

A dimenzióanalízis módszerének alkalmazása a kutatási eredmények általánosítása céljából

Kocsis Zoltán*

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar,
Alkalmazott Tudományi Intézet, Sopron, Magyarország
kocsis.zoltan@uni-sopron.hu, ☎ 0009-0004-8021-0864

Németh Gábor

Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar,
Alkalmazott Tudományi Intézet, Sopron, Magyarország
nemeth.gabor@uni-sopron.hu, ☎ 0009-0004-7515-4845

ÖSSZEFOGLALÓ. A kutatás célja a dimenzióanalízis módszerének bemutatása és gyakorlati alkalmazásának ismertetése. Ez a módszer hatékonyan csökkenti a független változók számát, miközben biztosítja az eredmények általános érvényességét. Az elmúlt évszázadban a módszert sikeresen alkalmazták hőtani, mechanikai, áramlástan és faipari problémák megoldására, különösen olyan esetekben, amikor a vizsgált jelenségek részletei nem voltak teljesen ismertek, ezért pontos matematikai modelljük nem volt felírható. A publikáció hozzájárul a módszer szélesebb körű megismertetéséhez, kiemelve annak jelentőségét a faipari tudományokban.

ABSTRACT. The aim of the research is to present the method of dimensional analysis and its practical application. This method effectively reduces the number of independent variables while ensuring the general validity of the results. Over the past century, the method has been successfully applied to solve problems in thermodynamics, mechanics, fluid dynamics, and wood science, particularly in cases where the details of the phenomena under investigation were not fully understood, and an exact mathematical model could not be formulated. The publication aims to promote broader awareness of this practical and effective method, highlighting its significance in the field of wood sciences.

1. Bevezetés

A tudományok elsődleges célja új, eddig ismeretlen összefüggések feltárása, amelyek segítségével egy jelenség minél pontosabb leírását lehet adni az azt befolyásoló tényezők (változók) függvényében. A műszaki tudományokban a különböző jelenségeket meghatározott hajtóerők mozgatják és ezek összefüggéseit a természeti törvények határozzák meg. Ezek a törvények időtől függetlenek, változatlanok és determinisztikusak [25]. Ugyanakkor a jelenségek gyakran rendkívül bonyolultak, így a tudomány sok esetben még nem tárta fel az

ENGLISH TITLE. Application of the dimensional analysis method for generalizing research results.

KULCSSZAVAK. Dimenzióanalízis, kutatási módszertan, kísérleti adatok, fámegmunkálás, egyenlet.

KEYWORDS. Dimensional analysis, research methodology, experimental data, woodworking, equation.

* Levelező szerző.

©2025 the Author(s). Published by University of Sopron Press. This is an open access article under the CC BY-NC-SA 4.0 license.

összes összefüggést és ilyenkor a meglévő ismeretek kiegészítésére van szükség.

A korszerű gépek, berendezések, műveletek és technológiák tervezéséhez elengedhetetlen bizonyos alapvető törvényszerűségek és összefüggések ismerete, amelyek pontosan leírják a jelenséget befolyásoló változók közötti kapcsolatot. Az összefüggések feltárásának klasszikus módszere a matematikai modellek, például differenciálegyenletek elméleti levezetése, amely a meglévő tudományos ismeretek és az alaptudományok, mint a mechanika, áramlástan vagy hőtan felhasználásával történik. Az ilyen elméleti levezetések azonban feltételezéseken alapulnak, ezért az így kapott összefüggések helyességét kísérleti úton is célszerű ellenőrizni.

Az elméleti modellek kidolgozása csak akkor lehetséges, ha a jelenség mechanizmusa pontosan ismert, azaz a befolyásoló változók (tényezők) hatását megfelelően figyelembe tudjuk venni. Amikor azonban a vizsgált feladatok bonyolódnak ezáltal a változók számbavétele nehezebbé válik, a jelenség részleteinek pontos megértése akadályokba ütközhet. Gyakran előfordul az is, hogy az alaptudományok nem nyújtanak elegendő ismeretet a jelenség leírásához. Ilyen esetekben a dimenzióanalízis módszere hatékony megközelítést kínál, amely gyakorlati megfigyelésekre és kísérleti mérésekre támaszkodik. E módszer segítségével következtetni lehet a jelenség mechanizmusára és a befolyásoló változókra. Különösen fontos a releváns változók pontos azonosítása, mivel ezek nélkül nem lehetséges szisztematikus kísérleteket megtervezni és kivitelezni [8; 14; 15].

A tudományos megállapítások (természeti törvények) a matematika segítségével, összefüggésekkel írhatóak le. Az összefüggés mindig három részből áll [6; 8; 25]:

- kimenő adatrendszer (Y_i),
- a függvénykapcsolatok rendszere ($F(x_i)$),
- a bemenő adatbázis (X_i).

Formálisan felírva a fentieket:

$$Y_i = F(X_i), \quad (1)$$

ahol X_i – a független változókat jelöli.

