


Irracionális számokról középiskolásoknak¹

Zsuppán Sándor

Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
zsuppans@gmail.com,  0009-0006-3454-1528

ÖSSZEFOGLALÓ. A $\sqrt{2}$ irracionálisának olyan ismert bizonyításait mutatjuk be és hasonlítjuk össze, amelyek az emelt szintű matematika érettségien elvárt ismeretanyag különböző témaköreire épülnek. Röviden vizsgáljuk ezen bizonyítási módszerek általánosítási lehetőségeit más másodfokú illetve magasabb fokú algebrai számok esetén, valamint azt is, hogy hogyan kaphatunk belőlük az adott algebrai irracionális számot jól közelítő racionálist. A kapott eredményeket numerikus kísérletekkel szemléltetjük.

ABSTRACT. We present and compare some well-known proofs for the irrationality of $\sqrt{2}$, which are accessible for high-school students in the sense, that they are built on ideas which are parts of the requirements for an advanced level high-school graduation exam in mathematics in Hungary. We briefly investigate generalizations of these proofs for other quadratic irrationals and for algebraic irrationals of higher degree. We also consider possibilities for obtaining rational approximations using ideas from the investigated proofs. We illustrate the results with some numerical experiments.

1. Bevezetés

A $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tétel különféle bizonyításainak nagy száma és sokfélesége jelzi, hogy annak ellenére, hogy már nagyon régen igazolták, mégsem vesztett érdekességéből az idők során. Sőt, a tételt és egy bizonyítását az emelt szintű matematika érettségi vizsgát tevőknek ismernie kell. A matematika érettségi részletes vizsgakövetelményei [1] szerint ugyanis "[...] az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatóak, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló hallgatók felkészítése történik [...]". Ezen speciális anyagrészek egyike a "1.2.1 Fogalmak, tételek és bizonyítások a matematikában", azaz emelt szinten szükséges ismerni alapvető bizonyítási módszereket; továbbá "2.3 Racionális és irracionális számok" témakörben "Bizonyítsa, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám."

Ebben a rövid jegyzetben a $\sqrt{2}$ irracionálisának néhány olyan bizonyítását mutatjuk be, amelyek az emelt szintű matematika érettségien elvárt ismeretanyag különböző részeire (oszthatóság, számrendszerek, sorozatok, hasonlóság) építenek. Nem az a cél, hogy teljes áttekintést adjunk a különféle módszerekről, hiszen ezek száma meglehetősen nagy és közülük több is olyan ismeretanyagot igényel, amely az érettségien elvárható szinten túlmutat. Csak kiemelünk néhány megközelítést, ami középiskolás szinten feldolgozható és akár egy érettségi feleletben

¹ ENGLISH TITLE. About irrational numbers with high-school methods

KULCSSZAVAK. irracionális szám, közelítő tört, középiskolai módszerek.

KEYWORDS. irrational number, approximate fraction, high-school level methods.

is előadható. Ahelyett, hogy a szakirodalomból egyenként keresnénk ki a különféle gondolatmeneteket, kiindulópontként az [5] honlapot választhatjuk, amely a tétel 29 féle bizonyítását gyűjtötte össze és mutatja be (hivatkozásokkal együtt), némelyikből többféle változatot is. Mivel az egyes bemutatott ötletek különböző érettségi témakörökből valók, ezért szemléltethetjük velük az ezen témakörök közötti kapcsolatokat is. Vizsgáljuk, hogy a bemutatott módszerek mennyire általánosíthatók – részben maradván az emelt szintű érettségi ismeretanyagán belül – más kvadratikus vagy magasabb fokú algebrai számok (pl. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\sqrt[n]{2}$) irracionálisának kimutatására. Megvizsgáljuk továbbá, hogy a bemutatott bizonyítások alapján hogyan nyerhetünk az irracionális számot jól közelítő közönséges törteket. Ezeket a módszereket olyan numerikus kísérletek eredményeivel szemléltetjük, amelyhez szükséges programozási készségek nem esnek messze digitális kultúra érettségén elvárt szinttől.

2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sokféleképpen

Az ebben a részben bemutatásra kerülő gondolatmenetekben közös, hogy indirekt megközelítéssel indulnak, azaz indirekt felteszik, hogy a $\sqrt{2}$ felírható közönséges tört alakban

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, (b \neq 0) \quad (*)$$

sőt némelyben az is szükséges, hogy ezen tört számlálója és nevezője relatív prím legyen vagy másképp fogalmazva a nevezője a lehető legkisebb legyen. A legkönnyebben úgy juthatunk célhoz, hogy a bizonyításban alkalmazunk egy "erős" másik tételt, amelyet azonban középiskolában nem bizonyítunk.

1. Bizonyítás ([8] és [5, Proof 3]). A számelmélet alaptétele szerint a (*)-beli a számláló és a b nevező is egyértelműen felbonthatók prímtényezőik szorzatára. Négyzeteikben a 2-es prímtényező kitevői párosak kell legyenek, hiszen minden prímtényező kitevőjét duplázzuk négyzetre emeléskor. Ez azonban ellentmond a (*) indirekt feltevésével ekvivalens $a^2 = 2b^2$ összefüggésnek, mert ennek jobb oldalán a 2-es prímtényező kitevője páratlan a többszörös prímtényező miatt. \square

Ez a bizonyítás egyszerűen általánosítható minden olyan egész szám négyzetgyökére, ami maga nem teljes négyzet, hiszen ekkor lennie kell legalább egy olyan prímtényezőnek a felbontásában, ami páratlan kitevővel szerepel. Ekkor ezzel a prímtényezővel dolgozhatunk az 1. bizonyításban: pl. $\sqrt{12}$ esetén az $a^2 = 12b^2$ -ben a bal oldalon a 3 prímtényező kitevője páros, de a jobb oldalon páratlan, ami ellentmondás.

2. Bizonyítás ([5, Proof 2]). A (*) indirekt feltevésben legyen a tört számlálója és nevezője relatív prím. A (*) feltevésével ekvivalens $a^2 = 2b^2$ egyenlőségéből adódóan a^2 és emiatt a is páros, pl. $a = 2x$ valamely $x \in \mathbb{N}$ -re. Ezt helyettesítve adódik $b^2 = 2x^2$, emiatt b^2 és így b is párosak. Így a és b is páros, ami ellentmond annak, hogy relatív prímnek feltételeztük őket. \square

Ez a bizonyítás, ha nem is annyira közvetlenül mint a megelőző, ugyancsak épít a számelmélet alaptételére, hiszen azzal indul, hogy (*) összefüggésben a számlálót és a nevezőt is prímtényezőik szorzatára bonthattuk és a közös prímtényezőikkel egyszerűsíthettünk.

