ABSZTRAKT

A valós számok halmaza az összeadás és a szorzás műveletekkel, valamint a rendezéssel rendezett testet alkot. Ismeretes, hogy nem lehetséges a valós számok halmazának olyan bővítése, amely úgy terjeszti ki a műveleteket és a rendezést, hogy a kiterjesztés után a bővített halmaz rendezett test maradjon. A tanulmányban bemutatjuk, hogy a robbantott számok halmaza új műveletek bevezetésével a valós számok halmazát tartalmazó rendezett testet alkot. Felvillantjuk az új számfogalom néhány alkalmazási lehetőségét is.

Kulcsszavak: algebrai test, rendezés, robbantott szám, diszkriminátor, komplex modell, multiverzum

Évkönyv 2022, XVII. évfolyam, 1. szám
Újvidéki Egyetem
Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka

ETO: 517.13
DOI: https://doi.org/10.18485/uns_evkonyv.2022.12
Eredeti tudományos munka
A leadás időpontja: 2022. június 21.
Az elfogadás időpontja: 2022. december 25.

SZALAY ISTVÁN
Szegedi Tudományegyetem
Juhász Gyula Pedagógusképző Kar
Alkalmazott Pedagógiai Intézet
szalay.istvan22@gmail.com

A VALÓS SZÁMOK HALMAZÁNAK RENDEZETT ALGEBRAI TESTTÉ BŐVÍTÉSE

A robbantott számok helye a számfogalomban

Jól ismert, hogy a valós számok halmaza az összeadás (jele: +) és a szorzás (jele: ·) műveletekkel és a rendezéssel (jele: <) rendezett testet alkot. A rendezett testben érvényes az összeadás és a szorzás monotonitása, azaz

Bármely valós x , y ,z számhármas esetén, ha $x < y$, akkor $x + z < y + z$.

Bármely valós x , y ,z számhármas esetén, ha $x < y$ és $0 < z$, akkor $x \cdot z < y \cdot z$.

Ismeretes, hogy nincs a valós számok halmazának olyan bővítése, amely úgy terjeszti ki a műveleteket és a rendezést, hogy a kiterjesztés után a bővített halmaz rendezett test maradjon. Jól példázza ezt az abszolút érték fogalma

(*) $$|x| = \sqrt{x^2}\,,$$

(**) $$|x| = \begin{cases} x, & ha\, x > 0 \\ 0, & ha\, x = 0\,. \\ -x, & ha\, x < 0 \end{cases}$$

A valós számok halmazában (*) és (**) ekvivalens egymással.

Ha a valós számok halmazát a komplex számok halmazává bővítjük, akkor a műveletek a korábbiak kiterjesztései (azaz valós x és y esetén visszakapjuk őket), de nem definiálunk rendezést. Ekkor, a (*) komplex $x = Re\, x + i \cdot Im\, x$ esetén az abszolút érték kiterjesztéseként adódik, hogy $|x| = \sqrt{(Re\, x)^2 + (Im\, x)^2}$, míg, a (**) a komplex számok rendezésének hiánya miatt értelmetlen.

A robbantott számok halmaza a valós számok halmazának olyan bővítése, amelyre a valós számok rendezése kiterjeszthető (azaz valós x és y esetén marad változatlan), „cserébe” viszont új műveleteket, szuper-összeadást (jele: $\overline{\oplus}$) és szuper-szorzást (jele: $\overline{\odot}$) kell használnunk. Ekkor, a robbantott számokra, a (**) definíció az érvényes.

A robbantott szám fogalma a valós szám fogalmára támaszkodik, ezért a valós számok axiómarendszere a felépítés alapja. *A valós számok R halmazának* axiomatikus felépítését úgy kapjuk, hogy a legfontosabb tulajdonságokat csokorba gyűjtjük és bizonyítás nélkül elfogadjuk. Ezek a tulajdonságok az **axiómák**. A bennük előforduló fogalmakat nem definiáljuk, ezek az **alapfogalmak**.

