*)-beli a számláló és a b nevező is egyértelműen felbonthatók prímtényező szorzatára. Négyzeteikben a 2-es prímtényező kitevői párosak kell legyenek, hiszen minden prímtényező kitevőjét duplázzuk négyzetre emeléskor. Ez azonban ellentmond a (*) indirekt feltevással ekvivalens $a^2 = 2b^2$ összefüggésnek, mert ennek jobb oldalán a 2-es prímtényező kitevője páratlan a többször szorozótényező miatt. $\square$

Ez a bizonyítás egyszerűen általánosítható minden olyan egész szám négyzetgyökére, ami maga nem teljes négyzet, hiszen ekkor lennie kell legalább egy olyan prímtényezőnek a felbontásában, ami páratlan kitevővel szerepel. Ekkor ezzel a prímtényezővel dolgozhatunk az 1. bizonyításban: pl. $\sqrt{12}$ esetén az $a^2 = 12b^2$ -ben a bal oldalon a 3 prímtényező kitevője páros, de a jobb oldalon páratlan, ami ellentmondás.

2. Bizonyítás ([5, Proof 2]). A (*) indirekt feltevésben legyen a tört számlálója és nevezője relatív prím. A (*) feltevással ekvivalens $a^2 = 2b^2$ egyenlőségből adódóan a^2 és emiatt a is páros, pl. $a = 2x$ valamely $x \in \mathbb{N}$ -re. Ezt helyettesítve adódik $b^2 = 2x^2$, emiatt b^2 és így b is párosak. Így a és b is páros, ami ellentmond annak, hogy relatív prímnek feltételeztük őket. $\square$

Ez a bizonyítás, ha nem is annyira közvetlenül mint a megelőző, ugyancsak épít a számelmélet alaptételére, hiszen azzal indul, hogy (*) összefüggésben a számlálót és a nevezőt is prímtényezőik szorzatára bonthattuk és a közös prímtényezőkkal egyszerűsíthettünk.

3. Bizonyítás ([5, Proof 4]). A Rolle-féle racionális gyöktétel (racionális gyökteszt) szerint, ha egy egyszerűsített közönséges tört gyöke egy egész együtthatós polinomnak, akkor a számlálója osztója a konstans tagnak, a nevezője pedig a főegyütthatónak. Így egy egész együtthatós polinom minden racionális gyöke véges sok racionális szám közül kerülhet ki, minden más gyöke

emiatt irracionális. Eszerint az $x^2 - 2$ polinomnak az összes racionális gyöke a $\{-2; -1; 1; 2\}$ halmazból kerülhet csak ki. Mivel ezen halmaz egyik eleme sem gyök, ezért a polinom két gyöke, a $\pm\sqrt{2}$, irracionális kell legyen. $\square$

Mivel a felhasznált tétel – a racionális gyöktétel – nagyon általános, ezért a segítségével kapott 3. bizonyítás nem csak a $\sqrt{2}$ irracionálisának igazolására jó, hanem tulajdonképpen az összes $\mathbb{Q}$ -feletti irracionális algebrai szám esetére, csak az $x^2 - 2$ polinom helyett az adott algebrai szám minimálpolinomját kell használni. Noha a racionális gyöktétel az emelt szinten tanult fogalmakkal bizonyítható, mégsem része az érettségien elvárt ismeretanyagnak. Így a felhasználásával bizonyítani a $\sqrt{2}$ irracionálisát túlzásnak tekinthető.

Az előző bizonyításokban inkább a (*) indirekt feltétellel ekvivalens $a^2 = 2b^2$ egyenletet használtuk. (Még a 3. bizonyításban előkerülő $x^2 - 2 = 0$ egyenlettel is kapcsolatos $x = \frac{a}{b}$ helyettesítéssel.) Mivel ezen egyenletnek tehát nincs megoldása az egész számpárok halmazában, azaz $a^2 - 2b^2 \neq 0$, ezért $|a^2 - 2b^2| \geq 1$ kell legyen. Ezt a megfigyelést és a közép szinten is elvárt nevezetes azonosságot felhasználva

$$\left| \sqrt{2} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{(\sqrt{2} - \frac{a}{b})(\sqrt{2} + \frac{a}{b})}{\sqrt{2} + \frac{a}{b}} \right| = \left| \frac{2 - \frac{a^2}{b^2}}{\sqrt{2} + \frac{a}{b}} \right| = \frac{|a^2 - 2b^2|}{b(a + b\sqrt{2})} \geq \frac{1}{b(a + b\sqrt{2})}.$$

Mivel feltehető, hogy $b < a < 2b$, ha a $\sqrt{2}$ -t minél jobban megközelítő törtet szeretnénk, ezért $\frac{1}{b(a+b\sqrt{2})} > \frac{1}{b(2b+b\sqrt{2})} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})b^2}$. Így az emelt szintű ismeretanyag felhasználásával kaptuk a

$$\left| \sqrt{2} - \frac{a}{b} \right| > \frac{1}{(2 + \sqrt{2})b^2}, \text{ ha } 1 < \frac{a}{b} < 2$$

összefüggést, amivel jellemeztük, hogy a $\sqrt{2}$ mennyire pontosan közelíthető meg az $]1; 2[$ intervallumból való adott nevezőjű törtszám segítségével (diofantikus approximáció témakör).

4. Bizonyítás ([7] és [5, Proof 14]). A (*) indirekt feltevessel ekvivalens $a^2 = 2b^2$. Mivel minden egész szám négyzetének hármasszámrendszerbeli alakjában az utolsó nem nulla számjegy 1, ezért az $a^2 = 2b^2$ egyenletnek egyetlen egész (a, b) számpár sem lehet megoldása, hiszen a bal oldalon az utolsó nem nulla számjegy 1, de a jobb oldalon 2 a 2-vel való szorzás miatt. $\square$

Ez a bizonyítás rövideje ellenére csak a hármasszámrendszer és a hatványozás ismeretét igényli, amik emelt szinten elvárhatók. Kis módosítással átültethető a $\sqrt[3]{2}$ esetére, ha négyes számrendszerben dolgozunk, illetve $\sqrt[4]{2}$ esetére, ha ötös számrendszerben dolgozunk, azonban már nem működik $\sqrt[5]{2}$ esetére, ha a hatos számrendszerben dolgoznánk.