3. Bizonyítás ([5, Proof 4]). A Rolle-féle racionális gyöktétel (racionális gyökteszt) szerint, ha egy egyszerűsített közönséges tört gyöke egy egész együtthatós polinomnak, akkor a számlálója osztója a konstans tagnak, a nevezője pedig a főegyütthatónak. Így egy egész együtthatós polinom minden racionális gyöke véges sok racionális szám közül kerülhet ki, minden más gyöke

emiatt irracionális. Eszerint az $x^2 - 2$ polinomnak az összes racionális gyöke a $\{-2; -1; 1; 2\}$ halmazból kerülhet csak ki. Mivel ezen halmaz egyik eleme sem gyök, ezért a polinom két gyöke, a $\pm\sqrt{2}$, irracionális kell legyen. \square

Mivel a felhasznált tétel – a racionális gyöktétel – nagyon általános, ezért a segítségével kapott 3. bizonyítás nem csak a $\sqrt{2}$ irracionálisának igazolására jó, hanem tulajdonképpen az összes \mathbb{Q} -feletti irracionális algebrai szám esetére, csak az $x^2 - 2$ polinom helyett az adott algebrai szám minimálpolinomját kell használni. Noha a racionális gyöktétel az emelt szinten tanult fogalmakkal bizonyítható, mégsem része az érettségien elvárt ismeretanyagnak. Így a felhasználásával bizonyítani a $\sqrt{2}$ irracionálisát túlzásnak tekinthető.

Az előző bizonyításokban inkább a (*) indirekt feltétellel ekvivalens $a^2 = 2b^2$ egyenletet használtuk. (Még a 3. bizonyításban előkerülő $x^2 - 2 = 0$ egyenlettel is kapcsolatos $x = \frac{a}{b}$ helyettesítéssel.) Mivel ezen egyenletnek tehát nincs megoldása az egész számpárok halmazában, azaz $a^2 - 2b^2 \neq 0$, ezért $|a^2 - 2b^2| \geq 1$ kell legyen. Ezt a megfigyelést és a közép szinten is elvárt nevezetes azonosságot felhasználva

$$\left| \sqrt{2} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{(\sqrt{2} - \frac{a}{b})(\sqrt{2} + \frac{a}{b})}{\sqrt{2} + \frac{a}{b}} \right| = \left| \frac{2 - \frac{a^2}{b^2}}{\sqrt{2} + \frac{a}{b}} \right| = \frac{|a^2 - 2b^2|}{b(a + b\sqrt{2})} \geq \frac{1}{b(a + b\sqrt{2})}.$$

Mivel feltehető, hogy $b < a < 2b$, ha a $\sqrt{2}$ -t minél jobban megközelítő törtet szeretnénk, ezért $\frac{1}{b(a+b\sqrt{2})} > \frac{1}{b(2b+b\sqrt{2})} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})b^2}$. Így az emelt szintű ismeretanyag felhasználásával kaptuk a

$$\left| \sqrt{2} - \frac{a}{b} \right| > \frac{1}{(2 + \sqrt{2})b^2}, \text{ ha } 1 < \frac{a}{b} < 2$$

összefüggést, amivel jellemeztük, hogy a $\sqrt{2}$ mennyire pontosan közelíthető meg az $]1; 2[$ intervallumból való adott nevezőjű törtszám segítségével (diofantikus approximáció témakör).

4. Bizonyítás ([7] és [5, Proof 14]). A (*) indirekt feltevésével ekvivalens $a^2 = 2b^2$. Mivel minden egész szám négyzetének hármasszámrendszerbeli alakjában az utolsó nem nulla számjegy 1, ezért az $a^2 = 2b^2$ egyenletnek egyetlen egész (a, b) számpár sem lehet megoldása, hiszen a bal oldalon az utolsó nem nulla számjegy 1, de a jobb oldalon 2 a 2-vel való szorzás miatt. \square

Ez a bizonyítás rövidege ellenére csak a hármasszámrendszer és a hatványozás ismeretét igényli, amik emelt szinten elvárhatók. Kis módosítással átültethető a $\sqrt[3]{2}$ esetére, ha négyes számrendszerben dolgozunk, illetve $\sqrt[4]{2}$ esetére, ha ötös számrendszerben dolgozunk, azonban már nem működik $\sqrt[5]{2}$ esetére, ha a hatos számrendszerben dolgoznánk.

5. Bizonyítás ([4] és [5, Proof 5] alapján). Indirekt feltéve, hogy $\sqrt{2}$ racionális, létezik egy minimális $b \in \mathbb{Z}^+$ úgy, hogy $b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$. Vizsgáljuk a $b' = b(\sqrt{2} - 1) = b\sqrt{2} - b$ számot:

- egyrészt $b' \in \mathbb{Z}$, ugyanis b' két egész különbsége: $b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$ az indirekt feltevés miatt és nyilván $b \in \mathbb{Z}^+$,
- másrészt $0 < b' < b$, hiszen $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$,
- végül $b'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$, hiszen $b'\sqrt{2} = 2b - b\sqrt{2}$ (két egész szám különbsége, ld. itt is az indirekt feltevést).

Így b' egy b -nél kisebb pozitív egész, amire $b'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$ ugyanúgy mint $b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}^+$. Ez azonban ellentmond az ilyen tulajdonságú számok között a b szám feltételezett minimalitásának. \square

Az előzőekkel ellentétben a [5, Proof 5], amely [4] cikkben jelenik meg először, nem használ fel segítségképpen más általános tételt (hanem csak az egészrész fogalmát, ld. $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$): ilyen értelemben eléggé "minimalista" bizonyításnak tekinthető, mégis teljes mértékben illeszkedik az emelt szinten elvárt ismeretanyagba. Ennek ellenére nem kizárólag a $\sqrt{2}$ esetére működik középiskolás szinten, hanem bármely olyan k pozitív egész szám négyzetgyöke esetén, ami maga nem négyzetszám: ekkor a $\sqrt{2} - 1$ szám helyett a bizonyításban $a\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ számot kell használni, ami ugyancsak pozitív és kisebb mint 1. Ha négyzetszámmal próbálkoznánk, akkor $\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor = 0$ és a bizonyítás nem működik. Sőt, a gondolatmenet általánosítható tetszőleges $\sqrt[n]{k}$ ($n \geq 2$) esetére, ld. [4].

