DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
XII. kötet, 2024 91–103

doi:10.20312/dim.2024.10

Az általánosított szedeniók és a vektor-mátrixok algebrája[1]

Péntek Kálmán
Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Savaria Egyetemi Központ, Berzsenyi Dániel Pedagógusképző Központ, Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu, 0000-0002-9467-7025

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban az általánosított Cayley-Dickson-féle eljárással megkonstruáljuk az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_{\alpha}$, az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebráját. Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával. A $\mathbb{C}_{\alpha}$ és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ asszociatív, de az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nem asszociatív algebrák. A probléma megoldására Zorn, M.A. 1931-ben értelmezte a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ általánosított szedeniók vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In this paper, with the use of generalized Cayley-Dickson process we construct the algebra of generalized complex numbers $\mathbb{C}_{\alpha}$, the algebra of generalized quaternions $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, the algebra of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ and the algebra of generalized sedenions $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Any finite dimensional associative algebra is isomorphic to a subalgebra of total matrix algebra. The $\mathbb{C}_{\alpha}$ and $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ is associative, but the algebra $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ and $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix representation of split octonions algebra in 1931. In the last section of the paper, we construct the vector-matrix representation of generalized sedenions $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

1. Bevezetés

Ez a dolgozat a szerző általánosított oktoniókról 2023-ban megjelent [10] munkájának szerves folytatása. Először kiegészítjük az általánosított oktoniók algebrájára vonatkozó ismereteket, majd megalapozzuk az általánosított szedeniók algebráját.

A Cayley-Dickson-féle [3] megkettőzési eljárás Albert[1] által értelmezett általánosítását felhasználva több lépésben egymásra épülő algebrák egész sorozatához juthatunk így el. Először a valós számok $\mathbb{R}$ struktúrájából, mint önmaga feletti 1-dimenziós algebrából kiindulva a megkettőzési eljárással nyerjük az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebráját. Az $\alpha = 1$ értékadás esetén a klasszikus Gauss-féle komplex számokat eredményezi az eljárás.

Ezután ennek a $\mathbb{C}_{\alpha}$ algebrának a megkettőzésével juthatunk el az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ $(\beta \in \mathbb{R})$ 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, de asszociatív algebrájához. Az $\alpha = \beta = 1$ választás mellett a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók adódnak.

[1] ENGLISH TITLE. The algebra of generalized sedenions and vector-matrices.
KULCSSZAVAK. Cayley-Dickson eljárás, általánosított oktonió, általánosított szedenió, Zorn-féle vektor-mátrix.
KEYWORDS. Cayley-Dickson process, generalized octonion, generalized sedenion, Zorn vector-matrix.

Ezen $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra megkettőzése vezet el az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem is asszociatív, de alternáló algebrájához. Az $\alpha = \beta = \gamma = 1$ értékek választásával a klasszikus Cayley-Graves-féle oktoniók származtathatók az eljárásból. Dolgozatunk előző részében lényegében eddig jutottunk el a [10] felépítésben.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra megkettőzésével tudjuk majd ezután értelmezni az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\delta \in \mathbb{R}$) 16-dimenziós algebráját, s megvizsgáljuk annak legfontosabb algebrai tulajdonságait. A dolgozat utolsó fejezetében pedig megadjuk az általánosított szedeniók algebrája vektor-mátrix reprezentációját.

2. Az általánosított oktoniókról

Ebben a fejezetben kiegészítjük az általánosított oktoniókra vonatkozó azon ismereteket, amelyek szükségesek a dolgozat későbbi részeihez.

Az előző dolgozatban bemutatott felépítés eredményeként az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúrában, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben létezik egy olyan, $\{e_i\}_{i=0}^{7}$ általánosított oktonió-egységeknek nevezett elemekből álló bázis, amelyben a bázis elemei között érvényes a [10] dolgozat végén bemutatott Cayley-féle szorzótábla.

Minden $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem egyértelműen írható fel ekkor

(1) $$o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$$

alakban, amelyet az általánosított oktonió *valós algebrai alak*jának nevezünk. Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra egy olyan 8-dimenziós, $\mathbb{R}$ test feletti vektortér, amelyben érvényesek az alábbi számolási szabályok:

Skalárral való szorzás, ha $r \in \mathbb{R}$, $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(2) $$r \cdot o = r \cdot \left(\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=0}^{7} (r \cdot a_i) \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} ,$$

Összeadás, ha $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$, $o' = \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(3) $$o + o' = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^{7} (a_i + b_i) \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} .$$

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra szorzási művelete pedig egy bilineáris leképezés, így a struktúra e szorzási művelete disztributív az összeadásra nézve, amelyet az oktonió-egységek Cayley-féle szorzótáblája teljesen és egyértelműen meghatározza:

Szorzás, ha $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$, $o' = \sum_{j=0}^{7} b_j \cdot e_j \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(4) $$o \cdot o' = \left(\sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{7} b_j \cdot e_j\right) = \sum_{i,j=0}^{7} (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} .$$

További részletek a [9] dolgozatban találhatók.

Az $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem *konjugált*ján az $\bar{o} = a_0 \cdot e_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniót értjük.

Könnyen beláthatjuk, hogy a konjugált képzésére vonatkozóan teljesülnek a következő összefüggések: Ha $r \in \mathbb{R}$ és $o, o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

a) $\bar{\bar{o}} = o$ involutív
b) $\overline{r \cdot o} = r \cdot \bar{o}$ homogén
c) $\overline{o + o'} = \bar{o} + \overline{o'}$ additív
d) $\overline{o \cdot o'} = \overline{o'} \cdot \bar{o}$ anti-mutiplikatív.

Egyszerű számolással igazolhatjuk a következő állítás helyességét.
Ha $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o = a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 + \gamma a_4^2 + \alpha\gamma a_5^2 + \beta\gamma a_6^2 + \alpha\beta\gamma a_7^2 \in \mathbb{R} .$$

Az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonió *normá*ján a fenti állításban szereplő valós számot értjük, azaz

(5) $$N(o) := o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o \in \mathbb{R} .$$

A Cayley-Graves számok $\mathbb{O}$ struktúrájára vonatkozó megfelelő tétel [5] természetes általánosításával analóg módon bizonyítható a következő állítás:
Ha $o, o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(a) $N(o \cdot o') = N(o) \cdot N(o')$, a norma egy multiplikatív függvény,
(b) az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem invertálható pontosan akkor, ha $N(o) \neq 0$,
(c) ha $o, o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ invertálható elemek, akkor $o \cdot o' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ is invertálható és érvényes az $(o \cdot o')^{-1} = (o')^{-1} \cdot (o)^{-1}$ összefüggés.