A fenti három elemből kettőt mindig ismerni kell ahhoz, hogy az összefüggés használható legyen. Egyszerű a helyzet, ha a függvénykapcsolatok rendszere már ismert, de az esetek döntő többségében sajnos pont ez az ismeretlen. A kutatás során éppen ezért legtöbbször bemenő adatokat közlünk a rendszerrel, majd a rendszer válaszol rá kimenő adatok formájában. A kutató feladata megfejtetni, hogy a rendszer milyen természeti törvény alapján válaszolt, vagyis hogyan néz ki a függvénykapcsolatok rendszere.

1.2. A Buckingham-féle dimenzióanalízis módszer

A tudományos kísérletek gyakran költségesek és időigényesek, ezért kiemelt fontosságú, hogy a már elvégzett kísérletek eredményeit hasonló esetekre általánosítsuk. Ugyanakkor a hasonlóság megítélése sokparaméteres folyamatok esetén nem mindig egyszerű feladat. Az általánosítás lehetősége nélkül azonban a kísérletek eredményeinek értékelése korlátozott hasznosságú. Két vagy több folyamat akkor tekinthető hasonlóknak, ha lényegi, belső összefüggéseik megegyeznek [9]. Ez a feltétel azonban csak szükséges, de nem elégséges a hasonlóság megállapításához, mivel a folyamatot leíró differenciálegyenletek végtelen sok lehetséges megoldása közül az egyértelműségi feltételek határozzák meg a keresett megoldást. A hasonlóság további feltétele tehát, hogy a vizsgált folyamatok egyértelműségi feltételei – például kezdeti és peremfeltételek, geometriai jellemzők, valamint az értelmezési tartomány – azonosak legyenek, vagy azonos alakra transzformálhatók legyenek [8; 17; 18; 23].

A kísérleti adatok feldolgozásának hagyományos megközelítése a változók szerinti elemzés. Ebben az esetben a részösszefüggések száma megegyezik a független változók számával, ami gyakran bonyolulttá teszi az összefüggések összerendezését és az eredő függvény helyes matematikai alakjának meghatározását. A kísérletek szervezése azonban jelentősen egyszerűbbé válik és az eredmények általánosan alkalmazhatóvá tehető, ha a kísérleti adatokat hasonlósági kritériumok formájában dolgozzuk fel. Ebben a folyamatban kiemelkedő segítséget nyújt a dimenzióanalízis módszere [8; 9; 19].

A dimenzióanalízis története a 19. század végére nyúlik vissza, amikor a fizikusok és mérnökök felismerték a fizikai mennyiségek dimenzióinak jelentőségét a természeti törvények megértésében. Az első jelentős hozzájárulást Joseph Bertrand francia matematikus tette 1878-ban [4], míg Lord Rayleigh 1877-es „*The Theory of Sound*” című művében részletesen tárgyalta a módszert és annak alkalmazási lehetőségeit [21]. A dimenzióanalízis formális rendszerezése és gyakorlati alkalmazhatóságának megteremtése azonban Edgar Buckingham [9] nevéhez fűződik, aki 1914-ben publikált munkájában bevezette a π -tételt. Buckingham érdeme, hogy a módszert egységes elméleti keretbe foglalta és gyakorlati szempontból is széles körben alkalmazhatóvá tette, különösen a mérnöki és fizikai problémák kezelésében. Bár a tétel általánosítását más kutatók, például Vaschy (1892) és Riabouchinsky (1911) is elvégezték, Buckingham munkája kiemelkedett világos rendszerezésével és a dimenzió nélküli π -csoportok fogalmának bevezetésével, amely megalapozta a módszer nemzetközi elterjedését.

A dimenzióanalízis az elmúlt 100 év során számos tudományterületen bizonyította hatékonyságát, többek között mechanikai [7], dinamikai [2], fizikai [12; 13; 26], hidrodinamikai [5], kémiai [20], gépészeti [3] és közgazdaságtani [11] alkalmazásokban. A tudományos világban számos dimenzió nélküli szám vált alapvető jelentőségűvé különféle területeken. A teljesség igénye nélkül íme néhány példa: a Reynolds-szám a folyadékok áramlástani jellemzőit írja le, és meghatározza, hogy egy áramlás lamináris vagy turbulens lesz-e. A Prandtl-szám a hőátadás és az áramlás közötti viszonyt jellemzi, míg a Nusselt-szám a konvekciós hőátadás hatékonyságát fejezi ki. A Froude-szám a gravitáció és a tehetetlenségi erők arányát adja meg, és különösen fontos a hajótervezésben és hullámjelenségek vizsgálatában.

A Buckingham π -tétel kimondja, hogy ha egy fizikai problémában n független változó szerepel, és ezek k független dimenzióval rendelkeznek (például hossz, idő, tömeg), akkor $n-k$ darab független, dimenzió nélküli mennyiséget, úgynevezett π -csoportot lehet képezni. Ez a módszer jelentősen leegyszerűsíti a bonyolult, több változót tartalmazó rendszerek elemzését. A tétel lényege, hogy a rendszer változóinak dimenzióit figyelembe véve olyan kombinációkat hozunk létre, amelyek dimenziómentesek, vagyis függetlenek az alkalmazott mértékegységektől. Ennek érdekében a dimenziómátrix-módszer és lineáris algebrai technikák segítségével azonosítjuk a független változókat, amelyek alapján a π -csoportok felépíthetők. Fontos szabály, hogy minden változó csak egyszer szerepelhet egy adott π -csoportban, de más csoportokban újra felhasználható. Ez biztosítja, hogy a csoportok egymástól függetlenek legyenek, és ne tartalmazzanak redundáns információt. A π -csoportok olyan kombinációkat alkotnak, amelyek nemcsak dimenziómentesek, hanem egymástól függetlenek is, ami azt jelenti, hogy egyik csoport sem lehet másik aránya vagy többszöröse.