Az előző bizonyításbelihez hasonló "minimalista" megközelítést alkalmaz az alábbi gondolatmenet is.

6. Bizonyítás ([8], [5, Proof 8]). A (*) indirekt feltételben $1 < \sqrt{2} = \frac{a}{b} < 2$, azaz $b < a < 2b$, amiből következően $0 < a - b < b$. Válasszuk (*)-ban a b nevezőt a lehető legkisebbnek és vizsgáljuk a $\frac{2b-a}{a-b}$ törtet:

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{2 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}.$$

Eszerint felírhattuk a $\sqrt{2}$ -t egy olyan közönséges törtként, aminek az $a - b$ nevezője kisebb mint a b nevező. Ez azonban ellentmond a b nevező feltételezett minimalitásának. \square

Az előző bizonyításban a $\sqrt{2}$ -t kétféleképpen is előállítottuk: egyrészt (indirekt) feltételeztük a (*) előállítást, másrészt a $\frac{2b-a}{a-b}$ törttel:

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(2b-a) = a(a-b) \Leftrightarrow 2b^2 - ab = a^2 - ab \Leftrightarrow a^2 = 2b^2,$$

amely összefüggést pedig az 1. és 2. bizonyításokban hasznosítottuk. Az 5. bizonyításban fontos szerepet játszó illetve a 6. bizonyításban is előforduló $\sqrt{2} - 1$ szám a következő gondolatmenetekben is központi szerepet kap.

7. Bizonyítás ([5, Proof 21]). Racionális szám egyszerű lánc tört alakja ismételt maradékos osztással (mint az euklideszi algoritmusban) meghatározhatóan mindig véges lánc törtet ad. A $(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 1$ összefüggésből kapjuk, hogy

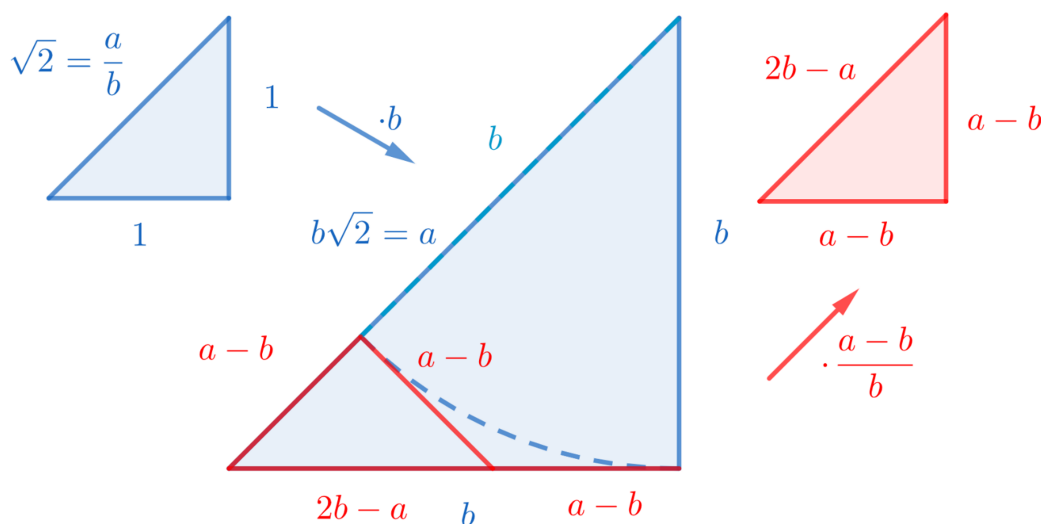
$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Így a $\sqrt{2}$ lánc tört alakja végtelen, azaz a $\sqrt{2}$ nem lehet racionális. \square

A maradékos osztás a 11. évfolyamos matematika tananyag része (középszinten is). Noha se a lánc tört, se az euklideszi algoritmus nem része az érettségien elvárt ismeretanyagoknak, de mindkettő rövid tárgyalása emelt szintű csoportban kis idő ráfordításával (csak példákon keresztül, mellőzve az elméleti bizonyításokat, pl. konvergencia stb.) lehetségesnek tűnik. A $\sqrt{2}$ egyszerű lánc tört alakjával azért van szerencsénk, mert az periodikus, sőt meglehetősen egyszerű a periódusa. (Egy irracionális szám egyszerű lánc tört alakja pontosan akkor periodikus, ha az megoldása egy egész együtthatós másodfokú egyenletnek: Euler-Lagrange.) Hasonlóan egyszerűen kaphatjuk az arany metszés $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ arányszámának lánc tört alakját, hiszen φ a pozitív gyöke az $x^2 - x - 1$ polinomnak, emiatt $\varphi^2 = \varphi + 1$, amiből

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

8. Bizonyítás ([2] és [5, Proof 7]). Az 1. ábra alapján dolgozunk a (*) indirekt feltevessel. Nagyítva a bal oldali egyenlő szárú, derékszögű háromszöget a b -szeresére a képháromszög oldalhosszúságai (a átfogó és b befogók) egész számok. Ha az egyik befogót az átfogóval közös végpontja körül az átfogóra forgatjuk, majd a kapott pontból merőlegest állítunk, akkor ez a merőleges a nagyított háromszögből egy kisebb egyenlő szárú derékszögű háromszöget választ le. Ennek a befogói $a-b$, az átfogója $2b-a$ hosszúságú, azaz mindhárom oldalának hossza egész szám. Ezt a folyamatot folytatva olyan, az eredetihez hasonló, minden határon túl zsugorodó



1. ábra. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hasonlósággal

háromszögeket szerkeszthetünk, amelyek oldalhosszai mégis mind egész számok lesznek. Ez azonban lehetetlen, tehát ellentmondásra jutottunk a (*) indirekt feltevésből kiindulva. \square

Az 1. ábrán lévő $1; 1; \frac{a}{b}$ oldalhosszúságú háromszög hasonló a kinagyított háromszögből leválasztott $a-b; a-b; 2b-a$ oldalhosszúságú háromszöghöz. Így bennük megegyezik az átfogó-befogó hosszúság arány, azaz $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$. Éppen ez az összefüggés játszott központi szerepet az algebrai jellegű 6. bizonyításban.