- ***Összeadás kommutativitása:*** $\forall(x, y \in R): x+y=y+x$.
- ***Összeadás asszociativitása:*** $\forall(x, y, z \in R): (x+y)+z=x+(y+z)$.
- ***Összeadási egységelem (additív egységelem, zérus-elem) létezése:***
$$(\exists 0 \in R),(\forall x \in R): x+0=x.$$
- ***Összeadási inverz-elem (additív inverz-elem) létezése:*** $(\forall x \in R),(\exists(-x) \in R): x+(-x)=0$
- ***Szorzás kommutativitása:*** $\forall(x, y \in R): x \cdot y=y \cdot x$.
- ***Szorzás asszociativitása:*** $\forall(x, y, z \in R): (x \cdot y) \cdot z=x \cdot(y \cdot z)$.
- ***Szorzási egységelem (multiplikatív egységelem) létezése:*** $(\exists 1(\neq 0) \in R),(\forall x \in R): x \cdot 1=x$.
- ***Szorzási inverzelem (multiplikatív inverz-elem) létezése:***
$$(\forall x(\neq 0) \in R),\left(\exists\left(\frac{1}{x}\right) \in R\right): x \cdot \frac{1}{x}=1.$$
- ***Szorzás disztributivitása az összeadásra nézve:*** $\forall(x, y, z \in R): (x+y) \cdot z=x \cdot z+y \cdot z$.
- ***Rendezés diszjunktivitása:*** $\forall(x, y \in R): (x \leq y) \vee(y \leq x)$.
- ***Rendezés antiszimmetriája:*** $\forall(x, y \in R): ((x \leq y) \wedge(y \leq x)) \Rightarrow(x=y)$.
- ***Rendezés tranzitivitása:*** $\forall(x, y, z \in R): ((x \leq y) \wedge(y \leq z)) \Rightarrow(x \leq z)$.
- ***Összeadás monotonitása:*** $\forall(x, y, z) \in R: (x \leq y) \Rightarrow(x+z \leq y+z)$.
- ***Szorzás monotonitása:*** $\forall(x, y,(0 \leq) z) \in R: (x \leq y) \Rightarrow(x \cdot z \leq y \cdot z)$.
- ***Elválasztó elem létezése:*** $(\forall(A(\neq\{\ \}), B(\neq\{\ \}) \subset R)): (\forall((x \in A) \wedge(y \in B)) \Rightarrow(x \leq y)) \Rightarrow$
$\Rightarrow((\exists z \in R): (\forall((x \in A) \wedge(y \in B)) \Rightarrow((x \leq z) \wedge(z \leq y))))$.

Ezek után minden fogalmat definiálnunk, minden állítást (tételt) bizonyítanunk kell.
Példa *definícióra*: Az $x \in R$ **pozitív, más szóval nagyobb, mint 0** (jelben $\boldsymbol{x}>0$), ha
$$(0 \leq x) \wedge(x \neq 0).$$
Példa *tételre*: $\forall(x, y(>0) \in R) \Rightarrow x<x+y$.

■

Úgy vélem, hogy a valós számok axiómái részét képezik, nemcsak a közép- és általános iskolai tanárképzés, hanem a tanítóképzés általános matematikai moduljának is. (Lásd [2], 12–13. oldalak.)
A valós számok axiómarendszerét posztulátumokkal és követelményekkel egészítjük ki. Az így kapott „együttest” nem nevezzük axiómarendszernek, ennek kialakítása az „utókor” feladata. Gondoljunk arra, hogy már a 17. században (Scipio del Ferro, Antonio Mario Fiore, Tartaglia, Cardano, Ferrari idejében, lásd [1], 78–79.) használták a komplex (képzetes) számokat, de a komplex számok axiómarendszere (Hamilton és Bolyai János), geometriai modellezése Gauss munkássága nyomán véglegesedett a 19. században. (Lásd [1], 178-179.oldal.)

P.1.

Kiterjesztési posztulátum

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza valódi része a robbantott számok $\breve{\mathbb{R}}$ halmazának (az $\mathbb{R}$ halmazban az egyenlőség jele: =, az $\breve{\mathbb{R}}$ halmazban pedig: $\breve{=}$). Minden x valós számnak van egy $\breve{x}$, és csak egy robbantottja, és minden u robbantott számnak van egy, és csak egy $\underline{u}$ zsugorítottja, amely valós szám, úgy, hogy

$$\underline{(\breve{x})} = x\ ,\ (x \in \mathbb{R})\ \text{ és }\ \widetilde{(\underline{u})} \cong u\ ,\ (u \in \breve{\mathbb{R}}).$$

P.2.

Egyértelműségi posztulátum

A robbantott számok halmazában értelmezett egyenlőségre érvényes, hogy

$$\breve{x} \cong \breve{y}\ \ akkor, \text{és}\ csakis\ akkor, ha\ x = y, \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

P.3.

Rendezési posztulátum

A robbantott számok halmazában értelmezett „kisebb” relációra (jele$\breve{<}$) érvényes, hogy

$$\breve{x} \breve{<} \breve{y}\ \ akkor, \text{és}\ csakis\ akkor, ha\ x < y, \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

P.4.

A szuper-összeadás posztulátuma

A robbantott számok halmazában értelmezett szuper-összeadásra érvényes, hogy

$$\breve{x} \overline{\oplus} \breve{y} = \widetilde{x + y}, \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

P.5.

A szuper-szorzás posztulátuma

A robbantott számok halmazában értelmezett szuper-szorzásra érvényes, hogy

$$\breve{x} \overline{\odot} \breve{y} = \widetilde{x \cdot y}, \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

R.1.