Az $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$, $o' = \sum_{i=0}^{7} b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elempár *skaláris szorzat*án az

(6) $$o \circ o' := a_0 b_0 + \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha\beta a_3 b_3 + \gamma a_4 b_4 + \alpha\gamma a_5 b_5 + \beta\gamma a_6 b_6 + \alpha\beta\gamma a_7 b_7 \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

Egyszerű direkt számolással láthatjuk be a skaláris szorzat alábbi tulajdonságait:
A $\circ: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{R}$, $(o, o') \mapsto o \circ o'$ egy szimmetrikus bilineáris leképezés, ha $r \in \mathbb{R}$, $o, o', o'' \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(a) $o \circ o' = o' \circ o$, kommutatív,
(b) $(r \cdot o) \circ o' = o \circ (r \cdot o') = r \cdot (o \circ o')$, homogén,
(c) $(o + o') \circ o'' = o \circ o'' + o' \circ o''$, a skaláris szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Az $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonió *valós rész*én (*skalár rész*) az

(7) $$S(o) := a_0 \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes rész*én (*vektor rész*) pedig a

(8) $$V(o) := U = \sum_{i=1}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{R}^7$$

elemet értjük.

A fentiekből következik, hogy minden $o = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elem egyértelműen írható fel

(9) $$o = S(o) + V(o) = a_0 + U$$

alakban, amelyet az általánosított oktonió *Hamilton-féle alak*jának nevezzük.

Ha egy $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktonióra $S(o) = 0$ teljesül, akkor *tiszta képzetes oktonió*ról beszélünk, ezek halmazát $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ szimbólummal jelöljük.

Ha $U = \sum_{i=1}^{7} a_i \cdot e_i$, $V = \sum_{i=1}^{7} b_i \cdot e_i \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ két tiszta képzetes oktonió, akkor ezek szorzatára egyszerű számítás eredményeként érvényes az alábbi összefüggés:

(10) $$U \cdot V = -(\alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha\beta a_3 b_3 + \gamma a_4 b_4 + \alpha\gamma a_5 b_5 + \beta\gamma a_6 b_6 + \alpha\beta\gamma a_7 b_7) + [(\beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2 + \gamma a_4 b_5 - \gamma a_5 b_4 - \beta\gamma a_6 b_7 + \beta\gamma a_7 b_6)e_1 + (-\alpha a_1 b_3 + \alpha a_3 b_1 + \gamma a_4 b_6 + \alpha\gamma a_5 b_7 - \gamma a_6 b_4 - \alpha\gamma a_7 b_5)e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1 + \gamma a_4 b_7 - \gamma a_5 b_6 + \gamma a_6 b_5 - \gamma a_7 b_4)e_3 + (-\alpha a_1 b_5 - \beta a_2 b_6 - \alpha\beta a_3 b_7 + \alpha a_5 b_1 + \beta a_6 b_2 + \alpha\beta a_7 b_3)e_4 + (a_1 b_4 - \beta a_2 b_7 + \beta a_3 b_6 - a_4 b_1 - \beta a_6 b_3 + \beta a_7 b_2)e_5 + (\alpha a_1 b_7 + a_2 b_4 - \alpha a_3 b_5 - a_4 b_2 + \alpha a_5 b_3 - \alpha a_7 b_1)e_6 + (-a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 - a_4 b_3 - a_5 b_2 + a_6 b_1)e_7]$$

E két tiszta képzetes oktonió $U \circ V$ szimbólummal jelölt *skaláris szorzat*án a (10) előállítás első, gömbölyű zárójelben szereplő kifejezését, $U \times V$ szimbólummal jelölt *vektoriális szorzat*án pedig a (10) előállítás második, szögletes zárójelben szereplő kifejezését értjük. Így tehát érvényes az

(11) $$U \cdot V = -(U \circ V) + [U \times V]$$

előállítás. Az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ halmazban értelmezett $\circ$ skaláris szorzat maga is egy szimmetrikus bilineáris leképezés, amely a $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra szintén $\circ$ jellel jelölt skaláris szorzatának leszükítése.

Egyszerű, bár hosszadalmas számolással igazolhatjuk, hogy az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ halmazban értelmezett $\times$ vektoriális szorzat pedig egy anti-szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre teljesülnek az alábbi összefüggések:
Ha $r \in \mathbb{R}, U, V, W \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$, akkor

(a) $V \times U = -(U \times V)$, anti-kommutatív,

(b) $(r \cdot U) \times V = U \times (r \cdot V) = r \cdot (U \times V)$, $h$omogén,

ha az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ struktúrában a skalárral való szorzást az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra megfelelő műveletének leszükítésével értelmezzük.

(c) $(U + V) \times W = U \times W + V \times W$ a vektoriális szorzás jobbról disztributív az összeadásra,

(d) $U \times (V + W) = U \times V + U \times W$ a vektoriális szorzás balról disztributív az összeadásra.

Érvényesek továbbá a következő összefüggések is:

(e) $U \times U = O$, ahol $O = \sum_{i=1}^{7} 0 \cdot e_i \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ a zéruselem,

(f) $(U \times V) \circ U = 0 \in \mathbb{R}$ ortogonalitási tulajdonság,

(g) $(U \times V) \circ V = 0 \in \mathbb{R}$ ortogonalitási tulajdonság.

Az (f) és (g) szerint tehát a vektoriális szorzás eredménye ortogonális a szorzat mindkét tényezőjére. A 7-dimenziós vektoriális szorzásra vonatkozó további ismeretek pl. [6], [12] és [13] dolgozatokban találhatók.

A (11) összefüggés természetes általánosításaként igazolható, hogy ha Hamilton-féle alakjával

$$a_0 + U, b_0 + V \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma},$$

akkor

(12) $$(a_0 + U) \cdot (b_0 + V) = (a_0 \cdot b_0 - U \circ V) + (a_0 \cdot V + b_0 \cdot U + U \times V).$$

Itt a jobb oldali első zárójeles kifejezés a Hamilton-féle alakban nyert szorzat valós, a második zárójeles kifejezés pedig a szorzat képzetes része.