A módszer lehetővé teszi, hogy minden független változó hatását figyelembe vegyük, miközben a fizikai rendszer egyszerűsített, általánosan alkalmazható leírását nyújtja. Ezáltal a Buckingham π -tétel a dimenzióanalízis egyik alapvető eszköze a tudományos és mérnöki problémák megoldásában.

A hasonlósági elmélet szerint bármilyen jelenséget leíró összefüggés kifejezhető a jelenségre jellemző hasonlósági kritériumok függvényében:

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0, \quad (2)$$

ahol a $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ dimenzió nélküli számok.

Ha a kísérleti eredményeket hasonlósági kritériumok formájában dolgozzuk fel, általános érvényű összefüggéseket kapunk, amelyek minden egymással hasonló jelenségre alkalmazhatók. Az így megfogalmazott egyenletek természetes formája a kritériumi egyenlet, amely kétféleképpen állítható elő: egyrészt például differenciálegyenletek alapján, másrészt a dimenzióanalízis módszerével. A kritériumi egyenletekben a hasonlósági kritériumok mellett előfordulhatnak úgynevezett szimplexek is, amelyek azonos dimenziójú mennyiségek hányadosaként definiálhatók [8; 18; 19]. A hasonlóságelmélet szerint a kritériumi egyenletek általában hatványfüggvények szorzataként írhatók fel:

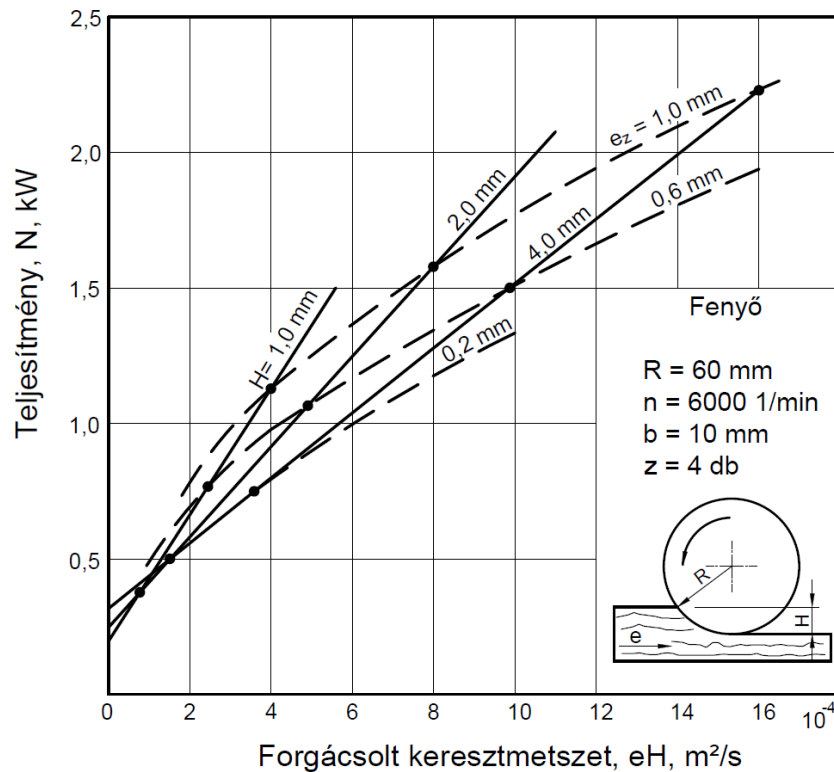
$$\pi_1 = C \cdot \pi_2^a \cdot \pi_3^b \dots \pi_i^n, \quad (3)$$

ahol a C és a, b, \dots, n állandókat a kísérleti eredmények alapján kell meghatározni.