5. Bizonyítás ([4] és [5, Proof 5] alapján). Indirekt feltéve, hogy $\sqrt{2}$ racionális, létezik egy minimális $b \in \mathbb{Z}^+$ úgy, hogy $b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$. Vizsgáljuk a $b' = b(\sqrt{2} - 1) = b\sqrt{2} - b$ számot:

- egyrészt $b' \in \mathbb{Z}$, ugyanis b' két egész különbsége: $b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$ az indirekt feltevés miatt és nyilván $b \in \mathbb{Z}^+$,
- másrészt $0 < b' < b$, hiszen $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$,
- végül $b'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$, hiszen $b'\sqrt{2} = 2b - b\sqrt{2}$ (két egész szám különbsége, ld. itt is az indirekt feltevést).

Így b' egy b -nél kisebb pozitív egész, amire $b'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$ ugyanúgy mint $b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$. Ez azonban ellentmond az ilyen tulajdonságú számok között a b szám feltételezett minimalitásának. $\square$

Az előzőekkel ellentétben a [5, Proof 5], amely [4] cikkben jelenik meg először, nem használ fel segítségképpen más általános tételt (hanem csak az egészrész fogalmát, ld. $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$): ilyen értelemben eléggé "minimalista" bizonyításnak tekinthető, mégis teljes mértékben illeszkedik az emelt szinten elvárt ismeretanyagba. Ennek ellenére nem kizárólag a $\sqrt{2}$ esetére működik középiskolás szinten, hanem bármely olyan k pozitív egész szám négyzetgyöke esetén, ami maga nem négyzetszám: ekkor a $\sqrt{2} - 1$ szám helyett a bizonyításban a $\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ számot kell használni, ami ugyancsak pozitív és kisebb mint 1. Ha négyzetszámmal próbálkoznánk, akkor $\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor = 0$ és a bizonyítás nem működik. Sőt, a gondolatmenet általánosítható tetszőleges $\sqrt[n]{k}$ ($n \geq 2$) esetére, ld. [4].

Az előző bizonyításbelihez hasonló "minimalista" megközelítést alkalmaz az alábbi gondolatmenet is.

6. Bizonyítás ([8], [5, Proof 8]). A (*) indirekt feltételben $1 < \sqrt{2} = \frac{a}{b} < 2$, azaz $b < a < 2b$, amiből következően $0 < a - b < b$. Válasszuk (*)-ban a b nevezőt a lehető legkisebbnek és vizsgáljuk a $\frac{2b-a}{a-b}$ törtet:

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{2 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}.$$

Eszerint felírhattuk a $\sqrt{2}$ -t egy olyan közösleges törtként, aminek az $a - b$ nevezője kisebb mint a b nevező. Ez azonban ellentmond a b nevező feltételezett minimalitásának. $\square$

Az előző bizonyításban a $\sqrt{2}$ -t kétféleképpen is előállítottuk: egyrészt (indirekt) feltételeztük a (*) előállítást, másrészt a $\frac{2b-a}{a-b}$ törttel:

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(2b-a) = a(a-b) \Leftrightarrow 2b^2 - ab = a^2 - ab \Leftrightarrow a^2 = 2b^2,$$

amely összefüggést pedig az 1. és 2. bizonyításokban hasznosítottuk. Az 5. bizonyításban fontos szerepet játszó illetve a 6. bizonyításban is előforduló $\sqrt{2} - 1$ szám a következő gondolatmenetekben is központi szerepet kap.

7. Bizonyítás ([5, Proof 21]). Racionális szám egyszerű lánc tört alakja ismételt maradékos osztással (mint az euklideszi algoritmusban) meghatározhatóan mindig véges lánc törtet ad. A $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 1$ összefüggésből kapjuk, hogy

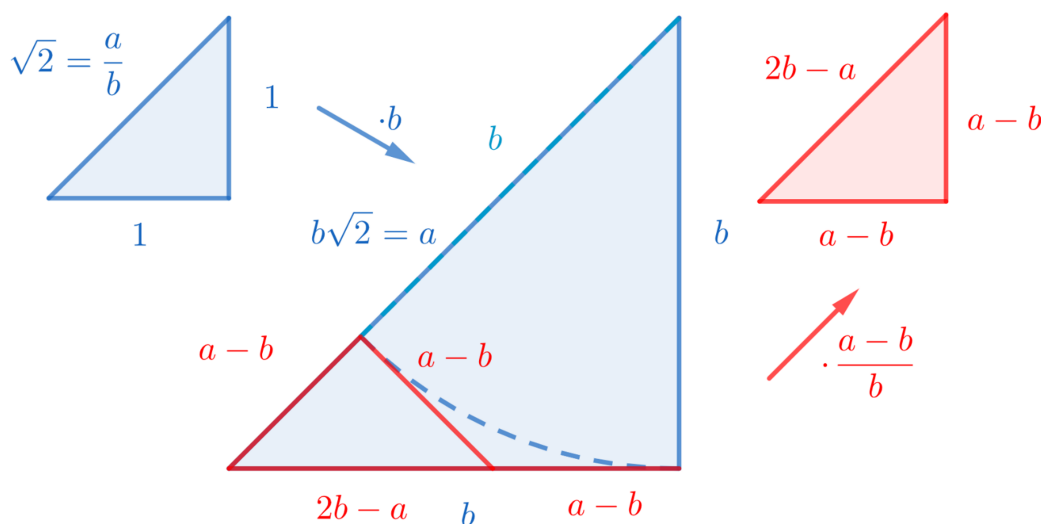
$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Így a $\sqrt{2}$ lánc tört alakja végtelen, azaz a $\sqrt{2}$ nem lehet racionális. $\square$