3. Általánosított szedeniók

Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrájából kiindulva tekintsük az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ direktszorzatot, s értelmezzük e halmazban a következő műveleteket:

(13) Skalárral való szorzás: $r \cdot (u_0, u_1) := (r \cdot u_0, r \cdot u_1)$,

(14) Összeadás: $(u_0, u_1) + (v_0, v_1) := (u_0 + v_0, u_1 + v_1)$,

(15) Szorzás: $(u_0, u_1) \cdot (v_0, v_1) := (u_0 \cdot v_0 - \delta \cdot \overline{v_1} \cdot u_1, u_1 \cdot \overline{v_0} + v_1 \cdot u_0)$,

ahol $\delta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter, továbbá $r \in \mathbb{R}, (u_0, u_1), (v_0, v_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek.

Egyszerű, bár időigényes számítással bizonyítható a következő állítás:
Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ direktszorzat a (13) – (15) műveletekkel egy 16-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, amelyben $0_s := (0_o, 0_o)$ az összeadás, $1_s := (1_o, 0_o)$ a szorzás neutrális eleme.

Ezen algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti 16-dimenziós vektortérben az általánosított oktoniók $\{e_i\}_{i=0}^{7}$ bázisának felhasználásával

(16) $1_s = (1_o, 0_o) = (e_0, 0_o), (e_1, 0_o), (e_2, 0_o), \dots, (e_7, 0_o), F := (0_o, 1_o) = (0_o, e_0), (0_o e_1), (0_o, e_2), \dots, (0_o, e_7)$

egy természetes bázist alkot.

A $V := \{(u_0, 0_o) : u_0 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}\}$ részalgebrát alkot az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrában, mivel zárt a (13) – (15) műveletekre nézve. Az

(17) $f_s\colon\ \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to V, u_0 \mapsto (u_0, 0_o)$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így az

(18) $f_s^*\colon\ \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}, u_0 \mapsto (u_0, 0_o)$ egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként nyert struktúrát $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított szedeniók algebrájá*nak nevezzük.

Az $F = (0_o, 1_o) \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elemre teljesülnek a következő összefüggések:

(a) $F^2 = -\delta$,

(b) bármely $u_1 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ esetén $(0_o, u_1) = u_1 \cdot F$,

(c) minden $(u_0, u_1) \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elem egyértelműen írható fel $u_0 + u_1 \cdot F$ alakban,

amely alakot az általánosított szedenió *oktonió-algebrai alak*jának nevezzük.

Minden $u_0, u_1 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ egyértelműen írható fel (9) alapján $u_0 = a_0 + U$, illetve $u_1 = b_0 + V$ Hamilton-féle alakban, ezért a fentiek szerint minden általánosított szedenió is egyértelműen állítható elő

(19) $s = u_0 + u_1 \cdot F = (a_0 + U) + (b_0 + V) \cdot F$

alakban, ahol $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ és $U, V \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$. A (19) előállítást az általánosított szedenió Hamilton-féle alakjának nevezzük.

Az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakjával való számolás szabályait foglalja össze a következő állítás:

Ha $r \in \mathbb{R}, u_0 + u_1 \cdot F, v_0 + v_1 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor

(a) Skalárral való szorzás: $r \cdot (u_0 + u_1 \cdot F) = (r \cdot u_0) + (r \cdot u_1) \cdot F$

(b) Összeadás: $(u_0 + u_1 \cdot F) + (v_0 + v_1 \cdot F) = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) \cdot F$

(c) Szorzás: $(u_0 + u_1 \cdot F) \cdot (v_0 + v_1 \cdot F) = (u_0 \cdot v_0 - \delta \cdot \overline{v_1} \cdot u_1) + (u_1 \cdot \overline{v_0} + v_1 \cdot u_0) \cdot F$.

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk a következő állítást:
Ha $r \in \mathbb{R}, e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ $(0 \leq i \leq 7)$ a természetes bázis elemei és $F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor érvényesek az

(20) $$(r \cdot e_i) \cdot F = r \cdot (e_i \cdot F) \qquad (0 \leq i \leq 7)$$

összefüggések.

Az általánosított oktoniók valós algebrai alakja, az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakja és a fenti állítás szerint azonnal adódik a következő előállítás:

Ha $u_0 = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot e_i$ és $u_1 = \sum_{i=0}^{7} a_{i+8} \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor az $s = u_0 + u_1 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elem egyértelműen írható fel

(21) $$s = a_0 \cdot e_0 + a_1 \cdot e_1 + \cdots + a_7 \cdot e_7 + a_8 \cdot (e_0 \cdot F) + a_9 \cdot (e_1 \cdot F) + \cdots + a_{15} \cdot (e_7 \cdot F)$$

alakban.

Az $F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elem tulajdonságait rögzítő állítás (b) részének felhasználásával a (16) bázis elemeire vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

(22) $$E_0 := (e_0, 0_o), E_1 := (e_1, 0_o), \ldots, E_7 := (e_7, 0_o), E_8 := (0_o, e_0),$$
$$E_9 := (0_o, e_1), \ldots, E_{15} := (0_o, e_7),$$

ekkor a fenti állítás alapján minden általánosított szedenió egyértelműen írható fel

(23) $$s = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i$$

formában. Ezt az előállítást az általánosított szedenió *valós algebrai alak*jának nevezzük, az előállításban szereplő $\{E_i\}_{i=0}^{15}$ elemeket pedig *általánosított szedenió-egységek*nek hívjuk.

Egyszerű direkt számolással láthatjuk be [4] klasszikus oktoniókra bemutatott állításának mintájára a következő állítást:

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniókra és az $E_8 = F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ elemre érvényesek a következő azonosságok:

(a) $(a + 0_o \cdot E_8) \cdot (b + 0_o \cdot E_8) = a \cdot b$,

(b) $(a + 0_o \cdot E_8) \cdot (0_o + b \cdot E_8) = a \cdot (b \cdot E_8) = (b \cdot a) \cdot E_8$,

(c) $(0_o + a \cdot E_8) \cdot (b + 0_o \cdot E_8) = (a \cdot E_8) \cdot b = \left(a \cdot \bar{b}\right) \cdot E_8$,

(d) $(0_o + a \cdot E_8) \cdot (0_o + b \cdot E_8) = (a \cdot E_8) \cdot (b \cdot E_8) = E_8^2 \cdot \left(\bar{b} \cdot a\right)$.