A robbantott számok halmazában érvényes „egyenlőség”-re vonatkozó követelmény

Ha x és y valós számok, $x \cong y$ akkor, és csakis akkor, ha $x = y$.
(E követelmény miatt az „$\cong$” helyett a robbantott számok halmazában is használhatjuk a „=” jelet.)

R.2.

A robbantott számok halmazában érvényes „kisebb”-re vonatkozó követelmény

Ha x és y valós számok, $x \breve{<} y$ akkor, és csakis akkor, ha $x < y$.
(E követelmény miatt az „$\breve{<}$” helyett a robbantott számok halmazában is használhatjuk a „<” jelet.)

R.3.

A 0 robbantására vonatkozó követelmény

$$\breve{0} = 0.$$

(E követelmény alapján mondhatjuk, hogy $u \in \breve{\mathbb{R}}$ pozitív, ha $0 < u$ és negatív, ha $u < 0$.)

R. 4.

A robbantásra vonatkozó követelmény

a/ Az $\breve{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ halmaznak van pozitív eleme és van negatív eleme is.

b/ Ha $-\infty < x < 0$, akkor $\breve{x} < x$ és ha $0 < x < \infty$, akkor $x < \breve{x}$.

R.5.

A szuper-összeadás monotonitására vonatkozó követelmény

Bármely u , v , w robbantott számok esetén, ha $u < v$, akkor $u \overline{\oplus} w < v \overline{\oplus} w$.

R.6.

A szuper-szorzás monotonitására vonatkozó követelmény

Bármely u , v , w robbantott számok esetén, ha $u < v$ és w pozitív, akkor $u \overline{\odot} w < v \overline{\odot} w$.

A posztulátumok és követelmények néhány elemi következménye rendre használhatjuk az = és a < jeleket. A „pozitív robbantott szám” és a „negatív robbantott szám” fogalmak értelmezettek. (Ez azt is jelenti, hogy a „pozitivitás” és „negativitás” szokásos tulajdonságai öröklődnek a robbantott számok halmazára is.)

K.1. *A robbantott számok halmazában érvényes trichotomia.*

$$\text{Ha } x, y \in \check{\mathbb{R}}\text{, akkor } \begin{cases} vagy\ \check{x} < \check{y} \\ vagy\ \check{x} = \check{y}. \\ vagy\ \check{y} < \check{x} \end{cases}$$

Bizonyítás. A valós számokra ismert, hogy érvényes a trichotomia, azaz

$$\text{ha } x, y \in \mathbb{R}\text{, akkor } \begin{cases} vagy\ x < y \\ vagy\ x = y. \\ vagy\ y < x \end{cases}$$

Az állításunkban szereplő „kapocs” felső és alsó részeit a Rendezési posztulátum, középső részét az Egyértelműségi posztulátum alapján jelenthetjük ki. ■

K.2. *A „nagyobb” fogalma bevezethető a robbantott számokra.*

A robbantott számok halmazában érvényes trichotomia miatt mondhatjuk, hogy ha $\check{x} < \check{y}$ és $\check{x} = \check{y}$ egyike sem igaz, akkor $\check{x}$ nagyobb, mint $\check{y}$. Jelben: $\check{x} > \check{y}$. ■

K.3. *A* 0 *zsugorítására vonatkozó következmény*

$$\underline{0} = 0.$$

Bizonyítás.

A Kiterjesztési posztulátum szerint $\check{(\underline{0})} = 0$. A 0 robbantására vonatkozó követelmény szerint (hivatkozással az egyenlőség reflexivitására) $0 = \check{0}$. Innen (hivatkozva az egyenlőség tranzitivitására) $\check{(\underline{0})} = \check{0}$. Végül az Egyértelműségi posztulátum mondja ki, hogy $\underline{0} = 0$. ■

K.4. *A valós számok zsugorítottjainak halmaza és a valós számok halmazára vonatkozó komplementere nem üres halmazok.*

Bizonyítás. Jelölje valós számok zsugorítottjainak halmazát $\underline{\mathbb{R}}$, azaz legyen

$$\underline{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} | \check{x} \in \mathbb{R}\}.$$

(A valós számok zsugorítottjainak halmaza elnevezést a $\underline{(\check{x})} = x$, $(x \in \mathbb{R})$ inverziós azonosság indokolja. Lásd P. 1.) A K.1 következmény miatt $0 \in \underline{\mathbb{R}}$, így $\underline{\mathbb{R}} \neq \{\ \}$ $(üres\ halmaz)$. Az $\mathbb{R}$ halmazra való komplementer:

$$\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} | \check{x} \notin \mathbb{R}\}.$$

A P. 1. posztulátumban szereplő „A valós számok halmaza valódi része a robbantott számok $\check{\mathbb{R}}$ halmazának” mondat miatt van olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, hogy $\check{x_0} \notin \mathbb{R}$. Emiatt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}$, tehát $\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}} \neq \{\ \}$. ■

K.5.