A maradékos osztás a 11. évfolyamos matematika tananyag része (középszinten is). Noha se a lánc tört, se az euklideszi algoritmus nem része az érettségien elvárt ismeretanyagoknak, de mindkettő rövid tárgyalása emelt szintű csoportban kis idő ráfordításával (csak példákon keresztül, mellőzve az elméleti bizonyításokat, pl. konvergencia stb.) lehetségesnek tűnik. A $\sqrt{2}$ egyszerű lánc tört alakjával azért van szerencsénk, mert az periodikus, sőt meglehetősen egyszerű a periódusa. (Egy irracionális szám egyszerű lánc tört alakja pontosan akkor periodikus, ha az megoldása egy egész együtthatós másodfokú egyenletnek: Euler-Lagrange.) Hasonlóan egyszerűen kaphatjuk az aranymetszés $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ arányszámának lánc tört alakját, hiszen φ a pozitív gyöke az $x^2 - x - 1$ polinomnak, emiatt $\varphi^2 = \varphi + 1$, amiből

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

8. Bizonyítás ([2] és [5, Proof 7]). Az 1. ábra alapján dolgozunk a (*) indirekt feltevessel. Nagyítva a bal oldali egyenlő szárú, derékszögű háromszöget a b -szeresére a képháromszög oldalhosszúságai (a átfogó és b befogók) egész számok. Ha az egyik befogót az átfogóval közös végpontja körül az átfogóra forgatjuk, majd a kapott pontból merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges a nagyított háromszögből egy kisebb egyenlő szárú derékszögű háromszöget választ le. Ennek a befogói $a-b$, az átfogója $2b-a$ hosszúságú, azaz mindhárom oldalának hossza egész szám. Ezt a folyamatot folytatva olyan, az eredetihez hasonló, minden határon túl zsugorodó



1. ábra. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hasonlósággal

háromszögeket szerkeszthetünk, amelyek oldalhosszai mégis mind egész számok lesznek. Ez azonban lehetetlen, tehát ellentmondásra jutottunk a (*) indirekt feltevésből kiindulva. $\square$

Az 1. ábrán lévő $1; 1; \frac{a}{b}$ oldalhosszúságú háromszög hasonló a kinagyított háromszögből leválasztott $a-b; a-b; 2b-a$ oldalhosszúságú háromszöghöz. Így bennük megegyezik az átfogó-befogó hosszúság arány, azaz $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$. Éppen ez az összefüggés játszott központi szerepet az algebrai jellegű 6. bizonyításban.

Ha egyenlő szárú derékszögű háromszög helyett egy egyenlő szárú, 72° - 72° - 36° szögű háromszöggel dolgozunk, amely alapja 1 egység hosszú, akkor szárai hossza az aranymetszés φ arányszáma. Ha ebben a háromszögben az egyik alapon fekvő szög szögfelezőjével választunk le egy hozzá hasonló kisebb háromszöget, akkor a fenti bizonyításhoz teljesen hasonló bizonyítást készíthetünk φ irracionalitására. A kapott háromszög-sorozatban a hasonlóság aránya éppen $\varphi - 1$ lesz.

Az 1. ábráról láthatóan a zsugorodó háromszög-sorozat oldalhosszúságai olyan mértani sorozatokat alkotnak, amelyek hányadosa (azaz a kicsinyítés aránya) éppen $\sqrt{2} - 1$, amely számérték már az előző két bizonyításban is előkerült. Tulajdonképpen ezen hasonlósági arány mint mértani sorozat hányados játszik szerepet a $\sqrt{2}$ irracionalitásának sorozatok felhasználásával történő következő bizonyításaiban is.

9. Bizonyítás ([5, Proof 9]). Vizsgáljuk a $(\sqrt{2} - 1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitív tagokból álló mértani sorozatot. Mivel hányadosa $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, ezért $(\sqrt{2} - 1)^n \rightarrow 0$, amikor $n \rightarrow \infty$. Másrészt teljes indukcióval belátható, hogy $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol a_n és b_n egyaránt egész számokból álló sorozatok. Valóban: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, továbbá, ha valamely n -re

$(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, akkor

$$(\sqrt{2} - 1)^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = (-a_n + 2b_n) + (a_n - b_n)\sqrt{2},$$

tehát $a_{n+1} = -a_n + 2b_n$ és $b_{n+1} = a_n - b_n$. Ha (*) indirekt feltevéssel indulunk, akkor

$$(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2} = a_n + b_n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a_nb + b_na}{b} \geq \frac{1}{b} > 0,$$

hiszen a kapott tört számlálója pozitív egész, azaz legalább 1. Ez azt jelenti, hogy a $(\sqrt{2} - 1)^n$ sorozat egy pozitív alsó korláttal rendelkezik, ami ellentmond annak, hogy nullához tart. $\square$

Ebben a bizonyításban a mértani sorozatok korlátossági és konvergencia tulajdonságait használtuk fel, amiket egy emelt szinten érettségizőnek ismernie kell. Az a_n és b_n sorozatok explicit képletének ismerete nem szükséges a bizonyításhoz, és levezetésük is túlmutat az érettségien elvárható ismeretanyag keretein, hiszen az $(a_n, b_n) \mapsto (a_{n+1}, b_{n+1})$ rekurziós mátrix hatványainak kiszámításával juthatunk a képletekhez:

$$a_n = \frac{1}{2} \left((\sqrt{2} - 1)^n + (-\sqrt{2} - 1)^n \right) = \sum_{j=0, j \text{ páros}}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} 2^{\frac{j}{2}},$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2} - 1)^n - (-\sqrt{2} - 1)^n \right) = \sum_{j=1, j \text{ páratlan}}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} 2^{\frac{j-1}{2}}.$$