Ha egyenlő szárú derékszögű háromszög helyett egy egyenlő szárú, 72° - 72° - 36° szögű háromszöggel dolgozunk, amely alapja 1 egység hosszú, akkor szárai hossza az aranymetszés φ arányszáma. Ha ebben a háromszögben az egyik alapon fekvő szög szögfelezőjével választunk le egy hozzá hasonló kisebb háromszöget, akkor a fenti bizonyításhoz teljesen hasonló bizonyítást készíthetünk φ irracionálisára. A kapott háromszög-sorozatban a hasonlóság aránya éppen $\varphi - 1$ lesz.

Az 1. ábráról láthatóan a zsugorodó háromszög-sorozat oldalhosszúságai olyan mértani sorozatokat alkotnak, amelyek hányadosa (azaz a kicsinyítés aránya) éppen $\sqrt{2} - 1$, amely számérték már az előző két bizonyításban is előkerült. Tulajdonképpen ezen hasonlósági arány mint mértani sorozat hányados játszik szerepet a $\sqrt{2}$ irracionálisának sorozatok felhasználásával történő következő bizonyításaiban is.

9. Bizonyítás ([5, Proof 9]). Vizsgáljuk a $(\sqrt{2} - 1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitív tagokból álló mértani sorozatot. Mivel hányadosa $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, ezért $(\sqrt{2} - 1)^n \rightarrow 0$, amikor $n \rightarrow \infty$. Másrészt teljes indukcióval belátható, hogy $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol a_n és b_n egyaránt egész számokból álló sorozatok. Valóban: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, továbbá, ha valamely n -re

$(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, akkor

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^{n+1} = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - 1\right) = (-a_n + 2b_n) + (a_n - b_n)\sqrt{2},$$

tehát $a_{n+1} = -a_n + 2b_n$ és $b_{n+1} = a_n - b_n$. Ha (*) indirekt feltevéssel indulunk, akkor

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} = a_n + b_n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a_nb + b_na}{b} \geq \frac{1}{b} > 0,$$

hiszen a kapott tört számlálója pozitív egész, azaz legalább 1. Ez azt jelenti, hogy a $(\sqrt{2} - 1)^n$ sorozat egy pozitív alsó korláttal rendelkezik, ami ellentmond annak, hogy nullához tart. \square

Ebben a bizonyításban a mértani sorozatok korlátosságai és konvergencia tulajdonságait használtuk fel, amiket egy emelt szinten érettségizőnek ismernie kell. Az a_n és a b_n sorozatok explicit képletének ismerete nem szükséges a bizonyításhoz, és levezetésük is túlmutat az érettségien elvárható ismeretanyag keretein, hiszen az $(a_n, b_n) \mapsto (a_{n+1}, b_{n+1})$ rekurziós mátrix hatványainak kiszámításával juthatunk a képletekhez:

$$a_n = \frac{1}{2} \left((\sqrt{2} - 1)^n + (-\sqrt{2} - 1)^n \right) = \sum_{j=0, j \text{ páros}}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} 2^{\frac{j}{2}},$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2} - 1)^n - (-\sqrt{2} - 1)^n \right) = \sum_{j=1, j \text{ páratlan}}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} 2^{\frac{j-1}{2}}.$$

Ha ezen képletek levezetése nem is, de talán a helyességük ellenőrzése elvárható emelt szinten. Mint az előző, a hasonló háromszög-sorozatokat felhasználó 8. bizonyítás, a 9. gondolatmenet is átvihető minimális változtatással az aranymetszés φ arányszámának esetére. Ekkor a $(\varphi - 1)^n = a_n + b_n\varphi$ mértani sorozatot kell vizsgálnunk, amelyben szereplő a_n és b_n sorozatokra a φ -t definiáló $\varphi^2 = \varphi + 1$ egyenlet felhasználásával kaphatunk rekurzív képleteket: $a_{n+1} = -a_n + b_n$ és $b_{n+1} = a_n$. Ezekből adódóan $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = -a_n + a_{n-1}$, emiatt a_n a váltakozó előjelű Fibonacci sorozat lesz.

10. Bizonyítás ([3] és [5, Proof 24]). Keressük az $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ rekurzív összefüggést kielégítő $x_n = bq^n$ mértani sorozatokat! Ehhez a mértani sorozat képletét a rekurzióba helyettesítéssel kapott $bq^{n+2} = -2bq^{n+1} + bq^n$ egyenletet kell megoldanunk, ami a $q^2 + 2q - 1 = 0$ másodfokú egyenletté egyszerűsödik. Ebből $q = \pm\sqrt{2} - 1$, így kétféle olyan mértani sorozatot kapunk, ami a vizsgált rekurzív szabálynak megfelel:

$$x_n = b \left(\sqrt{2} - 1\right)^n \quad \text{és} \quad x_n = b \left(-\sqrt{2} - 1\right)^n.$$

Közülük a $\sqrt{2} - 1$ hányadosút vizsgáljuk a (*) indirekt feltételből kiindulva az $x_0 = b \in \mathbb{Z}^+$, valamint az $x_1 = b(\sqrt{2} - 1) = b\frac{a-b}{b} = a - b \in \mathbb{Z}^+$ kezdő tag választással. Így ezen sorozat minden tagja egész szám lesz, hiszen a két kezdő tag egész, a sorozat többi tagját pedig az egész együtthatós $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ rekurziós összefüggésből számítjuk ki. De $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ miatt ez a mértani sorozat nullához tart, ami ellentmond annak, hogy minden tagja egész. \square

Összefüggést fedezhetünk fel az előbbi, sorozatokra építő és a hasonlóságot alkalmazó 8. bizonyítás között. Az $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ rekurzió első két tagja, $x_0 = b$ és $x_1 = a - b$, éppen az 1. ábrán lévő középső illetve jobb oldali derékszögű háromszögek befogóinak hosszúságai. Ezen két háromszög hasonlóságának aránya pedig, ugyancsak az 1. ábráról láthatóan, éppen

$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1$, ami a (*) indirekt feltételt alkalmazva éppen $\sqrt{2} - 1$, ami pedig éppen a vizsgált, nullához tartó, mértani sorozat hányadosa. Eszerint a 10. bizonyításban vizsgált rekurzió éppen a 8. bizonyításbeli háromszög sorozat befogóinak hosszúságait számítja ki, ha a megfelelő két kezdő taggal indítjuk.