A dimenzióanalízis módszerének alkalmazásakor először a megfelelő mértékegységrendszert kell kiválasztani. Az alapegységek lehetnek például „hossz-erő-idő” vagy „hossz-tömeg-idő”, de bizonyos esetekben további, látszólagos mértékegységek is használhatók. Ugyanakkor valamennyi hasonlósági kritérium számszerű egyezőségének megvalósítása a gyakorlatban sokszor lehetetlen. Ezért gyakran kénytelenek vagyunk teljes hasonlóság helyett részleges hasonlósággal dolgozni [16; 17; 19]. Ez azt jelenti, hogy a hasonlóság csak a folyamat néhány – lehetőség szerint döntő – elemére érvényes. Ilyenkor bizonyos részjelenségeket elhanyagolunk, és az elhanyagolás mértéke dönti el, mennyire használhatók a kapott eredmények. A dimenzióanalízis egyik legnagyobb előnye, hogy egyszerűen alkalmazható a sokváltozós folyamatok leírására, így elkerülhetők a bonyolult matematikai modellek. Hátránya azonban, hogy a változókat helyesen kell kiválasztani és – a módszer szabályai szerint – csoportosítani. Emellett kiemelten fontos a kísérletek pontos kivitelezése, mivel a mért adatok helyes – a kritériumi egyenletnek megfelelő – feldolgozása igazolja az egyenlet helyességét vagy helytelenségét. Gyakori probléma, hogy nehéz eldönteni, a kísérleti adatok hibásak-e, vagy maga a kritériumi egyenlet tartalmaz téves összefüggéseket. Ha a mérési pontok nem illeszkednek megfelelően a kritériumi egyenlet által meghatározott függvényhez, akkor vagy a mérések pontatlanok, vagy a kritériumi egyenlet helytelen. Az is előfordulhat, hogy a kísérletek megfelelőek, de az analízis során bizonyos fontos változókat figyelmen kívül hagyunk, vagy nem megfelelő változókat vettünk figyelembe. Ez helytelen dimenzió nélküli számokhoz, hibás hasonlósági kritériumi egyenlethez, ezáltal inkonzisztenciához vezethet. A megbízható eredmények érdekében ezért elengedhetetlen a mérések többszöri megismétlése és a változók alapos szakmai megválasztása.

2. A dimenzióanalízis módszerének bemutatása faipari példán keresztül

A dimenzióanalízis módszerének gyakorlati alkalmazását az 1. ábrán bemutatott faipari példán keresztül szemléltetjük. A példában szereplő forgácsolási kísérlet mérési körülményeinek leírása a jelölt szakirodalomban [24] megtalálható, ugyanakkor a mérési adatok dimenzió nélküli feldolgozására eddig ilyen formában nem került sor. Célunk ezért, hogy a marási teljesítményfelvétel (N) kapcsán egy általános érvényű hasonlósági egyenletet állítsunk fel. Az 1. ábrán egy marási művelet teljesítményfelvételét (N) láthatjuk fenyő faanyag forgácsolásakor az időegység alatt forgácsolt keresztmetszet ($e \cdot H$) függvényében különböző fogásmélység (H) és egy fogra jutó előtolás (e_z) mellett.



1. ábra. A marás teljesítményfelvétele [24, p. 355.]

Az 1. ábrán bemutatott kísérlet során bizonyos paraméterek nem változtak. Ilyenek a fordulatszám (n), a kések száma (z), a forgácsolási szélesség (b), a szerszám élkorsugara (R) és a fafaj. A változó paraméterek között szerepelt a fogásmélység (H), az előtolási sebesség (e) és a vele összefüggő egy fogra jutó előtolás (e_z). Az 1. ábra főbb metszéspontjai alapján a forgácsolásra jellemző mérési adatokat és az egyes paraméterek közötti összefüggéseket az alábbi táblázatokban (1-2. táblázat) foglaltuk össze.

1. táblázat. A mérést összefoglaló adat és paramétertáblázat

Paraméter megnevezése	Jelölés	Érték/összefüggés	Mértékegység
Szerszám élkorsugara	R	0,06	m
Gyalutengely fordulatszáma	n	100	1/s
Forgács szélesség	b	0,01	m
Faanyag (fenyő) hajlítószilárdsága	σ_b	60000000	Pa
Forgácsoló élek száma	z	4	db
Egy fogra eső előtolás	e_z	$e/(z \cdot n)$	m
Előtolási sebesség	e	$e_z \cdot n \cdot z$	m/s
Forgácsolási sebesség	v_f	$2R \cdot \pi \cdot n$	m/s

2. táblázat. A mért értékek összefoglaló táblázata (1. ábra metszéspontjai alapján)

	H (mm)	e_z (m)	N (W)	e (m/s)
		0,001	1150	0,400
1		0,0006	750	0,248
		0,0002	400	0,082
		0,001	1580	0,400
2		0,0006	1080	0,248
		0,0002	500	0,087
		0,001	2250	0,400
4		0,0006	1500	0,248
		0,0002	815	0,085

A következő lépés a forgácsolás teljesítményfelvételét befolyásoló tényezők, mint független változók számbavétele és a konzekvens dimenziók megadása *tömeg(M)-hossz(L)-idő(T)* bázison:

$$N = f(H, b, R, e, \sigma_b), \quad (4)$$

ahol

		Mértékegység formálisan felírva
N –	a marási teljesítményigény,	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$ ML^2T^{-3}
H –	a fogásmélység,	m L
b –	a forgácsolási (marási) szélesség,	m L
R –	a szerszám élkörösugara,	m L
e –	az előtolási sebesség,	m/s LT^{-1}
σ_b –	a faanyag hajlítózilárdsága, (fafaji sajátosság)	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}^2$ $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$

Célszerű olyan változókat kiválasztani, amelyek a gyakorlat szempontjából a legnagyobb hatást gyakorolják a forgácsolási teljesítményre. Ezért a feladat megoldásában az előtolási sebességet (e) vesszük figyelembe a változók között, mivel közvetlenül arányos az e_z , n és z paraméterekkel, valamint közvetetten a forgácsolási sebességgel (v_f). Az e ismeretében e_z számolható így elkerülhető bármilyen inkonzisztencia a számításokban.