Ha ezen képletek levezetése nem is, de talán a helyességük ellenőrzése elvárható emelt szinten. Mint az előző, a hasonló háromszög-sorozatokat felhasználó 8. bizonyítás, a 9. gondolatmenet is átvihető minimális változtatással az aranymetszés φ arányszámának esetére. Ekkor a $(\varphi - 1)^n = a_n + b_n\varphi$ mértani sorozatot kell vizsgálnunk, amelyben szereplő a_n és b_n sorozatokra a φ -t definiáló $\varphi^2 = \varphi + 1$ egyenlet felhasználásával kaphatunk rekurzív képleteket: $a_{n+1} = -a_n + b_n$ és $b_{n+1} = a_n$. Ezekből adódóan $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = -a_n + a_{n-1}$, emiatt a_n a váltakozó előjelű Fibonacci sorozat lesz.

10. Bizonyítás ([3] és [5, Proof 24]). Keressük az $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ rekurzív összefüggést kielégítő $x_n = bq^n$ mértani sorozatokat! Ehhez a mértani sorozat képletét a rekurzióba helyettesítéssel kapott $bq^{n+2} = -2bq^{n+1} + bq^n$ egyenletet kell megoldanunk, ami a $q^2 + 2q - 1 = 0$ másodfokú egyenletté egyszerűsödik. Ebből $q = \pm\sqrt{2} - 1$, így kétféle olyan mértani sorozatot kapunk, ami a vizsgált rekurzív szabálynak megfelel:

$$x_n = b(\sqrt{2} - 1)^n \quad \text{és} \quad x_n = b(-\sqrt{2} - 1)^n.$$

Közülük a $\sqrt{2} - 1$ hányadosút vizsgáljuk a (*) indirekt feltételből kiindulva az $x_0 = b \in \mathbb{Z}^+$, valamint az $x_1 = b(\sqrt{2} - 1) = b\frac{a-b}{b} = a - b \in \mathbb{Z}^+$ kezdő tag választással. Így ezen sorozat minden tagja egész szám lesz, hiszen a két kezdő tag egész, a sorozat többi tagját pedig az egész együtthatós $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ rekurziós összefüggésből számíthatjuk ki. De $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ miatt ez a mértani sorozat nullához tart, ami ellentmond annak, hogy minden tagja egész. $\square$

Összefüggést fedezhetünk fel az előbbi, sorozatokra építő és a hasonlóságot alkalmazó 8. bizonyítás között. Az $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ rekurzió első két tagja, $x_0 = b$ és $x_1 = a - b$, éppen az 1. ábrán lévő középső illetve jobb oldali derékszögű háromszögek befogóinak hosszúságai. Ezen két háromszög hasonlóságának aránya pedig, ugyancsak az 1. ábráról láthatóan, éppen

$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1$, ami a (*) indirekt feltételt alkalmazva éppen $\sqrt{2} - 1$, ami pedig éppen a vizsgált, nullához tartó, mértani sorozat hányadosa. Eszerint a 10. bizonyításban vizsgált rekurzió éppen a 8. bizonyításbeli háromszög sorozat befogóinak hosszúságait számítja ki, ha a megfelelő két kezdő taggal indítjuk.

Mindkét utóbbi sorozatokra épülő bizonyításban a $q = \sqrt{2} - 1$ hányadosú nullához tartó mértani sorozattal dolgoztunk. A 10. bizonyításban ez a sorozat egy látszólag légből kapott rekurziós képletet elégít ki, amely megfelelő kezdőtagok választása esetén csupa egész számból álló sorozatot eredményez. Ez a rekurziós összefüggés a $\sqrt{2}$ algebrai egész $x^2 - 2$ minimálpolinomjából kapható, amelybe először elvégezzük az $x \leftarrow x + 1$ helyettesítést, majd az $x^k \sim x_{n+k}$ ($k = 0, 1, 2$) megfeleltetéssel a kapott polinomból készítjük el a rekurzió képletét:

$$(x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1 \rightarrow x^2 = -2x + 1 \rightarrow x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n.$$

Ebben az eljárásban a minimálpolinom x változóját éppen a $\sqrt{2}$ egészrészével töltük el, így a kapott polinomot nullával egyenlővé téve egy olyan rekurzió karakterisztikus egyenletét kapjuk, amely egyenletnek az egyik megoldása éppen $\sqrt{2} - 1$. Így a rekurziónak lesz egy olyan mértani sorozat megoldása, amely egyrészt nullához tart, másrészt a (*) indirekt feltétel használatával olyan két kezdő tagot választhatunk, hogy a sorozat csak egész számból álljon, ami pedig ellentmondáshoz vezet. Ez a gondolatmenet általánosítható bármely α irracionális algebrai egészre:

- Ha $p(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j$ az α minimálpolinomja ($a_N = 1$) és $w = \lfloor \alpha \rfloor$, akkor
- $p_w(x) = p(x + w) = \sum_{j=0}^N a_j (x + w)^j = \sum_{j=0}^N a_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} x^i w^{j-i} = \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=i}^N \binom{j}{i} w^{j-i} a_j \right) x^i.$
- Mivel α egyszeres gyöke $p(x)$ -nek, ezért $0 < \alpha - w < 1$ egyszeres gyöke $p_w(x)$ -nek.
- A $p_w(x) = 0$ a karakterisztikus egyenlete az $x_{n+N} = -\sum_{i=0}^{N-1} A_i x_{i+N}$ rekurziónak, amelyben az együtthatók az $A_i = \sum_{j=i}^N \binom{j}{i} w^{j-i} a_j$ összefüggéssel származtathatók.
- Ezen rekurzió egyik megoldása a nullához tartó $x_n = b(\alpha - w)^n$ mértani sorozat ($b > 0$).
- Ha indirekt feltesszük, hogy $\alpha = \frac{P}{Q}$, valamely P és $Q \neq 0$ egészekkel, akkor $b = Q^{N-1}$ választásával a sorozat első N kezdőtagja $x_j = P^j Q^{N-1-j}$ ($0 \leq j \leq N-1$) lesz, amelyek mind egész számok.
- Mivel a $p(x)$ polinom minden a_j együtthatója egész, ezért az eltolt $p_w(x)$ polinom minden A_i együtthatója is egész, tehát a belőle származtatott $x_{n+N} = -\sum_{i=0}^{N-1} A_i x_{i+N}$ rekurziónak eleget tévő $x_n = b(\alpha - w)^n$ mértani sorozat minden tagja egész lesz, ami ellentmond annak, hogy ez a sorozat nullához tart.

Ha az α valós algebrai egész nem irracionális, akkor egész és $\alpha = w = \lfloor \alpha \rfloor$ a fenti gondolatmenetben. Így a vizsgált $x_n = b(\alpha - w)^n$ sorozat nulladik tagja b , de a többi tag mind nulla, emiatt a fenti gondolatmenet nem működik. Ahogy a 10. bizonyítás a fenti módon általánosítható minden algebrai egészre, ugyanúgy a megelőző 9. bizonyítás is általánosítható, amint az a [9] cikkből kiderül. Sőt a segítségével – egyszerűbb esetekben – az irracionális számot jól közelítő közönséges törteket is meg tudunk adni.

3. Közelítő közönséges törtek, numerikus kísérletek

A legtöbb előzőekben bemutatott módszer azon kívül, hogy igazolja a $\sqrt{2}$ irracionálisát, nem ad lehetőséget a $\sqrt{2}$ -t jól közelítő közönséges törtek megtalálására.

A lántörtekre épülő 7. bizonyításból azonban kaphatunk ilyen (és nem csak a $\sqrt{2}$ esetén) úgy, hogy a végtelen lántört egy véges szegmensét vesszük racionális közelítésként. Sőt, amint a kapcsolódó szakirodalomból kiderül, az adott nevezőjű törtek között ezzel a módszerrel találhatjuk meg a legjobban közelítő közönséges törtet. A lántörtbe fejtés meghaladja az érettségien elvárható ismeretanyag szintjét, a $\sqrt{2}$ vagy a φ esetében azért mégis egyszerűbb dolgunk van, mert lántört alakjuk periodikus és – lévén a minimálpolinomjuk egyszerű – könnyen kiszámítható. Azonban ez a periodikusság kizárólag a racionális együtthatós másodfokú egyenletek irracionális megoldásai esetében áll fenn, a többi algebrai szám lántört alakja már nem periodikus és – egy megfelelő pontosságú tizedestört közelítés hiányában – nem is könnyen származtatható, jóval az érettségi ismeretanyag szintje felett van, ezért középiskolában nem feldolgozható. Egy ilyen módszert tartalmaz [6], amelyben a $[c_0, c_1, \dots]$ lántörtbe fejtendő N -edfokú algebrai szám $p(x)$ minimálpolinomjának segítségével határozza meg egymás után a lántört c_n jegyeit felhasználva a $p_0(x) = p(x)$, $p_{n+1}(x) = -x^N p_n(\frac{1}{x} + c_n)$ rekurzív módon definiált polinom sorozatot.

A sorozatokra épülő 9. bizonyítás is lehetőséget ad közelítő racionális számok megadására. Ugyanis, ha α irracionális, akkor léteznek egész számokból álló a_n és b_n sorozatok úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n \alpha) = 0$, így megfelelő küszöbindex felett $\alpha \approx -\frac{a_n}{b_n}$. A $\sqrt{2}$ vagy a φ számok esetén ilyen sorozatok rekurzív módon viszonylag könnyen megadhatók úgy, hogy a megfelelő irracionális szám és egészrészének különbségét hatványozzuk felhasználva az irracionális szám minimálpolinomját, ld. 9. bizonyítást. Ezzel a módszerrel nyerhetünk közelítő közönséges törteket magasabb fokú algebrai számok esetére is úgy, hogy végigvisszük a [9] cikkben felvázolt módszert. Ehhez jelölje α a kérdéses algebrai irracionális számot és w egy olyan racionális számot, amelyre $|\alpha - w| < 1$, pl. $w = \lfloor \alpha \rfloor$. Jelölje $p(x) = x^N + \sum_{j=0}^{N-1} c_j x^j$ ($c_j \in \mathbb{Q}$) az α (N -ed fokú algebrai irracionális) minimálpolinomját, azaz

$$\alpha^N = - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \alpha^j \quad (1)$$

Képezzük az $(\alpha - w)^n$ hatványokat az

$$(\alpha - w)^n = \sum_{j=0}^{N-1} b_j^{(n)} \alpha^j = \vec{\alpha}^T \cdot \vec{b}^{(n)} \quad (2)$$

alakban, amelyben $\vec{\alpha} = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1})$ az α hatványait tartalmazó oszlopvektor, valamint a megfelelő $b_j^{(n)}$ együtthatókat tartalmazó oszlopvektor $\vec{b}^{(n)} = (b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \dots, b_{N-1}^{(n)})$.