A robbantásra vonatkozó R. 4. Követelmény miatt az $\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}$ halmaznak van negatív és pozitív eleme is. Emiatt, az

$$\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^- = \{x < 0 \in \mathbb{R} | \check{x} \notin \mathbb{R}\}$$

és

$$\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^+ = \{0 < x \in \mathbb{R} | \check{x} \notin \mathbb{R}\}$$

halmazok egyike sem üres. ■

A továbbiakban egy bonyolultabb következmény jön.

K.6.

A diszkriminátor tétel

I. Ha $\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^- \neq \{\ \}$, akkor van olyan $\delta(< 0)$ valós szám, amelyre $\check{\delta} \notin \mathbb{R}$ és $\check{\delta}$ minden valós számnál kisebb.

II. Ha $\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^+ \neq \{\ \}$, akkor van olyan $d(> 0)$ valós szám, amelyre $\check{d} \notin \mathbb{R}$ és $\check{d}$ minden valós számnál nagyobb.

Bizonyítás.
Ad I.
A K. 5. szerint tudjuk, hogy $\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-} \neq \{\quad\}$ és azt is, hogy ha $x \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-}$, akkor x negatív valós szám. Legyen x_1 az $\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-}$ bármelyik eleme és legyen x_2 az $\underline{\mathbb{R}}$ tetszőleges negatív eleme. Ekkor $x_1 < x_2$. (Feltételezve az ellenkezőjét, azaz $x_1 \geq x_2$, a P. 2. és P. 3. posztulátumokból adódik, hogy $\widecheck{x_2} \leq \widecheck{x_1} < 0$. Mivel $\widecheck{x_2}$ valós szám, így $\widecheck{x_1} \in \mathbb{R}$. Másrészt $x_1 \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-}$ miatt tudjuk, hogy $\widecheck{x_1} \notin \mathbb{R}$, amivel ellentmondáshoz jutunk.) A valós számok „Elválasztó elem létezése" axiómája szerint van olyan (negatív) valós szám, hogy bármely $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}$ $és$ $x_2 \in \underline{\mathbb{R}}$ elempár esetén

$$x_1 \leq \delta \leq x_2.$$

Mivel

$$\left(\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-}\right) \cap \underline{\mathbb{R}} = \{\quad\},$$

vagy $\delta \in \underline{\mathbb{R}}$, vagy $\delta \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-}$.
Ha feltételezzük, hogy $\delta \in \underline{\mathbb{R}}$, akkor bármely $x \in \underline{\mathbb{R}}$ esetén fennáll, hogy $\delta \leq x$. Így a nullánál is kisebb, tehát $\delta < 0$. Továbbá a P. 2. és P. 3. posztulátumok szerint $\check{\delta} \leq \check{x}$. Mivel most $\check{\delta} \in \mathbb{R}$, oda jutottunk, hogy a $\check{\delta}$ valós szám alulról korlátozza a valós számok halmazát. Ilyen valós szám viszont nincs. (Ha mégis feltesszük, hogy van, akkor $\check{\delta} < 0$ miatt, $\check{\delta} + \check{\delta}$ nem lehet nagyobb, mint $\check{\delta}$, de kisebb sem, hiszen „bármely $x \in \underline{\mathbb{R}}$ esetén fennáll, hogy $\delta \leq x$". Tehát fennáll, hogy $\check{\delta} + \check{\delta} = \check{\delta}$. Ebből az $\frac{1}{\check{d}}$ multiplikatív inverz miatt $1 = 2$, majd a (-1) additív inverz létezése miatt a 0 = 1 ellentmondás jön ki. Lásd a „Szorzási egységelem axiómát. Maradt az, hogy $\delta \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{-}$, ami azt jelenti, hogy $\check{\delta} \notin \mathbb{R}$.
Ad II.
Tudjuk, hogy $\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+} \neq \{\quad\}$ és azt is, hogy ha $x \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}$, akkor x pozitív valós szám. Legyen x_1 az $\underline{\mathbb{R}}$ tetszőleges pozitív eleme és legyen x_2 az $\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}$ bármelyik eleme. Ekkor $x_1 < x_2$. (Feltételezve az ellenkezőjét, azaz $x_1 \geq x_2$, P. 2. és P. 3. posztulátumokból adódik, hogy $0 < \widecheck{x_2} \leq \widecheck{x_1}$. Mivel $\widecheck{x_1}$ valós szám, így $\widecheck{x_2} \in \mathbb{R}$. Másrészt $x_2 \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}$ miatt tudjuk, hogy $\widecheck{x_2} \notin \mathbb{R}$, amivel ellentmondáshoz jutunk.) A valós számok Elválasztó elem létezése axiómája szerint van olyan (pozitív) d valós szám, hogy bármely $x_1 \in \underline{\mathbb{R}}$ $és$ $x_2 \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}$ elempár esetén