A következő lépés az alapvető dimenziók és a független π -csoportok számának a meghatározása. A változók száma 6 (N, H, b, R, e, σ_b), az alapvető dimenziók száma 3 (M, L, T), tehát a független π -csoportok száma: $6 - 3 = 3$. Vagyis három dimenzió nélküli π -csoportot kell létrehozunk. A megoldáshoz a dimenziómátrix módszerét alkalmazzuk [1; 6; 8; 10]. A dimenziómátrixot a kiválasztott paraméterek dimenzióinak felírásával készítjük el. Az oszlopok az egyes változókat, a sorok pedig a dimenziókat képviselik.

3. táblázat. A változók dimenziómátrixa

Dimenziók/Változók	N	H	b	R	e	σ_b
M (tömeg, kg)	1	0	0	0	0	1
L (hossz, m)	2	1	1	1	1	-1
T (idő, sec)	-3	0	0	0	-1	-2

Ezek után kiválasztunk három alapváltozót, amelyek mindhárom alapvető dimenziót lefedik. A Buckingham π -tétel szerint ugyanis az alapváltozók száma mindig megegyezik az alapvető dimenziók számával. Célszerű olyan alapváltozókat választani, amelyek egyszerűen kombinálhatók a fennmaradó változókkal, és amelyek lefedik az összes alapvető dimenziót. Az alapváltozók kiválasztása többféleképpen történhet, de a végeredmény minden esetben azonos marad: a hasonlósági egyenlet dimenzió nélküli, független csoportokat tartalmaz. Ezek a csoportok azonban különböző kombinációkban tartalmazhatják a változókat az alapválasztástól függően. A választott alapváltozók legyenek az alábbiak:

$$\begin{aligned} H &- && \text{(hosszegység, [L]),} \\ e &- && \text{(hosszegység és idő, [LT}^{-1}\text{]),} \\ \sigma_b &- && \text{(tartalmazza a tömeg dimenzióját is, [ML}^{-1}\text{T}^{-2}\text{]).} \end{aligned}$$

A célunk, hogy a fennmaradó változókkal (N , b , R) úgy kombináljuk az alapváltozókat (H , e , σ_b), hogy minden dimenzió kioltódjon, ezáltal dimenzió nélküli csoportokat kapunk.

Az első π -csoportot (dimenzió nélküli csoportot) a következő alakban írhatjuk fel:

$$\pi_1 = N \cdot H^a \cdot e^b \cdot \sigma_b^c. \quad (5)$$

Most helyettesítsük be a dimenziókat minden változóhoz:

$$\begin{aligned} N: & \text{ [ML}^2\text{T}^{-3}\text{]} \\ H: & \text{ [L]} \\ e: & \text{ [LT}^{-1}\text{]} \\ \sigma_b: & \text{ [ML}^{-1}\text{T}^{-2}\text{]} \end{aligned}$$

Behelyettesítve a dimenziókat π_1 -be (5. egyenlet):

$$\pi_1 = [\text{ML}^2\text{T}^{-3}] \cdot [\text{L}]^a \cdot [\text{LT}^{-1}]^b \cdot [\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]^c. \quad (6)$$

Bontsuk fel a kifejezést, és rendezzük el a tagokat az egyes dimenziók szerint:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Tömeg (M) szerint:} & \quad M^{1+c} \\ 2. \text{ Hossz (L) szerint:} & \quad L^{2+a+b-c} \\ 3. \text{ Idő (T) szerint:} & \quad T^{-3-b-2c} \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy π_1 dimenzió nélküli legyen, minden egyes kitevőnek nullának kell lennie:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Tömeg egyenlet: } & 1 + c = 0 \rightarrow \underline{c = -1} \\ 2. \text{ Hossz egyenlet (} c \text{ értékét behelyettesítve):} & 2 + a + b - c = 0 \rightarrow 2 + a + b + 1 = 0 \rightarrow \\ & \underline{a + b = -3} \\ 3. \text{ Idő egyenlet:} & -3 - b - 2c = 0 \rightarrow -3 - b + 2 = 0 \rightarrow \underline{b = -1} \end{aligned}$$

Megoldva az egyenleteket a , b és c értéke: $a = -2$; $b = -1$; $c = -1$

Az első π -csoport tehát:

$$\pi_1 = N \cdot H^{-2} \cdot e^{-1} \cdot \sigma_b^{-1} = \frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e}. \quad (7)$$

A további π csoportokhoz (π_2 és π_3) az R és b változókat használjuk, hogy dimenzió nélküli arányokat hozzunk létre H -val. Az előzőkhöz hasonlóan az alábbi dimenzió nélküli csoportokat kaptuk eredményül:

$$\pi_2 = \frac{R}{H} \quad \text{és} \quad \pi_3 = \frac{b}{H}. \quad (8)$$

A Buckingham π -tétel szerint ezek a csoportok egy függvénnyel összekapcsolhatók:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \quad (9)$$