- $0 \leq n < N$ esetén a binomiális tétellel kapjuk, hogy $b_j^{(n)} = \binom{n}{j} (-w)^{n-j}$ ($0 \leq j \leq n$) illetve $b_j^{(n)} = 0$ ($n < j \leq N-1$),
- $N \leq n$ esetén a $\vec{b}^{(n)}$ együtthatóvektorokat rekurzióval kaphatjuk meg felhasználva az (1) összefüggést minden lépésben arra, hogy az

$$(\alpha - w)^n = (\alpha - w) \sum_{j=0}^{N-1} b_j^{(n-1)} \alpha^j$$

szorzatban keletkező α^N hatványt behelyettesítsük az α legfeljebb $(N - 1)$ -fokú polinomjával. Így jutunk a

$$b^{(n)} = -wb^{(n-1)} + \mathcal{C}b^{(n-1)} \quad (3)$$

rekurzióhoz, amelyben $\mathcal{C} \in \mathbb{Q}^{N \times N}$ az α minimálpolinomjának kísérő mátrixa:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -c_{N-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Mivel $w \in \mathbb{Q}$ számot úgy választjuk, hogy $|\alpha - w| < 1$, ezért $n \rightarrow \infty$ esetén $(\alpha - w)^n \rightarrow 0$. Emiatt bizonyos $n_0 > 1$ küszöbindex esetén mondhatjuk (2) alapján, hogy $\vec{\alpha}^T \cdot b^{(n)} \approx 0$, ha $n \geq n_0$. Eszerint rögzítve egy $n_0 > 1$ küszöbindexet összeállíthatjuk a

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha}^T \cdot b^{(n_0+1)} \approx 0 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}^T \cdot b^{(n_0+N-1)} \approx 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

racionális együtthatós egyenletrendszer, amelyben az $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1}$ hatványokat "ismeretlenként" kezeljük. Mivel ebből rendszerből csak az α irracionális számot közelítő közönséges tört értékére van szükségünk, ezért alkalmazhatjuk a Cramer szabályt:

$$\alpha \approx r_{n_0} = \frac{\det \left(b_j^{(i)} \right)_{\substack{j=0,2,\dots,N-1 \\ i=n_0+1,\dots,n_0+N-1}}}{\det \left(b_j^{(i)} \right)_{\substack{j=1,2,\dots,N-1 \\ i=n_0+1,\dots,n_0+N-1}}}. \quad (5)$$

Ha az α többi hatványát közelítő közönséges törtre is szükség lenne, akkor megoldhatjuk a teljes egyenletrendszer is.

1. Példa. Például az $\alpha = [b, a, a, \dots]$, $(a, b > 0)$ periodikus lánc tört egy kvadratikus algebrai egészet definiál, hiszen minimálpolinomja $x^2 - (2b-a)x - (b(a-b)+1)$. A megfelelő másodfokú egyenlet pozitív megoldása $\alpha = \frac{2b-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. Emiatt $N = 2$ és (4) csak egy egyenletre redukálódik, így nem is szükséges determinánsokat számítani, középiskolás szintű átalakításokkal dolgozhatunk. A módszer által adott, α -t közelítő r_n közönséges törtek sorozata könnyen származtatható, ha a 3. fejezetben vázolt módszerben a $w = \lfloor \alpha \rfloor = b$ választással élünk. Ugyanis ekkor $(\alpha - b)^1 = -b + \alpha$, azaz $r_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{b}{1} = b$ a rekurzív sorozat kezdő tagja és

$$(\alpha - b)^{n+1} = (\alpha - b)(a_n + b_n \alpha) = (-ba_n + (b(a-b) + 1)b_n) + (a_n + (b-a)b_n)\alpha,$$

amiből pedig kapjuk a rekurziós szabályt:

$$r_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = -\frac{-ba_n + (b(a-b) + 1)b_n}{a_n + (b-a)b_n} = \frac{br_n + b(a-b) + 1}{r_n + (a-b)}.$$

Ha az $\alpha = [b, a, a, \dots]$ lánc tört kifejtésben az első n jegyből álló résztörtet r'_n jelöli, akkor $r'_1 = b$ és

$$r'_{n+1} = b + \frac{1}{a - b + r'_n} = \frac{b(a - b + r'_n) + 1}{a - b + r'_n} = \frac{br'_n + b(a - b) + 1}{r'_n + (a - b)},$$

tehát az α -t közelítő lánc törtek r'_n sorozata megegyezik az r_n sorozattal. Például:

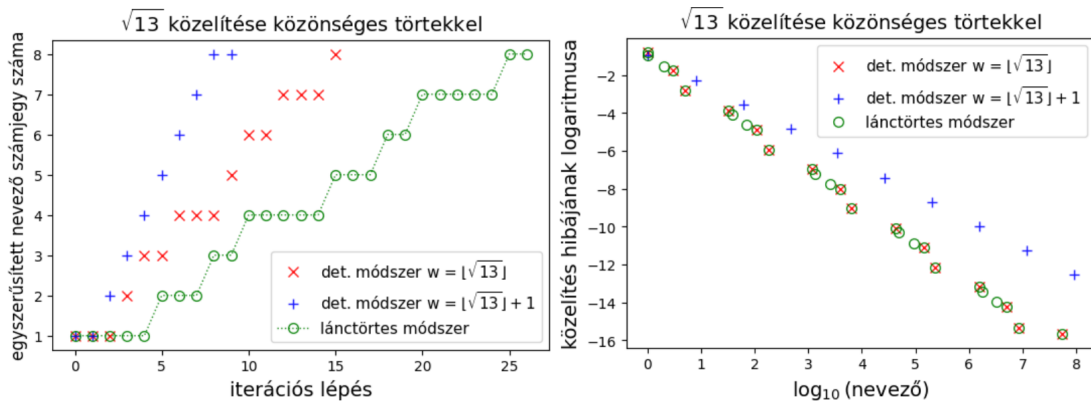
- $a = 2$ és $b = 1$ esetén az $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots]$ -t legjobban közelítő r_n közösleges törték sorozata $r_1 = 1$ és $r_{n+1} = \frac{r_n+2}{r_n+1}$, vagy
- $a = 4$ és $b = 2$ esetén az $\sqrt{5} = [2, 4, 4, \dots]$ -t legjobban közelítő r_n közösleges törték sorozata $r_1 = 2$ és $r_{n+1} = \frac{2r_n+5}{r_n+2}$ mindkét – [6] illetve [9] alapján működő – módszerből.