Megjegyezzük, hogy az (a) részben szereplő összefüggés szerint az olyan általánosított szedeniókkal, amelyek „képzetes része” nulla, úgy kell számolni, mint a közönséges általánosított oktoniókkal.

Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebra szorzási művelete mindkét oldalról disztributív az összeadás műveletére nézve, így e szorzást egyértelműen meghatározza az általánosított szedenió-egységek Cayley-féle szorzótáblája. A fentiek alapján már bizonyítható a következő:

1.Tétel. Az általánosított szedenió-egységek Cayley-féle szorzótáblája a Függelék táblázatában található.

BIZONYÍTÁS. A műveleti táblázat bal felső 8×8 –as parcellája az előző állítás (a) része szerint azonos az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniók egységeinek szorzótáblájával. A műveleti táblázat jobb felső 8×8 –as parcellája a fenti állítás (b) részének felhasználásával igazolható. A műveleti táblázat bal alsó 8×8 –as parcellájának helyessége a fenti állítás (c) részének alkalmazásával számolható ki. Végül a műveleti táblázat jobb alsó 8×8 –as parcellája a fenti állítás (d) része alkalmazásával igazolható. ■

Vegyük észre, hogy a Táblázat belső tartományának bal felső 2×2 –es mezője a $\mathbb{C}_\alpha$, bal felső 4×4 –es mezője a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, bal felső 8×8 –as mezője pedig az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra egységeinek szorzótáblája.

Az általánosított szedenió-egységeknek a Táblázatban bemutatott szorzótáblája néhány fontos tulajdonságát említjük.

(a) A Táblázat minden sora és minden oszlopa minden általánosított szedenió-egységet pontosan egyszer tartalmaz.

(b) E_0 a struktúra szorzási neutrális eleme: $E_0 \cdot E_i = E_i \cdot E_0 = E_i \qquad (0 \leq i \leq 15)$.

(c) Az E_0 általánosított szedenió-egység skalárszorosai pontosan a Táblázat főátlójában találhatók.

(d) A Táblázat főátlója feletti háromszög alakú tartomány főátlóra vonatkozó tükörképe éppen a főátló alatti háromszög alakú tartománya ellentétes előjellel, vagyis a Táblázat antiszimmetrikus a főátlóra nézve: $E_j \cdot E_i = -E_i \cdot E_j \qquad (i \neq j\ ,\ i,j \neq 0)$.

A (d) tulajdonságból közvetlenül következik, hogy az általánosított szedeniók szorzási művelete nem kommutatív. Legyen továbbá $X := E_1 + E_{12}, Y := E_2 + E_{15} \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitását felhasználva adódik $X \cdot Y = 0_s$, vagyis ezen struktúra tartalmaz zérusosztókat. Egyszerű számítással beláthatjuk azt is, hogy e két elemmel

(24) $$(X \cdot X) \cdot Y \neq X \cdot (X \cdot Y) \quad \text{és} \quad (X \cdot Y) \cdot Y \neq X \cdot (Y \cdot Y)$$

teljesül, vagyis $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ egy nem alternáló algebra. Ezért viszont ezen algebra szorzása nem lehet asszociatív sem, ellenkező esetben ugyanis teljesülnie kellene a (24) azonosságoknak is.

Az általánosított szedeniók (23) valós algebrai alakja és a Táblázat felhasználásával egyszerűen igazolhatók az alábbi számolási szabályok:

Ha $r \in \mathbb{R}, s_1 = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i$, $s_2 = \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot E_i \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor

(a) skalárral való szorzás: $r \cdot s_1 = r \cdot \left(\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i\right) = \sum_{i=0}^{15}(r \cdot a_i) \cdot E_i$,

(b) összeadás: $s_1 + s_2 = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i + \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot E_i = \sum_{i=0}^{15}(a_i + b_i) \cdot E_i$,

(c) szorzás: $s_1 \cdot s_2 = \left(\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{15} b_j \cdot E_j\right) = \sum_{i,j=0}^{15}\left(a_i \cdot b_j\right) \cdot \left(E_i \cdot E_j\right)$.

4. Az általánosított szedeniók reprezentációja vektor-mátrixokkal

Első lépésként a $\delta \in \mathbb{R}$ paraméter segítségével építsük fel az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\delta$ algebráját az $i \notin \mathbb{R}$ képzetes egységgel, amelyre tehát $i^2 = -\delta$ teljesül. Ezt követően pedig az $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ paraméterekkel konstruáljuk meg az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebráját az előző részekben látottak szerint.

Értelmezzünk műveleteket most a $\mathbb{C}_\delta^7 := \left\{(w_1, w_2, \ldots, w_7) : w_j \in \mathbb{C}_\delta\ (1 \leq j \leq 7)\right\}$ direktszorzatban a következő módon:

skalárral való szorzás: ha $t \in \mathbb{C}_\delta, W = (w_1, w_2, \ldots, w_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$, akkor

(25) $$t \cdot W = t \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_7) := (t \cdot w_1, t \cdot w_2, \ldots, t \cdot w_7)\ ,$$

összeadás: ha $W = (w_1, w_2, \ldots, w_7), Z = (z_1, z_2, \ldots, z_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$, akkor

(26) $$W + Z = (w_1, w_2, \ldots, w_7) + (z_1, z_2, \ldots, z_7) := (w_1 + z_1, w_2 + z_2, \ldots, w_7 + z_7)\ .$$

A $\mathbb{C}_\delta$ algebra az összeadás és a szorzás műveletével ugyanakkor egy kommutatív, nem zéró gyűrű, amely ezért egy invariáns bázis számú gyűrű is egyben. Így a $\mathbb{C}_\delta^7$ struktúra egy $\mathbb{C}_\delta$ feletti 7-rangú baloldali szabad modulus a

(27) $\quad B_1 := (1_c, 0_c, \dots, 0_c), B_2 := (0_c, 1_c, 0_c, \dots, 0_c), \dots, B_7 := (0_c, 0_c, \dots, 1_c)$

standard bázissal. E modulus műveleteinek értelmezéséből következik, hogy minden

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_7) = (u_1 + i \cdot v_1, u_2 + i \cdot v_2, \dots, u_7 + i \cdot v_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$$

elem egyértelműen írható fel

(28) $\quad W = U + i \cdot V$

alakban, ahol $U = (u_1, u_2, \dots, u_7), V = (v_1, v_2, \dots, v_7) \in \mathbb{R}^7$.