Mindkét utóbbi sorozatokra épülő bizonyításban a $q = \sqrt{2} - 1$ hányadosú nullához tartó mértani sorozattal dolgoztunk. A 10. bizonyításban ez a sorozat egy látszólag légből kapott rekurziós képletet elégít ki, amely megfelelő kezdőtagok választása esetén csupa egész számból álló sorozatot eredményez. Ez a rekurziós összefüggés a $\sqrt{2}$ algebrai egész $x^2 - 2$ minimálpolinomból kapható, amelybe először elvégezzük az $x \leftarrow x + 1$ helyettesítést, majd az $x^k \sim x_{n+k}$ ($k = 0, 1, 2$) megfeleltetéssel a kapott polinomból készítjük el a rekurzió képletét:

$$(x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1 \rightarrow x^2 = -2x + 1 \rightarrow x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n.$$

Ebben az eljárásban a minimálpolinom x változóját éppen a $\sqrt{2}$ egészrészével töltük el, így a kapott polinomot nullával egyenlővé téve egy olyan rekurzió karakterisztikus egyenletét kaptuk, amely egyenletnek az egyik megoldása éppen $\sqrt{2} - 1$. Így a rekurzióknak lesz egy olyan mértani sorozat megoldása, amely egyrészt nullához tart, másrészt a (*) indirekt feltétel használatával olyan két kezdő tagot választhatunk, hogy a sorozat csak egész számból álljon, ami pedig ellentmondáshoz vezet. Ez a gondolatmenet általánosítható bármely α irracionális algebrai egészre:

- Ha $p(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j$ az α minimálpolinomja ($a_N = 1$) és $w = \lfloor \alpha \rfloor$, akkor
- $p_w(x) = p(x + w) = \sum_{j=0}^N a_j (x + w)^j = \sum_{j=0}^N a_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} x^i w^{j-i} = \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=i}^N \binom{j}{i} w^{j-i} a_j \right) x^i.$
- Mivel α egyszeres gyöke $p(x)$ -nek, ezért $0 < \alpha - w < 1$ egyszeres gyöke $p_w(x)$ -nek.
- A $p_w(x) = 0$ a karakterisztikus egyenlete az $x_{n+N} = -\sum_{i=0}^{N-1} A_i x_{i+N}$ rekurzióknak, amelyben az együtthatók az $A_i = \sum_{j=i}^N \binom{j}{i} w^{j-i} a_j$ összefüggéssel származtathatók.
- Ezen rekurzió egyik megoldása a nullához tartó $x_n = b(\alpha - w)^n$ mértani sorozat ($b > 0$).
- Ha indirekt feltesszük, hogy $\alpha = \frac{P}{Q}$, valamely P és $Q \neq 0$ egészekkel, akkor $b = Q^{N-1}$ választásával a sorozat első N kezdőtagja $x_j = P^j Q^{N-1-j}$ ($0 \leq j \leq N-1$) lesz, amelyek mind egész számok.
- Mivel a $p(x)$ polinom minden a_j együtthatója egész, ezért az eltolt $p_w(x)$ polinom minden A_i együtthatója is egész, tehát a belőle származtatott $x_{n+N} = -\sum_{i=0}^{N-1} A_i x_{i+N}$ rekurzióknak eleget tevő $x_n = b(\alpha - w)^n$ mértani sorozat minden tagja egész lesz, ami ellentmond annak, hogy ez a sorozat nullához tart.

Ha az α valós algebrai egész nem irracionális, akkor egész és $\alpha = w = \lfloor \alpha \rfloor$ a fenti gondolatmenetben. Így a vizsgált $x_n = b(\alpha - w)^n$ sorozat nulladik tagja b , de a többi tag mind nulla, emiatt a fenti gondolatmenet nem működik. Ahogy a 10. bizonyítás a fenti módon általánosítható minden algebrai egészre, ugyanúgy a megelőző 9. bizonyítás is általánosítható, amint az a [9] cikkből kiderül. Sőt a segítségével – egyszerűbb esetekben – az irracionális számot jól közelítő közönséges törteket is meg tudunk adni.

3. Közelítő közönséges törtek, numerikus kísérletek

A legtöbb előzőekben bemutatott módszer azon kívül, hogy igazolja a $\sqrt{2}$ irracionálisát, nem ad lehetőséget a $\sqrt{2}$ -t jól közelítő közönséges törtek megtalálására.

A lántörtekre épülő 7. bizonyításból azonban kaphatunk ilyen (és nem csak a $\sqrt{2}$ esetén) úgy, hogy a végtelen lántört egy véges szegmensét vesszük racionális közelítésként. Sőt, amint a kapcsolódó szakirodalomból kiderül, az adott nevezőjű törtek között ezzel a módszerrel találhatjuk meg a legjobban közelítő közönséges törtet. A lántörtbe fejtés meghaladja az érettségien elvárható ismeretanyag szintjét, a $\sqrt{2}$ vagy a φ esetében azért mégis egyszerűbb dolgunk van, mert lántört alakjuk periodikus és – lévén a minimálpolinomjuk egyszerű – könnyen kiszámítható. Azonban ez a periodikusság kizárólag a racionális együtthatós másodfokú egyenletek irracionális megoldásai esetében áll fenn, a többi algebrai szám lántört alakja már nem periodikus és – egy megfelelő pontosságú tizedestört közelítés hiányában – nem is könnyen származtatható, jóval az érettségi ismeretanyag szintje felett van, ezért középiskolában nem feldolgozható. Egy ilyen módszert tartalmaz [6], amelyben a $[c_0, c_1, \dots]$ lántörtbe fejtendő N -edfokú algebrai szám $p(x)$ minimálpolinomjának segítségével határozza meg egymás után a lántört c_n jegyeit felhasználva a $p_0(x) = p(x)$, $p_{n+1}(x) = -x^N p_n(\frac{1}{x} + c_n)$ rekurzív módon definiált polinom sorozatot.