Azaz a két dimenzió nélküli csoport között egy általános kapcsolat áll fenn. Ezt úgy is felírhatjuk, hogy

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3). \quad (10)$$

vagy kifejtve:

$$\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = f\left(\frac{R}{H}, \frac{b}{H}\right), \quad (11)$$

ahol f egy ismeretlen függvény, amely empirikus adatok vagy elméleti elemzések alapján határozható meg. Ha empirikus adatok alapján szeretnénk meghatározni a függvényt, gyakran feltételezzük, hogy a dimenzió nélküli számok között arányosság áll fenn, amely jó közelítéssel hatványfüggvénnyel írható le:

$$\pi_1 \approx \pi_2^n \cdot \pi_3^m \quad \text{vagy} \quad \frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = C \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{H}\right)^m. \quad (12)$$

A kitevők (n és m) és a C állandó (arányossági tényező) értékének meghatározása empirikus úton történik, a kísérleti adatok feldolgozásával és logaritmus-transzformált egyenlet segítségével. A logaritmus-transzformáció segítségével linearizálhatjuk a hasonlósági egyenletet (12. egyenlet) az alábbiak szerint:

$$y = \ln\left(\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e}\right),$$

$$x_1 = \ln\left(\frac{R}{H}\right),$$

$$x_2 = \ln\left(\frac{b}{H}\right).$$

Ezáltal a kifejezés az alábbi alakban írható fel:

$$y = \ln(C) + n \cdot x_1 + m \cdot x_2. \quad (13)$$

Ez egy többváltozós lineáris regresszió forma, ahol y a függő változó, x_1 és x_2 a független változók, és $\ln(C)$ az y -tengelymetszet.

Ezek után a lineáris regresszió eredményei megadják:

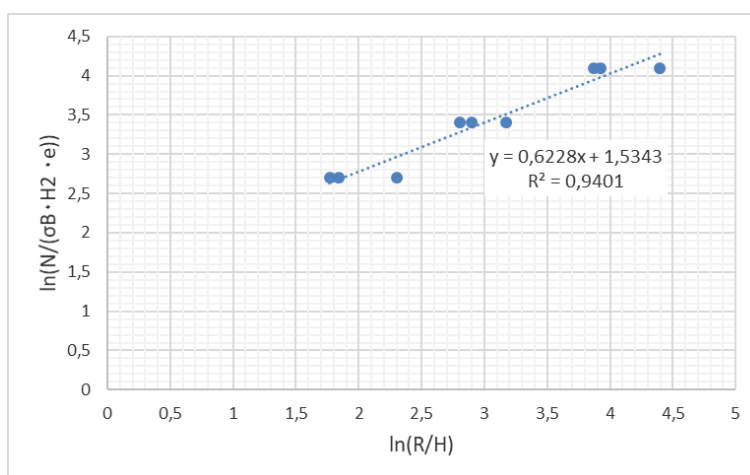
- n értékét, amely az x_1 -hez (azaz $\ln(R/H)$ -hoz) tartozó meredekség.
- m értékét, amely az x_2 -höz (azaz $\ln(b/H)$ -hoz) tartozó meredekség.
- $\ln(C)$ értékét, amely az y -tengelymetszet, vagyis $C = e^{\text{metszet}}$.

A kísérleti adatok felhasználásával a 4. táblázatban megadtuk a hasonlósági egyenletben szereplő π -csoportokat, valamint a kitevők meghatározásához szükséges logaritmizált értékeket.

4. táblázat. A dimenzió nélküli mennyiségek összefoglaló táblázata

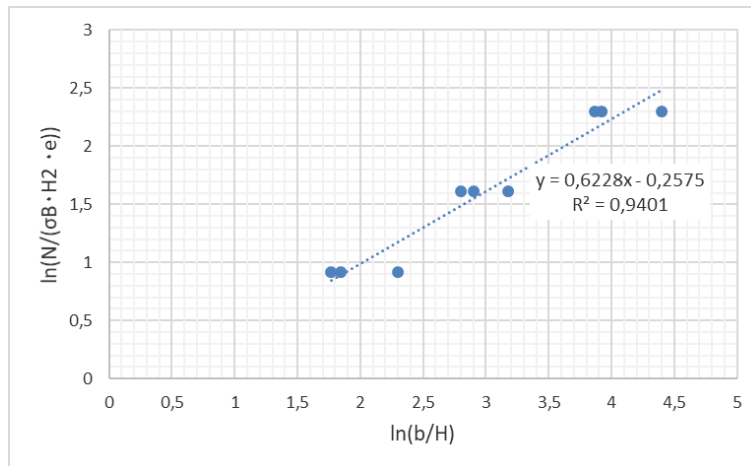
H (m)	e_z (m)	$N_{(\text{mért})}$ (W)	e (m/s)	$N/(\sigma_b \cdot H^2 \cdot e)$	R/H	b/H	$\ln(N/(\sigma_b \cdot H^2 \cdot e))$	$\ln(R/H)$	$\ln(b/H)$	$N_{(\text{számolt})}$
0,001	0,001	1150	0,400	47,917	60	10	3,869	4,094	2,303	1222
0,001	0,0006	750	0,248	50,505	60	10	3,922	4,094	2,303	756
0,001	0,0002	400	0,082	81,301	60	10	4,398	4,094	2,303	251
0,002	0,001	1580	0,400	16,458	30	5	2,801	3,401	1,609	1986
0,002	0,0006	1080	0,248	18,182	30	5	2,900	3,401	1,609	1229
0,002	0,0002	500	0,087	23,946	30	5	3,176	3,401	1,609	432
0,004	0,001	2250	0,400	5,859	15	3	1,768	2,708	0,916	3225
0,004	0,0006	1500	0,248	6,313	15	3	1,843	2,708	0,916	1996
0,004	0,0002	815	0,085	9,988	15	3	2,301	2,708	0,916	685