A (10) összefüggés ötletéből kiindulva a $\mathbb{C}_\delta^7$ szabad modulusban egy skaláris szorzás és egy vektoriális szorzás műveletet vezethetünk be a következő módon:

Skaláris szorzás:

ha $W = (w_1, w_2, \dots, w_7), Z = (z_1, z_2, \dots, z_7) \in \mathbb{C}_\delta^7$ és $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, akkor legyen

(29) $\quad W \circ Z := \alpha w_1 z_1 + \beta w_2 z_2 + \alpha\beta w_3 z_3 + \gamma w_4 z_4 + \alpha\gamma w_5 z_5 + \beta\gamma w_6 z_6 + \alpha\beta\gamma w_7 z_7 \in \mathbb{C}_\delta$,

Vektoriális szorzás:

(30) $\quad W \times Z := (\beta w_2 z_3 - \beta w_3 z_2 + \gamma w_4 z_5 - \gamma w_5 z_4 - \beta\gamma w_6 z_7 + \beta\gamma w_7 z_6, -\alpha w_1 z_3 + \alpha w_3 z_1 + \gamma w_4 z_6 + \alpha\gamma w_5 z_7 - \gamma w_6 z_4 - \alpha\gamma w_7 z_5, w_1 z_2 - w_2 z_1 + \gamma w_4 z_7 - \gamma w_5 z_6 + \gamma w_6 z_5 - \gamma w_7 z_4, -\alpha w_1 z_5 - \beta w_2 z_6 - \alpha\beta w_3 z_7 + \alpha w_5 z_1 + \beta w_6 z_2 + \alpha\beta w_7 z_3, w_1 z_4 - \beta w_2 z_7 + -\beta w_3 z_6 - w_4 z_1 - \beta w_6 z_3 + \beta w_7 z_2, \alpha w_1 z_7 + w_2 z_4 - \alpha w_3 z_5 - w_4 z_2 + \alpha w_5 z_3 - \alpha w_7 z_1 \ , \ -w_1 z_6 + w_2 z_5 + w_3 z_4 - w_4 z_3 - w_5 z_2 + w_6 z_1) \in \mathbb{C}_\delta^7$.

Egyszerű, bár elég hosszadalmas számítással bizonyítható, hogy a fenti $\circ$ skaláris szorzás egy szimmetrikus, a $\times$ vektoriális szorzás pedig egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés a $\mathbb{C}_\delta^7$ struktúrában:

Tetszőleges $t \in \mathbb{C}_\delta$ és $W, Z, W', Z' \in \mathbb{C}_\delta^7$ esetén

(a) $W \circ Z = Z \circ W$ kommutatív,
(b) $(t \cdot W) \circ Z = W \circ (t \cdot Z) = t \cdot (W \circ Z)$ homogén,
(c) $(W + W') \circ Z = W \circ Z + W' \circ Z$ és $W \circ (Z + Z') = W \circ Z + W \circ Z'$ disztributív,
(d) $W \times Z = -Z \times W$ anti-kommutatív,
(e) $(t \cdot W) \times Z = W \times (t \cdot Z) = t \cdot (W \times Z)$ homogén,
(f) $(W + W') \times Z = W \times Z + W' \times Z$ és $W \times (Z + Z') = W \times Z + W \times Z'$ disztributív,
(g) $W \times W = \mathcal{O}$, ahol $\mathcal{O} = (0_c, 0_c, \dots, 0_c) \in \mathbb{C}_\delta^7$ a zéruselem,
(h) $(W \times Z) \circ W = 0_c$ és $(W \times Z) \circ Z = 0_c$ ortogonalitási tulajdonság.

Érvényes továbbá a következő két fontos állítás:

1. Lemma. A $\mathbb{C}_\delta^7$ struktúra $\circ$ és $\times$ műveletei az $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ struktúra megfelelő, szintén $\circ$ és $\times$ jellel jelölt műveleteinek természetes kiterjesztései.

2. Lemma. Ha $a + i \cdot b \in \mathbb{C}_\delta$, továbbá $U, V, U', V' \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$, s ezért $U + i \cdot V, U' + i \cdot V' \in \mathbb{C}_\delta^7$, akkor teljesülnek a következő azonosságok:

(a) $(a + i \cdot b) \cdot (U + i \cdot V) = (a \cdot U - \delta \cdot b \cdot V) + i \cdot (a \cdot V + b \cdot U)$,
(b) $(U + i \cdot V) \circ (U' + i \cdot V') = [U \circ U' - \delta(V \circ V')] + i \cdot [U \circ V' + V \circ U']$,
(c) $(U + i \cdot V) \times (U' + i \cdot V') = [U \times U' - \delta \cdot (V \times V')] + i \cdot [U \times V' + V \times U']$.

Tekintsük most a

(31) $$H(\mathbb{C}_\delta) := \left\{A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{C}_\delta, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{C}_\delta^7\right\}$$

alakú – *vektor-mátrixok*nak nevezett – hipermátrixok halmazát, s értelmezzünk e halmazban műveleteket a következő módon:

Skalárral való szorzás: ha $r \in \mathbb{R}, A \in H(\mathbb{C}_\delta)$, akkor legyen

(32) $$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix},$$

Összeadás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\delta)$, akkor legyen

(33) $$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix},$$

Szorzás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\delta)$, akkor legyen

(34) $$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} :=$$

$$:= \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}.$$

Két ilyen vektor-mátrixot természetesen pontosan akkor nevezünk *egyenlő*nek, ha azok komponensről komponensre megegyeznek.