2. Példa. Az $\alpha = [b, a, c, a, c, \dots] = \frac{a(b-2c) + \sqrt{a^2(2b-c)^2 + 4a(ab(c-b)+c)}}{2a}$ irracionális szám esetén, amely az $\alpha^2 = (2b-c)\alpha + b(c-b) + \frac{c}{a}$ egyenletnek tesz eleget, a mértani sorozatos módszerből kapott közelítő közösleges törték sorozata $r_1 = b$ választása esetén itt is megegyezik a közelítő lánc törték sorozatával, ugyanis mindkettőt az

$$r_{n+1} = \frac{abr_n + ab(c-b) + c}{ar_n + a(c-b)}$$

rekurzív összefüggéssel számíthatjuk ki. Például $\sqrt{15} = [3, 1, 6, 1, 6, \dots]$ esetén mindkét módszerrel $r_1 = 3$, $r_{n+1} = \frac{3r_n+15}{r_n+3}$.

3. Példa. Nem minden kvadratikus algebrai irracionális esetén garantált, hogy a [6] alapján készíthető lánc tört sorozat és a [9] alapján készíthető közelítő törték sorozata megegyezik. Például a $\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \dots] = 3,60555\dots$ öt jegy hosszúságú periódussal bíró lánc tört esetén a Pythonban megvalósított algoritmusok az alábbi eredményeket adták. A [9]



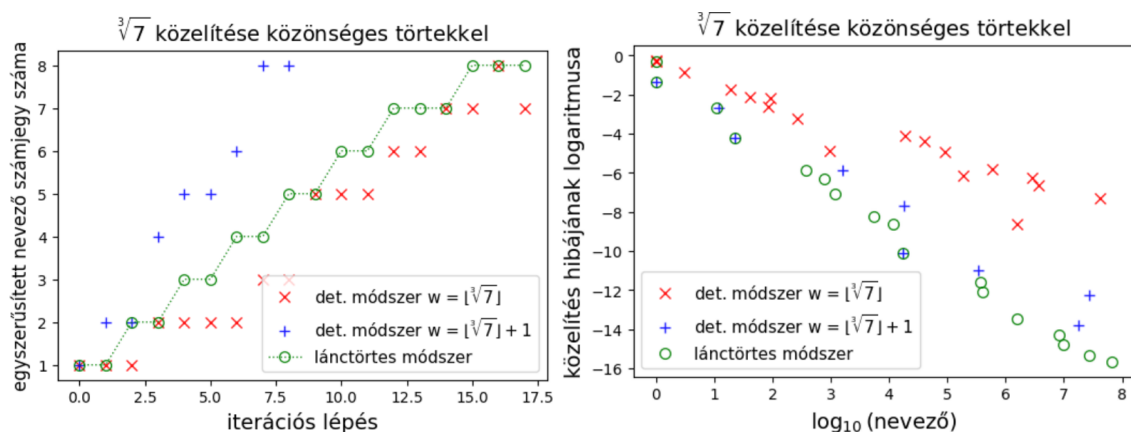
2. ábra. $\sqrt{13}$ közelítése közösleges törtékkel

alapján működő mértani sorozatos megközelítést a $\sqrt{13}$ -hoz legközelebb álló két egész szám, $w = \lfloor \sqrt{13} \rfloor = 3$ és $w = \lfloor \sqrt{13} \rfloor + 1 = 4$ felhasználásával is megvalósítottuk. A $w = 4$ választás esetén – mivel a $\sqrt{13}$ közelebb van a 4-hez – gyorsabban konvergáló közösleges tört sorozatot kapunk ugyan, de a lánc törtes módszer illetve a $w = 3$ -mal kapott tört sorozat ugyanazt a pontosságot jóval kisebb nevezőjű közösleges törttel képes elérni. Azonban a $w = 3$ választással készített tört sorozat nem tartalmaz minden közelítő lánc tört sorozatbeli tagot.

Az előbbi példákban láthatóan az emelt szintű érettségin elvárható ismeretanyaggal megérthető, a 9. bizonyításban használt mértani sorozatokra építő módszer néhány, főképp egyszerű periódusú lánc törttel megadható kvadratikus irracionális esetén ugyanazokat a közelítő közösleges törtéket adja mint a sokkal bonyolultabb [6] cikkben tárgyalt módszer amennyiben a benne használt paramétert $w = \lfloor \sqrt{\alpha} \rfloor$ alapján választjuk. Sőt, a mértani sorozatos módszerhez ekkor még az (5)-beli determinánsokat sem kell kiszámolni, hiszen ekkor a (4) rendszer egyetlen egyenletre redukálódik.