A kitevők (n és m) értékeit ezek alapján meghatározhatjuk az alábbi függvénykapcsolatok rendszerében:



2. ábra. n kitevő értékének meghatározása

Az adatokra illesztett lineáris regressziós egyenes alapján meghatároztuk az n kitevő értékét: $n = 0,6228$. Hasonló módon, az m kitevő értékét az alábbi grafikus ábrázolás segítségével kaptuk meg (3. ábra): $m = 0,6228$. A regressziós elemzés eredményei alapján megállapítható, hogy a pontok jól illeszkednek a regressziós egyenesre, amit az $R^2 = 0,94$ determinációs együttható is alátámaszt. Ez az illeszkedési szint megfelel a tudományos eredmények igazolásához szükséges követelményeknek.



3. ábra. m kitevő értékének meghatározása

A kísérleti adatok feldolgozása után a hasonlósági egyenlet az alábbi konkrét alakban írható fel:

$$\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = C \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^{0,6228} \cdot \left(\frac{b}{H}\right)^{0,6228} \quad \text{vagy} \quad \frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = C \cdot \left(\frac{R \cdot b}{H^2}\right)^{0,6228} \quad (14)$$

C -állandó átlagos értéke ennek megfelelően $C = 0,796$ –ra adódott, így a végső egyenlet az alábbiak szerint alakult:

$$\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = 0,796 \cdot \left(\frac{R \cdot b}{H^2}\right)^{0,6228} \quad (15)$$

Kifejezve a forgácsolási teljesítményt (N):

$$N = \sigma_b \cdot H^2 \cdot e \cdot 0,796 \cdot \left(\frac{R \cdot b}{H^2}\right)^{0,6228} \quad (16)$$

3. Konklúzió

Az empirikus egyenlet (16. egyenlet) a kiindulási paraméterek függvényében adja meg a marási teljesítményigény egy lehetséges számítási formuláját. Ez az általános alak más, hasonló forgácsolási körülményekre is alkalmazható, azonban a kitevők (n , m) és a C -állandó értékei az adott kísérleti körülményekhez kötöttek. Ezért ezeket mindig a specifikus feltételekhez kell igazítani, és értékeiket kísérleti úton kell meghatározni.

A 4. táblázatban bemutatott mért és a hasonlósági formulával számolt teljesítményértékek alapján az alábbi következtetések vonhatók le:

- A számított teljesítményértékek általában jó közelítést nyújtanak a mért értékek átlagos értékéhez. Azonban az adatok szórása és az egyedi eltérések elemzése alapján kijelenthető, hogy az egyenlet pontosítása szükséges lehet. A jelentősebb eltérések okainak feltárása érdekében célszerű lenne további, eddig figyelmen kívül hagyott tényezőket (pl. egyéb forgácsolást befolyásoló paraméterek, szerszámkopás, dinamikus hatások) is figyelembe venni a modellben.
- A C állandó átlagos értéke ($C = 0,796$) és szórása ($\pm 28,02\%$) kapcsán megállapítható, hogy az egyenlet jelenlegi formája nem képes teljes pontossággal figyelembe venni az összes releváns paramétert, amelyek hatással vannak a marási teljesítményre. A szórás nagyrészt a C -érték paraméterfüggőségének eredménye, amelyet például az anyagi jellemzők, forgácsolási sebesség, előtolás vagy a szerszám állapotának változásai

befolyásolnak. Ez azt mutatja, hogy az átlagos C -érték alkalmazása ugyan egyszerűsítést nyújt, de jelentős szórást eredményez a mért és számított teljesítményértékek között, különösen szélsőséges körülmények esetén.

- A jelenlegi formában az egyenlet alkalmazható durva becsléshez, különösen olyan forgácsolási körülmények között, amelyek közel állnak a mért értékek átlagához.

Az eredmények azt sugallják, hogy a C állandót a kísérleti paraméterek függvényében célszerű újra modellezni. Kutatásunk további célja, hogy C értékét explicit módon összefüggésbe hozzuk a befolyásoló paraméterekkel, illetve csoportosított analízis segítségével csökkentjük a szórást. Ezzel a modell (egyenlet) pontossága és alkalmazhatósága jelentősen javítható.