Legyen ezután

(35) $$s := (a + U) + (b + V) \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \big(a, b \in \mathbb{R}, U, V \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})\big)$$

egy tetszőleges általánosított szedenió és rendeljük hozzá azt az $A \in H(\mathbb{C}_\delta)$ hipermátrixot, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(36) $$A_{11} := a + i \cdot b, A_{22} := a - i \cdot b \in \mathbb{C}_\delta, A_{12} := -U + i \cdot V, A_{21} := U + i \cdot V \in \mathbb{C}_\delta^7.$$

A továbbiakban az ilyen alakú hipermátrixok halmazát *általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok* halmazának nevezzük és a $Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$ szimbólummal jelöljük. Zorn eredetileg a split oktoniók reprezentálására fejlesztette ki a vektor-mátrixokat [14], [15].

Ha teljesen következetesen akarunk eljárni, akkor a dolgozatunk [10] első részében felbukkanó, az általánosított oktoniókat reprezentáló Zorn-féle vektor-mátrixokat utólag célszerűbb $Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma)$ szimbólummal jelölni, hiszen ott a hipermátrixok mellékátlójában $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ 3-dimenziós, az általánosított szedeniók kapcsán jelen munkában szereplő Zorn-féle vektor-mátrixok mellékátlójában pedig $Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$ 7-dimenziós elemei állnak.

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$, akkor $r \cdot A, A + B, A * B \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$ teljesül, tehát az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt ezen műveletekre nézve, így e struktúra részstruktúrát alkot a $H(\mathbb{C}_\delta)$ hipermátrixok struktúrájában.

Most már kimondhatjuk és bizonyíthatjuk is dolgozatunk fő eredményét, az általánosított szedeniók reprezentációs tételét.

2.Tétel. Az

(37) $$F: \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \to Zorn(7, \mathbb{C}_\delta), (a + U) + (b + V) \cdot F \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix}$$

leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

BIZONYÍTÁS. Levezetésünkben a szinte tökéletes analógia miatt az általánosított oktoniókra vonatkozó reprezentációs tétel [10] gondolatmenetét követjük végig. Mint arra már a fentiekben is utaltunk, itt a szereplő vektor-mátrixok mellékátlójában nem 3, hanem 7-dimenziós elemek szerepelnek. Ezért bizonyításunkat szükségtelen részletezni, csupán az egyes lépéseket vázoljuk.

Az F egy bijektív leképezés, hiszen az $F^{-1}: Zorn\ (7, \mathbb{C}_\delta) \to \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ inverz hozzárendelés is leképezés.

Ha $r \in \mathbb{R}$ és $s \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor a (19) és (32) alapján egyszerű számítással beláthatjuk, hogy

(38) $$F(r \cdot s) = r \cdot F(s)$$

teljesül, s ezért az F egy homogén leképezés. Ha $s, s' \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor a (19) és (33) felhasználásával

(39) $$F(s + s') = F(s) + F(s')$$

adódik, s így az F egy additív leképezés. Az eddigiek azt jelentik, hogy az F egy $\mathbb{R}$ vektortér-izomorfizmus.

Az általánosított oktoniók reprezentációs analóg tétel lépéseit tovább követve, figyelembe véve esetünkben az $i^2 = -\delta$ összefüggést, tetszőleges

(40) $$s = (a + U) + (b + V) \cdot F\ ,\ s' = (a' + U') + (b' + V') \cdot F\ \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$(a, b, a', b' \in \mathbb{R},\ U, V, U', V' \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}))$ elempárra teljesül az

(41) $$s \cdot s' = (a^* + U^*) + (b^* + V^*) \cdot F$$

előállítás, ahol

(42) $$\begin{aligned} a^* &= a \cdot a' - \delta \cdot b \cdot b' - U \circ U' - \delta \cdot (V \circ V') \in \mathbb{R} \\ b^* &= a \cdot b' + a' \cdot b - U \circ V' + U' \circ V \in \mathbb{R} \\ U^* &= a \cdot U' + a' \cdot U + \delta \cdot b \cdot V' - \delta \cdot b' \cdot V + U \times U' - \delta \cdot (V \times V') \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}) \\ V^* &= a \cdot V' + a' \cdot V - b \cdot U' + b' \cdot U - U \times V' + U' \times V \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})\ . \end{aligned}$$

Ekkor pedig

(43) $$F(s \cdot s') = \begin{pmatrix} a^* + i \cdot b^* & -U^* + i \cdot V^* \\ U^* + i \cdot V^* & a^* - i \cdot b^* \end{pmatrix}$$

teljesül. A (34) összefüggés felhasználásával most

(44) $$F(s) * F(s') = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' + i \cdot b' & -U' + i \cdot V' \\ U' + i \cdot V' & a' - i \cdot b' \end{pmatrix},$$

e két vektor-mátrix szorzatára az 1. és 2. lemma felhasználásával beláthatjuk, hogy szintén

(45) $$F(s) * F(s') = \begin{pmatrix} a^* + i \cdot b^* & -U^* + i \cdot V^* \\ U^* + i \cdot V^* & a^* - i \cdot b^* \end{pmatrix}$$

következik, így összevetve a (43) összefüggéssel

(46) $$F(s \cdot s') = F(s) * F(s')$$

adódik, ami azt jelenti, hogy az F egy multiplikatív leképezés. A fentekkel együtt ez pontosan azt bizonyítja, hogy az F leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus. ■

A most bizonyított izomorfizmus alapján igaz az alábbi állítás.

Következmény. A $Zorn(7,\mathbb{C}_\delta)$ struktúra egy 16-dimenziós, neutrális elemes, de nem kommutatív, nem asszociatív és nem alternáló algebra az $\mathbb{R}$ test felett.

3. Tétel. A $H(\mathbb{C}_\delta)$ struktúra $*$ műveletére tetszőleges $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\in H(\mathbb{C}_\delta)$ elempárra teljesül a

$$(A*B)*A=A*(B*A) \tag{47}$$

flexibilitási azonosság.

BIZONYÍTÁS. Számítsuk ki a (47) összefüggés mindkét oldalát, majd komponensről komponensre haladva hasonlítsuk össze az eredményül nyert két vektor-mátrixot.

Először a két vektor-mátrix bal felső komponensét hasonlítjuk össze. A kijelölt műveletek elvégzése után a $\mathbb{C}_\delta^7$ modulus skaláris és vektoriális szorzata műveletének (h) ortogonalitási tulajdonságát felhasználva könnyen adódik e komponensek egyenlősége. Ehhez teljesen hasonlóan a (h) ortogonalitási tulajdonság alapján nyerhetjük a két vektor-mátrix jobb alsó komponensének egyenlőségét is.