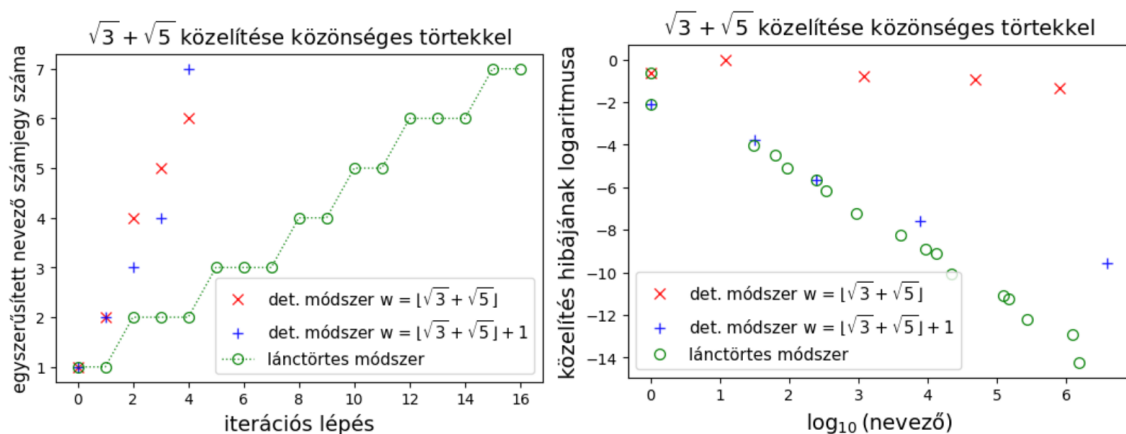
Magasabb fokú algebrai irracionálisok esetén azonban a lánc tört kifejtésük már nem periodikus, valamint (4) rendszer is több egyenletből áll. Noha ekkor a (4)-(5) alapján egyszerűbb esetekben kézzel is kiszámítható lenne egy, a vizsgált irracionális számot közelítő közönséges törtekből álló sorozat, de annak összevetése a lánc törtes módszer által adott eredménnyel úgysem lenne teljesen lehetséges a periodikusság hiánya miatt. Ezért ezt az esetet itt csak néhány, számítógépes segítséggel készített példával szemléltetjük.

4. Példa. A $\sqrt[3]{7} = [1, 1, 10, 2, 16, 2, 1, 4, 2, 1, 21, 1, 3, 5, 1, 2, 1, 1, 2, \dots] = 1.91293118\dots$ harmadfokú algebrai egész esetén a $w = \lfloor \sqrt[3]{7} \rfloor = 1$ választással a determinánsos módszer lassabban konvergál, hiszen ekkor a 9 bizonyításbeli $\sqrt[3]{7} - 1$ mértani sorozat hányadosa nagyobb ugyanis $\sqrt[3]{7}$ közelebb van a 2-höz. A gyorsabban konvergáló sorozat sem találja meg az összes jól közelítő közönséges törtet, amit a lánc törtes módszerrel megtalálunk.



3. ábra. $\sqrt[3]{7}$ közelítése közönséges törtekkel

5. Példa. A $\sqrt{3} + \sqrt{5} = [3, 1, 30, 2, 1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 17, \dots] = 3.9681187\dots$ negyedfokú algebrai irracionális (minimálpolinomja $x^4 - 16x^2 + 4$) esetén a $w = 3$ paraméterrel készített determinánsos módszer konvergenciája nagyon lassú, mivel a megfelelő mértani sorozat hányadosa $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 3 = 0.9681187\dots$ nagyon közel van az 1-hez. A másik $w = 4$ paraméterrel kapott sorozat ugyan gyorsabban konvergál, de már kevés iterációs lépésben nagyon nagy nevezőjű egyszerűsített közelítő törtet ad, azaz kihagyja a sokkal kisebb nevezőjű, de mégis jobban közelítő törteket.



4. ábra. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ közelítése közönséges törtekkel

A kézzel is kiszámítható példák és a numerikus kísérletek eredményei alapján megállapíthatjuk, hogy a [9] cikkben kifejtett elméleti módszer csak alacsony fokú algebrai irracionálisok esetén ad elfogadható közelítő közönséges törteket, azaz a módszer inkább elméleti mind gyakorlati jelentőségű. Az emelt szintű érettségien elvárható ismeretanyaggal kizárólag a kvadrátikus, azon belül is csak az egyszerű lánc tört-periódusú, irracionális számok esetén van esélyünk a jól közelítő közönséges törtek megtalálására. Magasabb fokú algebrai irracionálisok esetén közelítő törtek keresésére inkább ajánlatos a [6] cikkben ismertetett lánc törtes módszert alkalmazni, ami azonban sajnos messze túlmutat a középiskolában elsajátítható ismeretanyag keretein.

Irodalomjegyzék

- [1] *Matematika részletes érettségi vizsgakövetelmény*, (2021).
URL <https://tinyurl.com/jem5k7e8>
- [2] **Apostol, T.**: *Irrationality of the square root of two - a geometric proof*, The American Mathematical Monthly, **107** (2000), No. 9, 841–842. doi: [10.2307/2695741](https://doi.org/10.2307/2695741).
- [3] **Araújo, J.**: *A difference equation leading to the irrationality of $\sqrt{2}$* , The American Mathematical Monthly, **121** (2014), No. 5, 443. doi: [10.4169/amer.math.monthly.121.05.443](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.05.443).
- [4] **Beigel, R.**: *Irrationality without number theory*, The American Mathematical Monthly, **98** (1991), No. 4, 332–335. doi: [10.2307/2323801](https://doi.org/10.2307/2323801).
- [5] **Bogomolny, A.**: *Square root of 2 is irrational*, (1996-2018).
URL https://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml
- [6] **Bombieri, E. and van der Poorten, A.**: *Continued Fractions of Algebraic Numbers*, In: Bosma, W., van der Poorten, A. (eds) *Computational Algebra and Number Theory. Mathematics and Its Applications*, Springer, Dordrecht., **325** (1995), 137–152. doi: [10.1007/978-94-017-1108-1_10](https://doi.org/10.1007/978-94-017-1108-1_10).
- [7] **Gaunnt, R.**: *The irrationality of $\sqrt{2}$* , The American Mathematical Monthly, **63** (1956), No. 4, 247. doi: [10.2307/2310352](https://doi.org/10.2307/2310352).
- [8] **Laczkovich, M.**: *Conjecture and Proof*, The Mathematical Association of America, 2001.
- [9] **Ungar, P.**: *Irrationality of square roots*, Math Magazine, **79** (2006), No. 2, 147–148. doi: [10.1080/0025570X.2006.11953394](https://doi.org/10.1080/0025570X.2006.11953394).