$$x_1 \leq d \leq x_2.$$

Mivel

$$\underline{\mathbb{R}} \cap \left(\left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}\right) = \{\quad\},$$

vagy $d \in \underline{\mathbb{R}}$ vagy $d \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}$. Ha feltételezzük, hogy $d \in \underline{\mathbb{R}}$, akkor bármely $x \in \underline{\mathbb{R}}$ esetén fennáll, hogy $x \leq d$. Ekkor, a P. 2. és P. 3. posztulátumok szerint $\check{x} \leq \check{d}$. Mivel most $\check{d} \in \mathbb{R}$, oda jutottunk, hogy a $\check{d}$ valós szám felülről korlátozza a valós számok halmazát. Ilyen valós szám viszont nincs. (Ha feltesszük, hogy mégis van, akkor a $0 < \check{d}$ miatt $\check{d} + \check{d}$ nem lehet kisebb, mint $\check{d}$, de mivel nagyobb sem lehet, mint $\check{d}$, ezért $\check{d} + \check{d} = \check{d}$. Ebből az $\frac{1}{\check{d}}$ multiplikatív inverz miatt $2 = 1$, majd a (-1) additív inverz létezése miatt az 1 = 0 ellentmondás jön ki. Lásd a Szorzási egységelem axiómát.) Maradt az, hogy $d \in \left(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\right)^{+}$, ami azt jelenti, hogy $\check{d} \notin \mathbb{R}$. ■
Úgy vélem, hogy valós számok axiómarendszerének öt posztulátummal és hat követelménnyel történt kiegészítése, illetve néhány következménye illik a tanárképzés speciálkollégiumai közé, sőt belefér még a tanítóképzés matematika műveltségi területébe, a szabadon választható tárgyak közé (lásd [3], 430–431. oldalak).

A negatív diszkriminátor fogalma

A diszkriminátor tétel I. része mutatja, hogy a benne szereplő $\check{\delta}$ az a legnagyobb olyan robbantott szám, ami nem valós szám és minden valós számnál kisebb. Emiatt a $\check{\delta}$ neve: **negatív diszkriminátor.**

A pozitív diszkriminátor fogalma

A diszkriminátor tétel II. része mutatja, hogy a benne szereplő $\check{d}$ az a legkisebb olyan robbantott szám, ami nem valós szám és minden valós számnál nagyobb. Emiatt a $\check{d}$ neve: **pozitív diszkriminátor.**

Csábító a pozitív diszkriminátor $=\infty$ és a negatív diszkriminátor $=-\infty$ jelöléssel, a mindennapi gyakorlatunkban is megtalálható a „mínusz végtelent", illetve „végtelent" tartalmazó lezárás:

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

úgy, hogy

(a) $$-\infty < x < \infty \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(b) $$-\infty + x = -\infty = x + (-\infty) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) $$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

(d) $$x + \infty = \infty = \infty + x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(e) $$\infty + \infty = \infty \quad .$$

Az összeadásnak ez a kiterjesztése megőrzi a kommutativitást és az asszociativitást. Gondot jelent a

$$(-\infty) + \infty =^{def} ?$$

megválaszolása, ha a kommutativitást mellett az asszociativitást és a 0 zérus-tulajdonságát meg kívánjuk őrizni. Például

(f) $$(-\infty) + \infty =^{def} x_0 = \infty + \ (-\infty) \quad , \quad \text{ahol } x_0 \in \mathbb{R}\ .$$

Kimutatjuk, hogy ekkor szükségképpen $x_0 = 0$. Valóban, a (d) és (f) miatt

$$x_0 + x_0 = \big((-\infty) + \infty\big) + x_0 =^{asszociativitás} (-\infty) + (\infty + x_0) = (-\infty) + \infty = x_0$$

amiből adódik, hogy $x_0 = 0$. Ekkor viszont a (c) , (f) és (b) alapján

$$0 = (-\infty) + \infty = \big((-\infty) + (-\infty)\big) + \infty =^{asszociativitás} (-\infty) + \big((-\infty) + \infty\big) = (-\infty) + 0 = -\infty$$

ellentmondáshoz jutunk.

Ez után maradnának még a $(-\infty) + \infty =^{def} -\infty$ vagy $(-\infty) + \infty =^{def} \infty$ lehetőségek, de ezek mindegyikét az (a)-ból adódó $-\infty < \infty$ miatt „igazságtalannak" véljük.

Így a $(-\infty) + \infty$ határozatlan marad. (Nem véletlen, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ esetén a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) =?$ megválaszolására sincs műveleti szabályunk.)