Ha most a jobb felső komponenseket hasonlítjuk össze, akkor a kijelölt műveletek elvégzése, az összevonások után a $\mathbb{C}_\delta^7$ modulus skaláris szorzás (a) kommutatív tulajdonságát, a vektoriális szorzás (g) tulajdonságát felhasználva, majd az azonos tagok mindkét oldalról történő elhagyása után e két komponensből a következő összefüggés marad:

$$(A_{12}\times B_{12})\times A_{21}=A_{21}\times(B_{12}\times A_{12})\,. \tag{48}$$

A jobboldalon szereplő mennyiség viszont a vektoriális szorzás (d) tulajdonsága alkalmazásával egyenlővé alakítható a baloldali mennyiséggel. Így ez a két vektor-mátrix jobb felső komponense egyenlőségét igazolja. Teljesen hasonlóan a bal alsó komponensek összevetéséből az

$$(A_{21}\times B_{21})\times A_{12}=A_{12}\times(B_{21}\times A_{21}) \tag{49}$$

összefüggés marad, amelynek jobboldalán szereplő mennyiség a vektoriális szorzás (d) tulajdonsága alkalmazásával a baloldalon levő mennyiséggel alakítható egyenlővé, ami ezen komponensek egyenlőségét igazolja.

A fentiek együttesen igazolják, hogy a $*$ művelet valóban flexibilis a $H(\mathbb{C}_\delta)$ struktúrában. ■

A $H(\mathbb{C}_\delta)$ vektor-mátrixok halmazában értelmezett skalárral való szorzás, összeadás és szorzás $Zorn(\mathbb{C}_\delta)$ halmazra vonatkozó zártsága miatt érvényes az alábbi

Következmény. A $Zorn(\mathbb{C}_\delta)$ struktúra egy flexibilis algebra.

Végül az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ és a $Zorn(\mathbb{C}_\delta)$ algebrák izomorfiája alapján igaz a munkánkat záró

Következmény. Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ struktúra egy flexibilis algebra.

5. Összefoglalás

Dolgozatunkban a klasszikus valós test feletti, egymásra épülő algebrákkal foglalkoztunk. A konstrukció során az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárást alkalmaztuk [2] és [11]. A valós számokból az első megkettőzéssel az általánosított komplex számok 2-dimenziós, megkettőzésükkel az általánosított kvaterniók 4-dimenziós, ezek megkettőzésével az általánosított oktoniók 8-dimenziós [7], [8], a végül ezek újabb megkettőzésével az általánosított szedeniók 16-dimenziós algebráját nyerhetjük. Az általánosított komplex számok és az általánosított kvaterniók algebrája asszociatív, az általánosított oktonióké alternáló, míg az általánosított szedeniók algebrája csupán flexibilis.

A véges dimenziós asszociatív algebrák mátrixokkal reprezentálhatók, az általánosított oktoniók és általánosított szedeniók nem asszociatív algebrái viszont eredményesen írhatók le a Zorn-féle vektor-mártixok segítségével. A vizsgált 2 x 2 -es vektor-mátrixok főátlójában általánosított komplex számok, míg mellékátlójában ilyen általánosított komplex számokból álló vektorok szerepelnek. Az itt levő tiszta képzetes kvaterniók körében természetes módon bukkan fel a 3-dimenziós általánosított skaláris- és a vektoriális szorzás művelete az általánosított oktoniók leírására. Ezzel teljesen analóg a tiszta képzetes oktoniók körében természetesen lép fel a 7-dimenziós általánosított skaláris- és a vektoriális szorzás művelete az általánosított szedeniók leírása kapcsán.

Az algebrák vázolt felépítési lánca természetesen tovább is folytatható a növekvő 2 hatványok felé, azonban látható, hogy az ismételt megkettőzésekkel fokozatosan fogynak az értékes algebrai tulajdonságok. A dolgozatban szereplő algebrák a valós számok fogalmának erőteljes általánosításaként foghatók fel. Vizsgálatuk a klasszikus számok struktúráinak mélyebb megértését szolgálhatja.

Irodalomjegyzék

[1] **Albert, A.A.**:Quadratic forms permitting composition. Annals of Mathematics, vol. 43 (1942), 161-177.

[2] **Bremner, M.R. – Murakami, L. – Shestakov, I.P.**: Nonassociative Algebras. In: Hogben, L. (ed.): Handbook of Linear Algebra. CRC. Press. (2013).

[3] **Dickson, L.E.**: On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. Annals of Mathematics, 2nd. 20(3), (1919), 155-171. doi: 10.2307/1967865

[4] **Ebbinghaus, H.D. – Hermes, H. – Hirzebruch, F. – Koecher, M. – Mainzer, M. - Mainzer, K. – Neukirch, J. – Prestel, A. – Remmert, R.**: Numbers. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg. (1991).

[5] **Kantor, I.L. – Szolodovnyikov, A.Sz.**: Hiperkomplex számok. Gondolat, Budapest (1985).

[6] **Massey, W.S.**: Cross Product of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces. The American Mathematical Monthly, Vol. 90. No. 10.(1983), 697-701. doi: 10.1080/00029890.1983.11971316

[7] **Péntek K.**: Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények VI. kötet. (2018),25-30. doi: 10.20312/dim.2018.03

[8] **Péntek K.**: Az általánosított oktonióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények VII. kötet. (2019),19-27. doi: 10.20312/dim.2019.03

[9] **Péntek K.**: Az általánosított oktonióalgebrákról. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények 18. Szombathely, (2020), 7-20.

[10] **Péntek K.**: Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája. Dimenziók. Matematikai Közlemények XI. kötet. (2023),11-20. doi: 10.20312/dim.2023.02

[11] **Rosenfeld, B.**: Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.(1997).

[12] **Schray, J. – Manogue, C.A.**: Octonionic representation of Clifford algebras and triality. Foundations of Physics 26 (1), (1996), 17-70.

[13] **Silagadze, Z.K.**: Multi-dimensional vector product. Journal of Physics A: Mathematical and General Vol. 35 (23), (2002), 4949-4953.