A sorozatokra épülő 9. bizonyítás is lehetőséget ad közelítő racionális számok megadására. Ugyanis, ha α irracionális, akkor léteznek egész számokból álló a_n és b_n sorozatok úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n \alpha) = 0$, így megfelelő küszöbindex felett $\alpha \approx -\frac{a_n}{b_n}$. A $\sqrt{2}$ vagy a φ számok esetén ilyen sorozatok rekurzív módon viszonylag könnyen megadhatók úgy, hogy a megfelelő irracionális szám és egészrészének különbségét hatványozzuk felhasználva az irracionális szám minimálpolinomját, ld. 9. bizonyítást. Ezzel a módszerrel nyerhetünk közelítő közönséges törteket magasabb fokú algebrai számok esetére is úgy, hogy végigvisszük a [9] cikkben felvázolt módszert. Ehhez jelölje α a kérdéses algebrai irracionális számot és w egy olyan racionális számot, amelyre $|\alpha - w| < 1$, pl. $w = \lfloor \alpha \rfloor$. Jelölje $p(x) = x^N + \sum_{j=0}^{N-1} c_j x^j$ ($c_j \in \mathbb{Q}$) az α (N -ed fokú algebrai irracionális) minimálpolinomját, azaz

$$\alpha^N = - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \alpha^j \quad (1)$$

Képezzük az $(\alpha - w)^n$ hatványokat az

$$(\alpha - w)^n = \sum_{j=0}^{N-1} b_j^{(n)} \alpha^j = \vec{\alpha}^T \cdot \vec{b}^{(n)} \quad (2)$$

alakban, amelyben $\vec{\alpha} = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1})$ az α hatványait tartalmazó oszlopvektor, valamint a megfelelő $b_j^{(n)}$ együtthatókat tartalmazó oszlopvektor $\vec{b}^{(n)} = (b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \dots, b_{N-1}^{(n)})$.

- $0 \leq n < N$ esetén a binomiális tétellel kapjuk, hogy $b_j^{(n)} = \binom{n}{j} (-w)^{n-j}$ ($0 \leq j \leq n$) illetve $b_j^{(n)} = 0$ ($n < j \leq N-1$),
- $N \leq n$ esetén a $\vec{b}^{(n)}$ együtthatóvektorokat rekuzióval kaphatjuk meg felhasználva az (1) összefüggést minden lépésben arra, hogy az

$$(\alpha - w)^n = (\alpha - w) \sum_{j=0}^{N-1} b_j^{(n-1)} \alpha^j$$

szorzatban keletkező α^N hatványt behelyettesítsük az α legfeljebb $(N - 1)$ -fokú polinomjával. Így jutunk a

$$b^{(n)} = -wb^{(n-1)} + \mathcal{C}b^{(n-1)} \quad (3)$$

rekurzióhoz, amelyben $\mathcal{C} \in \mathbb{Q}^{N \times N}$ az α minimálpolinomjának kísérő mátrixa:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -c_{N-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Mivel $w \in \mathbb{Q}$ számot úgy választjuk, hogy $|\alpha - w| < 1$, ezért $n \rightarrow \infty$ esetén $(\alpha - w)^n \rightarrow 0$. Emiatt bizonyos $n_0 > 1$ küszöbindex esetén mondhatjuk (2) alapján, hogy $\vec{\alpha}^T \cdot b^{(n)} \approx 0$, ha $n \geq n_0$. Eszerint rögzítve egy $n_0 > 1$ küszöbindexet összeállíthatjuk a

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha}^T \cdot b^{(n_0+1)} \approx 0 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}^T \cdot b^{(n_0+N-1)} \approx 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

raciónalis együtthatós egyenletrendszer, amelyben az $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1}$ hatványokat "ismeretlenként" kezeljük. Mivel ebből rendszerből csak az α irracionális számot közelítő közönséges tört értékére van szükségünk, ezért alkalmazhatjuk a Cramer szabályt:

$$\alpha \approx r_{n_0} = \frac{\det \left(b_j^{(i)} \right)_{\substack{i=n_0+1, \dots, n_0+N-1 \\ j=0, 2, \dots, N-1}}}{\det \left(b_j^{(i)} \right)_{\substack{i=n_0+1, \dots, n_0+N-1 \\ j=1, 2, \dots, N-1}}}. \quad (5)$$

Ha az α többi hatványát közelítő közönséges törtre is szükség lenne, akkor megoldhatjuk a teljes egyenletrendszer is.

1. Példa. Például az $\alpha = [b, a, a, \dots]$, $(a, b > 0)$ periodikus lánctört egy kvadratikus algebrai egészlet definiál, hiszen minimálpolinomja $x^2 - (2b-a)x - (b(a-b)+1)$. A megfelelő másodfokú egyenlet pozitív megoldása $\alpha = \frac{2b-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. Emiatt $N = 2$ és (4) csak egy egyenletre redukálódik, így nem is szükséges determinánsokat számítani, középiskolás szintű átalakításokkal dolgozhatunk. A módszer által adott, α -t közelítő r_n közönséges törtek sorozata könnyen származtatható, ha a 3. fejezetben vázolt módszerben a $w = [\alpha] = b$ választással élünk. Ugyanis ekkor $(\alpha - b)^1 = -b + \alpha$, azaz $r_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{-b}{1} = b$ a rekurzív sorozat kezdő tagja és

$$(\alpha - b)^{n+1} = (\alpha - b)(a_n + b_n \alpha) = (-ba_n + (b(a-b) + 1)b_n) + (a_n + (b-a)b_n)\alpha,$$

amiből pedig kapjuk a rekurziós szabályt:

$$r_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = -\frac{-ba_n + (b(a-b) + 1)b_n}{a_n + (b-a)b_n} = \frac{br_n + b(a-b) + 1}{r_n + (a-b)}.$$

Ha az $\alpha = [b, a, a, \dots]$ lánctört kifejtésben az első n jegyből álló résztörtet r'_n jelöli, akkor $r'_1 = b$ és

$$r'_{n+1} = b + \frac{1}{a-b+r'_n} = \frac{b(a-b+r'_n) + 1}{a-b+r'_n} = \frac{br'_n + b(a-b) + 1}{r'_n + (a-b)},$$

tehát az α -t közelítő lánctörtek r'_n sorozata megegyezik az r_n sorozattal. Például:

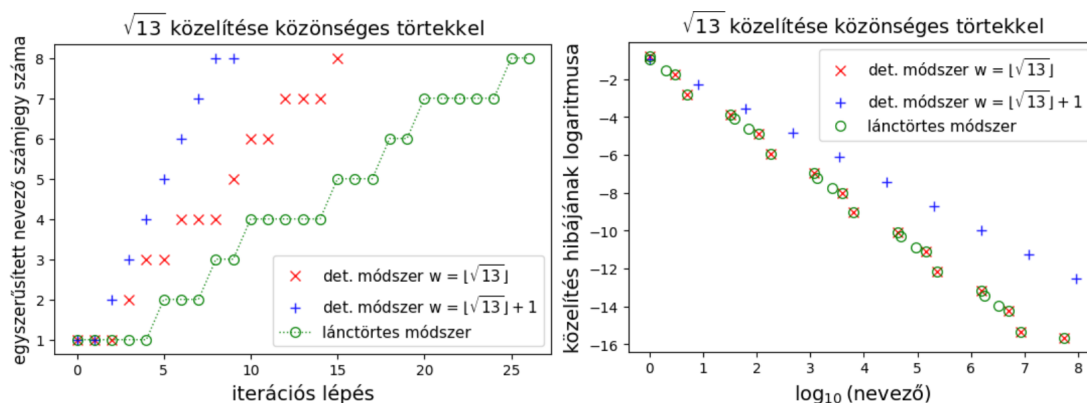
- $a = 2$ és $b = 1$ esetén az $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots]$ -t legjobban közelítő r_n közösleges törték sorozata $r_1 = 1$ és $r_{n+1} = \frac{r_n+2}{r_n+1}$, vagy
- $a = 4$ és $b = 2$ esetén az $\sqrt{5} = [2, 4, 4, \dots]$ -t legjobban közelítő r_n közösleges törték sorozata $r_1 = 2$ és $r_{n+1} = \frac{2r_n+5}{r_n+2}$ mindkét – [6] illetve [9] alapján működő – módszerből.

2. Példa. Az $\alpha = [b, a, c, a, c, \dots] = \frac{a(b-2c) + \sqrt{a^2(2b-c)^2 + 4a(ab(c-b)+c)}}{2a}$ irracionális szám esetén, amely az $\alpha^2 = (2b-c)\alpha + b(c-b) + \frac{c}{a}$ egyenletnek tesz eleget, a mértani sorozatos módszerből kapott közelítő közösleges törték sorozata $r_1 = b$ választása esetén itt is megegyezik a közelítő lánc törték sorozatával, ugyanis mindkettőt az

$$r_{n+1} = \frac{abr_n + ab(c-b) + c}{ar_n + a(c-b)}$$

rekurzív összefüggéssel számíthatjuk ki. Például $\sqrt{15} = [3, 1, 6, 1, 6, \dots]$ esetén mindkét módszerrel $r_1 = 3$, $r_{n+1} = \frac{3r_n+15}{r_n+3}$.

3. Példa. Nem minden kvadratikus algebrai irracionális esetén garantált, hogy a [6] alapján készíthető lánc tört sorozat és a [9] alapján készíthető közelítő törték sorozata megegyezik. Például a $\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \dots] = 3,60555\dots$ öt jegy hosszúságú periódussal bíró lánc tört esetén a Pythonban megvalósított algoritmusok az alábbi eredményeket adták. A [9]



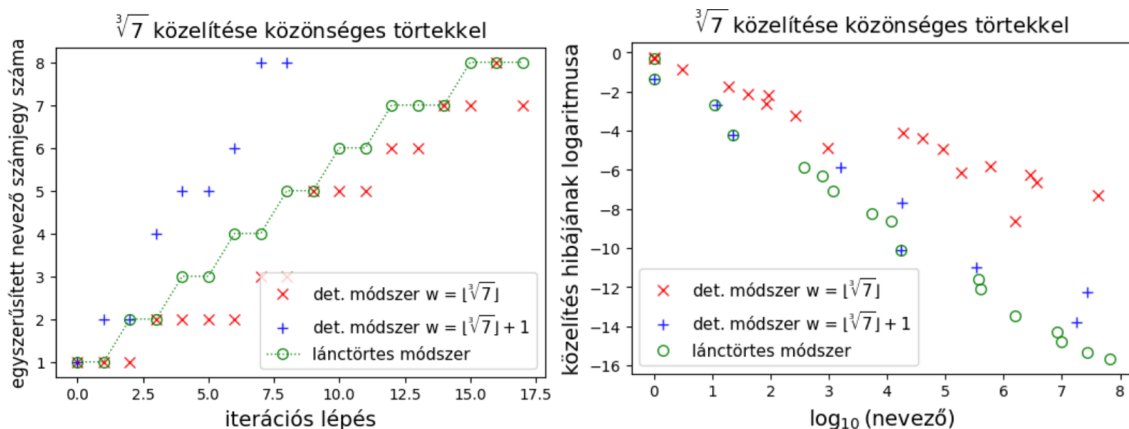
2. ábra. $\sqrt{13}$ közelítése közösleges törtékkel

alapján működő mértani sorozatos megközelítést a $\sqrt{13}$ -hoz legközelebb álló két egész szám, $w = \lfloor \sqrt{13} \rfloor = 3$ és $w = \lfloor \sqrt{13} \rfloor + 1 = 4$ felhasználásával is megvalósítottuk. A $w = 4$ választás esetén – mivel a $\sqrt{13}$ közelebb van a 4-hez – gyorsabban konvergáló közösleges tört sorozatot kapunk ugyan, de a lánc törtes módszer illetve a $w = 3$ -mal kapott tört sorozat ugyanazt a pontosságot jóval kisebb nevezőjű közösleges törttel képes elérni. Azonban a $w = 3$ választással készített tört sorozat nem tartalmaz minden közelítő lánc tört sorozatbeli tagot.

Az előbbi példákban láthatóan az emelt szintű érettségin elvárható ismeretanyaggal megérthető, a 9. bizonyításban használt mértani sorozatokra építő módszer néhány, főképp egyszerű periódusú lánc törttel megadható kvadratikus irracionális esetén ugyanazokat a közelítő közösleges törtéket adja mint a sokkal bonyolultabb [6] cikkben tárgyalt módszer amennyiben a benne használt paramétert $w = \lfloor \sqrt{\alpha} \rfloor$ alapján választjuk. Sőt, a mértani sorozatos módszerhez ekkor még az (5)-beli determinánsokat sem kell kiszámolni, hiszen ekkor a (4) rendszer egyetlen egyenletre redukálódik.