A robbantott számok diszkriminátorokkal való lezárása helyett az $\breve{\mathbb{R}}$ halmaz

$$\big(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\big)^{-} \cup \mathbb{R} \cup \big(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\big)^{+}$$

felbontását választjuk ahol $\big(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\big)^{-}$ és az $\big(\mathbb{R} \setminus \underline{\mathbb{R}}\big)^{+}$ elemeire a $láthatatatlan\ robbantott\ számok$, tőlük való megkülönböztetésként $\mathbb{R}$ elemeire a $láthatató\ robbantott\ számok$ elnevezéseket használjuk. Természetesen a diszkriminátorok láthatatlan robbantott számok.

1. *A robbantott számok komplex modellje*

A diszkriminátorok fogalmához való eljutás is mutatja, hogy a valós számok axiómáinak posztulátumokkal és követelménnyel történt kiegészítésével sem könnyű a robbantott számok elméletének logikai úton történő kialakítása. Szükségünk van modellre, amelyben a robbantott számok alapfogalmai definiálhatók, a posztulátumok és követelmények bizonyíthatók, továbbá megjeleníthetők a láthatatlan robbantott számok is. Számos robbantási lehetőség közül (lásd [4] 95. oldal) választhatunk.

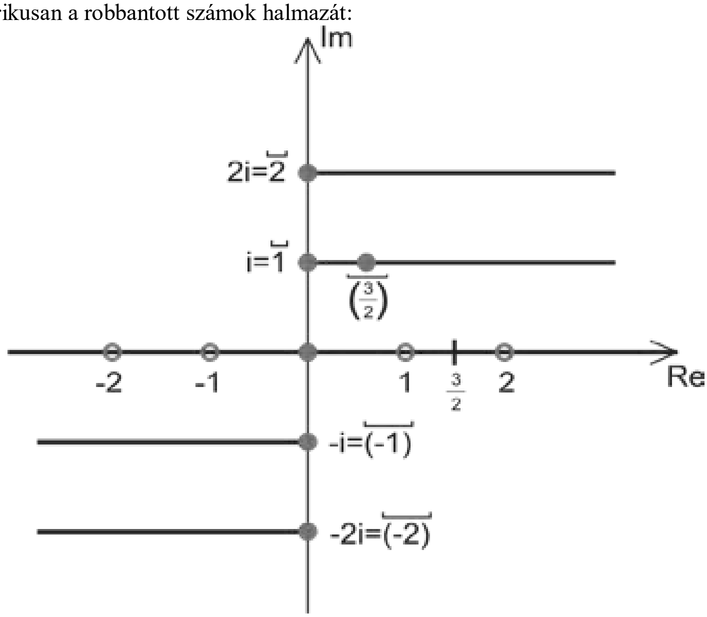
Ha a (valós) számegyenesre, mint az $\mathbb{R}$ halmaz geometriai modelljére gondolunk, akkor a valós számokat, mint robbantott számokat, látható robbantott számoknak neveztük. A (valós) számegyenesre, mint az egydimenziós tér modelljére gondolva azt mondhatjuk, hogy a P. 2. posztulátum miatt az $\breve{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ halmaz elemeit modellező pontok már nem férnek rá a számegyenesre, azaz az egydimenziós téren kívül vannak. Emiatt az az $\breve{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ halmaz elemeit láthatatlan robbantott számoknak neveztük. Ha az $\breve{\mathbb{R}}$ halmaz geometriai modelljét **robbantott számegyenes**nek nevezzük, akkor a valós számok halmaza a $\check{\delta}$ és $\check{d}$ diszkriminátorok által határolt nyitott intervallum.
Egy kényelmes lehetőség az „abszolút érték", „egész rész", „tört rész" és az area tangens hiperbolicus

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{, ahol} -1 < x < 1$$

felhasználásával adódó

(1.1) $\breve{x} =^{def} (sgn\, x)(\tanh^{-1}\{|x|\} + i[|x|])$, $x \in \mathbb{R}$, $sgn\, x = \begin{cases} 1, & ha\; x > 0 \\ 0, & ha\; x = 0 \\ -1, & ha\; x < 0 \end{cases}$

„szimmetrikus robbantási képlet", amellyel kapjuk a Gauss-számsíkon az origóra szimmetrikusan a robbantott számok halmazát:



1.2 ábra

A robbantott számok az $Im\, z \in \mathbb{Z}$ (az egész számok halmaza) és $Re\, z \cdot Im\, z \geq 0$ feltételeket kielégítő komplex számok (rendezett valós számpárok), amelyek az 1.2 ábra által mutatott „zászlón" helyezkednek el, teljesen kitöltve azt. (Lásd [4], 3.146. és 3.152. tételek.) A $]-1,1[$ nyitott intervallumon lévő számok robbantottjai kitöltik a valós számegyenest, ami mutatja a P. 1. posztulátum teljesülését. A P. 2. posztulátum teljesülését a [4]-ben lévő 3.148. tétel mutatja.
Ha u robbantott szám, akkor az

(1.2) $\underline{u} = Im\, u + \tanh Re\, u$, ahol $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$