[14] **Zorn, M.A.**: Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathemastischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer, Berlin, Heidelberg.(1931), 123-147.

[15] **Zorn, M.A.**: Alternativkörper und quadratische Systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer, Berlin, Heidelberg.(1933), 395-402.

Függelék

$\cdot$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
E_1	E_1	$-\alpha E_0$	E_3	$-\alpha E_2$	E_5	$-\alpha E_4$	$-E_7$	αE_6	E_9	$-\alpha E_8$	$-E_{11}$	αE_{10}	$-E_{13}$	αE_{12}	E_{15}	$-\alpha E_{14}$
E_2	E_2	$-E_3$	$-\beta E_0$	βE_1	E_6	E_7	$-\beta E_4$	$-\beta E_5$	E_{10}	E_{11}	$-\beta E_8$	$-\beta E_9$	$-E_{14}$	$-E_{15}$	βE_{12}	βE_{13}
E_3	E_3	αE_2	$-\beta E_1$	$-\alpha\beta E_0$	E_7	$-\alpha E_6$	βE_5	$-\alpha\beta E_4$	E_{11}	$-\alpha E_{10}$	βE_9	$-\alpha\beta E_8$	$-E_{15}$	αE_{14}	$-\beta E_{13}$	$\alpha\beta E_{12}$
E_4	E_4	$-E_5$	$-E_6$	$-E_7$	$-\gamma E_0$	γE_1	γE_2	γE_3	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	$-\gamma E_8$	$-\gamma E_9$	$-\gamma E_{10}$	$-\gamma E_{11}$
E_5	E_5	αE_4	$-E_7$	αE_6	$-\gamma E_1$	$-\alpha\gamma E_0$	$-\gamma E_3$	$\alpha\gamma E_2$	E_{13}	$-\alpha E_{12}$	E_{15}	$-\alpha E_{14}$	γE_9	$-\alpha\gamma E_8$	γE_{11}	$-\alpha\gamma E_{10}$
E_6	E_6	E_7	βE_4	$-\beta E_5$	$-\gamma E_2$	γE_3	$-\beta\gamma E_0$	$-\beta\gamma E_1$	E_{14}	$-E_{15}$	$-\beta E_{12}$	βE_{13}	γE_{10}	$-\gamma E_{11}$	$-\beta\gamma E_8$	$\beta\gamma E_9$
E_7	E_7	$-\alpha E_6$	βE_5	$\alpha\beta E_4$	$-\gamma E_3$	$-\alpha\gamma E_2$	$\beta\gamma E_1$	$-\alpha\beta\gamma E_0$	E_{15}	αE_{14}	$-\beta E_{13}$	$-\alpha\beta E_{12}$	γE_{11}	$\alpha\gamma E_{10}$	$-\beta\gamma E_9$	$-\alpha\beta\gamma E_8$
E_8	E_8	$-E_9$	$-E_{10}$	$-E_{11}$	$-E_{12}$	$-E_{13}$	$-E_{14}$	$-E_{15}$	$-\delta E_0$	δE_1	δE_2	δE_3	δE_4	δE_5	δE_6	δE_7
E_9	E_9	αE_8	$-E_{11}$	αE_{10}	$-E_{13}$	αE_{12}	E_{15}	$-\alpha E_{14}$	$-\delta E_1$	$-\alpha\delta E_0$	$-\delta E_3$	$\alpha\delta E_2$	$-\delta E_5$	$\alpha\delta E_4$	δE_7	$-\alpha\delta E_6$
E_{10}	E_{10}	E_{11}	βE_8	$-\beta E_9$	$-E_{14}$	$-E_{15}$	βE_{12}	βE_{13}	$-\delta E_2$	δE_3	$-\beta\delta E_0$	$-\beta\delta E_1$	$-\delta E_6$	$-\delta E_7$	$\beta\delta E_4$	$\beta\delta E_5$
E_{11}	E_{11}	$-\alpha E_{10}$	βE_9	$\alpha\beta E_8$	$-E_{15}$	αE_{14}	$-\beta E_{13}$	$\alpha\beta E_{12}$	$-\delta E_3$	$-\alpha\delta E_2$	$\beta\delta E_1$	$-\alpha\beta\delta E_0$	$-\delta E_7$	$\alpha\delta E_6$	$-\beta\delta E_5$	$\alpha\beta\delta E_4$
E_{12}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	γE_8	$-\gamma E_9$	$-\gamma E_{10}$	$-\gamma E_{11}$	$-\delta E_4$	δE_5	δE_6	δE_7	$-\gamma\delta E_0$	$-\gamma\delta E_1$	$-\gamma\delta E_2$	$-\gamma\delta E_3$
E_{13}	E_{13}	$-\alpha E_{12}$	E_{15}	$-\alpha E_{14}$	γE_9	$\alpha\gamma E_8$	γE_{11}	$-\alpha\gamma E_{10}$	$-\delta E_5$	$-\alpha\delta E_4$	δE_7	$-\alpha\delta E_6$	$\gamma\delta E_1$	$-\alpha\gamma\delta E_0$	$\gamma\delta E_3$	$-\alpha\gamma\delta E_2$
E_{14}	E_{14}	$-E_{15}$	$-\beta E_{12}$	βE_{13}	γE_{10}	$-\gamma E_{11}$	$\beta\gamma E_8$	$\beta\gamma E_9$	$-\delta E_6$	$-\delta E_7$	$-\beta\delta E_4$	$\beta\delta E_5$	$\gamma\delta E_2$	$-\gamma\delta E_3$	$-\beta\gamma\delta E_0$	$\beta\gamma\delta E_1$
E_{15}	E_{15}	αE_{14}	$-\beta E_{13}$	$-\alpha\beta E_{12}$	γE_{11}	$\alpha\gamma E_{10}$	$-\beta\gamma E_9$	$\alpha\beta\gamma E_8$	$-\delta E_7$	$\alpha\delta E_6$	$-\beta\delta E_5$	$-\alpha\beta\delta E_4$	$\gamma\delta E_3$	$\alpha\gamma\delta E_2$	$-\beta\gamma\delta E_1$	$-\alpha\beta\gamma\delta E_0$

Táblázat. Az általánosított szedenió-egységek Cayley-féle szorzótáblája