4. Összefoglalás

A dimenzióanalízis egyszerű és hatékony módszert kínál a komplex rendszerek vizsgálatára, mértékegységtől függetlenül, általános érvényű hasonlósági egyenletek formájában. Ez különösen előnyös a mérnöki és természettudományos kutatásokban, mivel lehetővé teszi a rendszerek viselkedésének skálázását és a változók számának jelentős csökkentését. A módszer előnyei közé tartozik a kísérletek optimalizálása, kevesebb méréssel elérhető általánosítható eredmények, valamint új fizikai törvényszerűségek felismerése.

A mesterséges intelligencia (AI) további lehetőségeket kínál a dimenzióanalízis gyakorlati alkalmazásában. Az AI algoritmusai képesek gyorsan és hatékonyan elemezni nagyméretű adatbázisokat, azonosítani a dimenzió nélküli csoportokat, valamint optimalizálni az empirikus modellek paramétereit. Ezáltal a dimenzióanalízis alkalmazási lehetőségei jelentősen bővíthetnek a jövőben. E módszer egyszerűsége és sokoldalúsága biztosítja, hogy a dimenzióanalízis a tudományos és mérnöki problémák megoldásának egyik alapvető eszközévé váljon.

Irodalomjegyzék

- [1] Bakarji, J., Callahan, J., Brunton, S. L., & Kutz, J. N., Dimensionally consistent learning with Buckingham Pi. *Nature Computational Science*, (2022), 2(12), 834-844. doi: [10.48550/arXiv.2202.04643](https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.04643)
- [2] Baker, W.E., Westine, P.S., Dodge, F.T., *Similarity Methods in Engineering Dynamics*, Hayden, Rochelle Park, (1973), N.J. 396. p.
- [3] Barenblatt, G.I., *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1996), UK. 96. p.
- [4] Bertrand, J., Théorie des dimensions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, (1878), 86, 1234–1237.
- [5] Birkhoff, G., *Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude*, first ed., Princeton University, (1950), Press. 430. p.
- [6] Bluman, G. W., Kumei, S., Potential symmetries. *Symmetries and Differential Equations*, (1989), 352-383.
- [7] Brand, L., *The Pi Theorem of Dimensional Analysis*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, (1957), 1:35-45.
- [8] Bridgman, P. W., *Dimensional analysis*. Yale University Press, 1922.
- [9] Buckingham, E., On the physically similar systems. *Physical Review*, (1914), (4):345-376. doi: [10.1103/PhysRev.4.345](https://doi.org/10.1103/PhysRev.4.345)
- [10] Conejo, A. N., Buckingham's π Theorem. *Fundamentals of Dimensional Analysis: Theory and Applications in Metallurgy*, (2021), 69-76.

- [11] de Jong, F.J., Quade, W., *Dimensional Analysis for Economists*, Nort Holland, Amsterdam, (1967), 220. p.
- [12] Eddington, Sir A.S., *The Philosophy of Physical Science*, Cambridge University Press, Cambridge, (1939), 225. p.
- [13] Einstein, A., Relativity and the problem of space: in Relativity, the Special and the General Theory, A Popular Exposition, Crown, New York, 1961 (a translation of the 15th edition, 1952) in SNT Vol. 2, 744. p.
- [14] Gibbings, J. C., *Dimensional analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [15] Girard, A., Dimensionless Policies Based on the Buckingham π Theorem: Is This a Good Way to Generalize Numerical Results?. *Mathematics*, (2024), 12(5), 709. doi: [10.3390/math12050709](https://doi.org/10.3390/math12050709)
- [16] Hardtke, J. D., On Buckingham's π -Theorem, (2019), *arXiv preprint arXiv:1912.08744* doi: [10.48550/arXiv.1912.08744](https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.08744)
- [17] Hart, G. W., *Multidimensional analysis: algebras and systems for science and engineering*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [18] Kline, S. J., *Similitude and approximation theory*. McGraw-Hill, 1965.
- [19] Langhaar, H.L., *Dimensional Analysis and Theory of Models*, John Wiley & Sons Ltd, New York, (1951), N. Y., S. 85-166.
- [20] Lokarnik, M., *Dimensional Analysis and Scale-Up in Chemical Engineering*, Springer Verlag, Berlin, (1991), 178. p.
- [21] Rayleigh, J. W. S., *The Theory of Sound*. Macmillan, 1877.
- [22] Riabouchinsky, D., Méthode des variables dimensions et ses applications. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, (1911), 153, 133–138.
- [23] Sedov, L. I., *Similarity and dimensional methods in mechanics* (10th ed.). CRC Press, 1993.
- [24] Sitkei, Gy., *A faipari műveletek elmélete*. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest, (1994), pp. 343-356.
- [25] Sitkei, Gy., *Előadások az akadémián: „Hasonlósági törvények alkalmazása a műszaki tudományokban”*. Nyugat-magyarországi Egyetem Kiadó, (2013), Sopron, pp. 2-10.
- [26] Tolman, R.C., The Measurable Quantities of Physics, *Physical Review*, (1917), 9(3):237-253.
- [27] Vaschy, A., Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques*, (1892), 19(5), 25–28.