„zsugorítási képlet” adja az u zsugorítottját. A valós számok zsugorítottjai a $]-1{,}1[$ nyitott intervallumot töltik ki.
A robbantott számok rendezésére szolgál az 1.3 *definíció* („felfelé vagy jobbra”). Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$. Ha $Im\,\check{x} < Im\,\check{y}$, vagy ha $Im\,\check{x} = Im\,\check{y}$ és $Re\,\check{x} < Re\,\check{y}$, akkor $\check{x} \underset{\smile}{<} \check{y}$.■
A P. 3. posztulátum teljesülését a [4]-ben lévő 3.164. tétel mutatja. A P. 4. és P. 5. posztulátumok az
(1.4) $\check{x}\overline{\oplus}\check{y} = \big(sign(x+y)\big)(\tan^{-1}\{|x+y|\} + i[|x+y|])\quad , x, y \in \mathbb{R}$
szuper-összeadással és
(1.5) $\check{x}\overline{\odot}\check{y} = \big(sign(x\cdot y)\big)(\tan^{-1}\{|x\cdot y|\} + i[|x\cdot y|])\quad , x, y \in \mathbb{R}$,
szuper-szorzással teljesülnek.
Additív egységelem a 0. multiplikatív egységelem $\check{1} = i$. ($\check{x}\overline{\oplus}0 = \check{x}$; $\check{x}\overline{\odot}i = \check{x}$, így $i\overline{\odot}i = i$.)
Az $\check{x}$ additív inverze $\widecheck{-x} = -(sgn\,x)(\tanh^{-1}\{|x|\} + i[|x|])$.
Az $\check{x} \neq 0$ multiplikatív inverze $\widecheck{\left(\frac{1}{x}\right)} = (sgn\,x)\left(\tanh^{-1}\left\{\left|\frac{1}{x}\right|\right\} + i\left[\left|\frac{1}{x}\right|\right]\right)$.
Ha x valós szám, akkor rá, mint robbantott számra érvényes, hogy $-i < x < i$.
A negatív diszkriminátor $\widecheck{(-1)} = -i$, a pozitív diszkriminátor $\check{1} = i$.
A látható robbantott számok a valós tengelyen vannak, a láthatatlanok a zászló többi részén.
Az R. 1. követelmény teljesülése a „Ha u valós szám, akkor
(1.6) $\underline{u} = \tanh u$ (lásd 1.2)”.
és a „Ha $-1 < x < 1$, akkor
(1.7) $\check{x} = \tanh^{-1} x$ (lásd 1.1)”
speciális esetekből adódik. Ugyanez mondható el az R. 2. követelményről. Az R. 3. követelmény az (1.7) szerint nyilvánvaló. Az R. 4. követelmény teljesülését az 1.2 ábra mutatja. Az R. 5. és R. 6. Követelményeket a P. 1. posztulátumban látott inverziós azonossággal, a P. 3. rendezési posztulátummal, az R. 2. („$\underset{\smile}{<}$” helyett is „$<$” használata) és R. 3. követelményekkel, végül a P. 4., illetve P. 5. posztulátumokkal (ezek már teljesültek) igazoljuk:
1.8. *tétel* (A szuper-összeadás monotonitása.). Legyenek *u, v, w* tetszőleges robbantott számok. Ha $u < v$, akkor $u\overline{\oplus}w < v\overline{\oplus}w$.
Bizonyítás. Legyen $u = \check{x}$, $v = \check{y}$ és $w = \check{z}$, ahol x, y és z valós számok. A P. 1. posztulátumban látott $\underline{(\check{x})} = x$, $(x \in \mathbb{R})$ inverziós azonosságot használva írhatjuk, hogy $\underline{u} = x$, $\underline{v} = y$ és $\underline{w} = z$. Ha $u < v$, akkor $\underline{u} <^{P.3} \underline{v}$. A valós számok összeadásának monotonitása miatt $\underline{u} + \underline{w} < \underline{v} + \underline{w}$. Mindkét oldalt robbantva $\widecheck{\underline{u}+\underline{w}} <^{P.3} \widecheck{\underline{v}+\underline{w}}$. Az $\widecheck{\underline{u}+\underline{w}} =^{P.4} \big(\check{\underline{u}}\big)\overline{\oplus}\big(\check{\underline{w}}\big)$ és $\widecheck{\underline{v}+\underline{w}} =^{P.4} \big(\check{\underline{v}}\big)\overline{\oplus}\big(\check{\underline{w}}\big)$ beírása után a P. 1. posztulátumban látott $\big(\check{\underline{u}}\big) \overset{\vee}{=} u$, $\big(u \in \check{\mathbb{R}}\big)$ inverziós azonosságot használva $u\overline{\oplus}w < v\overline{\oplus}w$ adódik.■
1.9. *Tétel* (A szuper-szorzás monotonitása). Legyenek *u, v, w* tetszőleges robbantott számok. Ha $u < v$ és $w > 0$, akkor $u\overline{\odot}w < v\overline{\odot}w$.
Bizonyítás. Legyen $u = \check{x}$, $v = \check{y}$ és $w = \check{z}$, ahol x, y és z valós számok. A P. 1. posztulátumban látott $\underline{(\check{x})} = x$, $(x \in \mathbb{R})$ inverziós azonosságot használva írhatjuk, hogy $\underline{u} = x$, $\underline{v} = y$ és $\underline{w} = z$. Ha $u < v$, akkor $\underline{u} <^{P.3} \underline{v}$. Továbbá $0 <^{P.3} \underline{w}$. A valós számok szorzása monotonitása miatt $\underline{u}\cdot\underline{w} < \underline{v}\cdot\underline{w}$. Mindkét oldalt robbantva $\widecheck{\underline{u}\cdot\underline{w}} <^{P.3} \widecheck{\underline{v}\cdot\underline{w}}$. Az $\widecheck{\underline{u}\cdot\underline{w}} =^{P.5} \big(\check{\underline{u}}\big)\overline{\odot}\big(\check{\underline{w}}\big)$ és $\widecheck{\underline{v}\cdot\underline{w}} =^{P.5} \big(\check{\underline{v}}\big)\overline{\odot}\big(\check{\underline{w}}\big)$ beírása után a P. 1. posztulátumban látott $\big(\check{\underline{u}}\big) \overset{\vee}{=} u$, $\big(u \in \check{\mathbb{R}}\big)$ inverziós azonosságot használva $u\overline{\odot}w < v\overline{\odot}w$ adódik.■