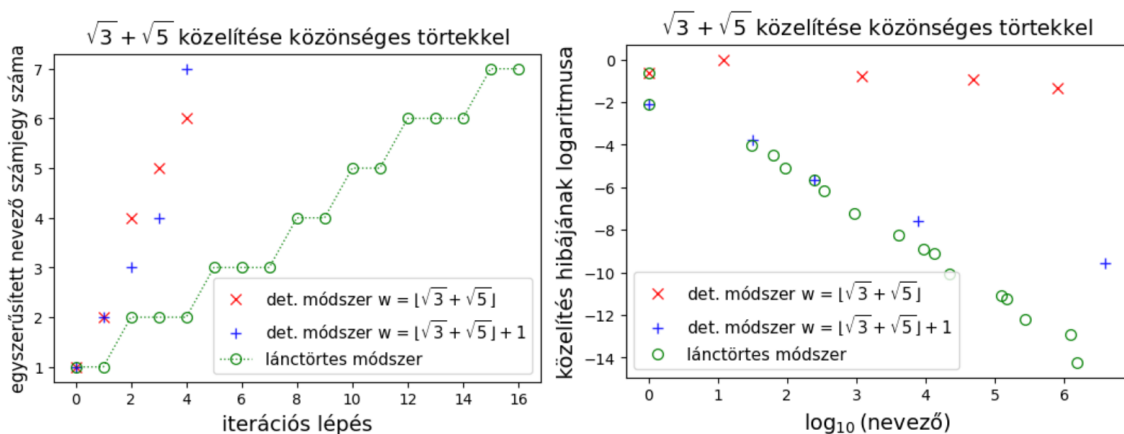
Magasabb fokú algebrai irracionálisok esetén azonban a lánc tört kifejtésük már nem periodikus, valamint (4) rendszer is több egyenletből áll. Noha ekkor a (4)-(5) alapján egyszerűbb esetekben kézzel is kiszámítható lenne egy, a vizsgált irracionális számot közelítő közönséges törtekből álló sorozat, de annak összevetése a lánc törtes módszer által adott eredménnyel úgysem lenne teljesen lehetséges a periodikusság hiánya miatt. Ezért ezt az esetet itt csak néhány, számítógépes segítséggel készített példával szemléltetjük.

4. Példa. A $\sqrt[3]{7} = [1, 1, 10, 2, 16, 2, 1, 4, 2, 1, 21, 1, 3, 5, 1, 2, 1, 1, 2, \dots] = 1.91293118\dots$ harmadfokú algebrai egész esetén a $w = \lfloor \sqrt[3]{7} \rfloor = 1$ választással a determinánsos módszer lassabban konvergál, hiszen ekkor a 9 bizonyításbeli $\sqrt[3]{7} - 1$ mértani sorozat hányados nagyobb ugyanis $\sqrt[3]{7}$ közelebb van a 2-höz. A gyorsabban konvergáló sorozat sem találja meg az összes jól közelítő közönséges törtet, amit a lánc törtes módszerrel megtalálunk.



3. ábra. $\sqrt[3]{7}$ közelítése közönséges törtekkkel

5. Példa. A $\sqrt{3} + \sqrt{5} = [3, 1, 30, 2, 1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 17, \dots] = 3.9681187\dots$ negyedfokú algebrai irracionális (minimálpolinomja $x^4 - 16x^2 + 4$) esetén a $w = 3$ paraméterrel készített determinánsos módszer konvergenciája nagyon lassú, mivel a megfelelő mértani sorozat hányadosa $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 3 = 0.9681187\dots$ nagyon közel van az 1-hez. A másik $w = 4$ paraméterrel kapott sorozat ugyan gyorsabban konvergál, de már kevés iterációs lépésben nagyon nagy nevezőjű egyszerűsített közelítő törtet ad, azaz kihagyja a sokkal kisebb nevezőjű, de mégis jobban közelítő törteket.



4. ábra. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ közelítése közönséges törtekkkel

A kézzel is kiszámítható példák és a numerikus kísérletek eredményei alapján megállapíthatjuk, hogy a [9] cikkben kifejtett elméleti módszer csak alacsony fokú algebrai irracionálisok esetén ad elfogadható közelítő közönséges törteket, azaz a módszer inkább elméleti mind gyakorlati jelentőségű. Az emelt szintű érettségien elvárható ismeretanyaggal kizárólag a kvadrátikus, azon belül is csak az egyszerű láncört-periódusú, irracionális számok esetén van esélyünk a jól közelítő közönséges törtek megtalálására. Magasabb fokú algebrai irracionálisok esetén közelítő törtek keresésére inkább ajánlatos a [6] cikkben ismertetett láncörtös módszert alkalmazni, ami azonban sajnos messze túlmutat a középiskolában elsajátítható ismeretanyag keretein.

Irodalomjegyzék

- [1] *Matematika részletes érettségi vizsgakövetelmény*, (2021).
URL <https://tinyurl.com/jem5k7e8>
- [2] **Apostol, T.**: *Irrationality of the square root of two - a geometric proof*, The American Mathematical Monthly, **107** (2000), No. 9, 841–842. doi: [10.2307/2695741](https://doi.org/10.2307/2695741).
- [3] **Araújo, J.**: *A difference equation leading to the irrationality of $\sqrt{2}$* , The American Mathematical Monthly, **121** (2014), No. 5, 443. doi: [10.4169/amer.math.monthly.121.05.443](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.05.443).
- [4] **Beigel, R.**: *Irrationality without number theory*, The American Mathematical Monthly, **98** (1991), No. 4, 332–335. doi: [10.2307/2323801](https://doi.org/10.2307/2323801).
- [5] **Bogomolny, A.**: *Square root of 2 is irrational*, (1996-2018).
URL https://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml
- [6] **Bombieri, E. and van der Poorten, A.**: *Continued Fractions of Algebraic Numbers*, In: Bosma, W., van der Poorten, A. (eds) *Computational Algebra and Number Theory. Mathematics and Its Applications*, Springer, Dordrecht., **325** (1995), 137–152. doi: [10.1007/978-94-017-1108-1_10](https://doi.org/10.1007/978-94-017-1108-1_10).
- [7] **Gaunnt, R.**: *The irrationality of $\sqrt{2}$* , The American Mathematical Monthly, **63** (1956), No. 4, 247. doi: [10.2307/2310352](https://doi.org/10.2307/2310352).
- [8] **Laczkovich, M.**: *Conjecture and Proof*, The Mathematical Association of America, 2001.
- [9] **Ungar, P.**: *Irrationality of square roots*, Math Magazine, **79** (2006), No. 2, 147–148. doi: [10.1080/0025570X.2006.11953394](https://doi.org/10.1080/0025570X.2006.11953394).