A diszkriminátor tétel korolláriuma

Ha a diszkriminátorok egymás szuperadditív inverzei, akkor minden olyan x valós szám esetén, amelyre $\breve{x} \notin \mathbb{R}$, fennáll, hogy $\widetilde{(-x)} \notin \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $x \neq 0$. A diszkriminátor tétel szerint létezik a $\breve{\delta}$ negatív diszkriminátor és a $\breve{d}$ pozitív diszkriminátor. Ha ezek egymás szuperadditív inverzei, akkor $\breve{\delta}\overline{\oplus}\breve{d} = 0$. A P. 4. posztulátum azt mondja, hogy $\delta + d = 0$, azaz, $d = -\delta, illetve\ -d = \delta$. Most két esetet különböztetünk meg.

Legyen először $x < 0$. A $\delta < x(< 0)$ nem lehetséges, mert ekkor a P. 3. posztulátum szerint $\breve{\delta} < \breve{x}$ lenne, ami a negatív diszkriminátor definíciója miatt ellentmond annak, hogy $\breve{x} \notin \mathbb{R}$. Ha $x = \delta$, akkor $(-x) = d$, így $\widetilde{(-x)} = \breve{d} \notin \mathbb{R}$. Ha $x < \delta$, akkor $d < (-x)$. A P. 3. posztulátum szerint $\breve{d} < \widetilde{(-x)}$, amiből a pozitív diszkriminátor definíciója szerint kapjuk, hogy $\widetilde{(-x)} \notin \mathbb{R}$.

Másodszor, legyen $0 < x$. A $(0 <)x < d$ nem lehetséges, mert ekkor a P. 3. posztulátum szerint $\breve{x} < \breve{d}$ lenne, ami a pozitív diszkriminátor definíciója miatt ellentmond annak, hogy $\breve{x} \notin \mathbb{R}$. Ha $x = d$, akkor $(-x) = \delta$, így $\widetilde{(-x)} = \breve{d} \notin \mathbb{R}$. Ha $d < x$, akkor $(-x) < \delta$. A P. 3. posztulátum szerint $\widetilde{(-x)} < \breve{\delta}$, amiből a negatív diszkriminátor definíciója szerint kapjuk, hogy $\widetilde{(-x)} \notin \mathbb{R}$.
■

Az (1.1) szimmetrikus robbantási képlettel való robbantás esetén $\delta = -i$ és $d = i$ (lásd 1.2 ábra). Az (1.4)-ből adódik, hogy

$$i\overline{\oplus}(-i) = \breve{1}\overline{\oplus}\widetilde{(-1)} = \big(sign(1-1)\big)(\tan^{-1}\{|1-1|\} + i[|1-1|]) = 0.$$

Az 1.2 ábrán láthatjuk, hogy minden olyan x valós szám esetén, amelyre $\breve{x} \notin \mathbb{R}$, fennáll, hogy $\widetilde{(-x)} \notin \mathbb{R}$.

Megjegyzések

1. Ha a számegyenest a valós számhalmaz modelljének, a Gauss-számsíkot a komplex számhalmaz modelljének tekintjük, akkor a robbantott számok halmazának (egyik lehetséges) úgynevezett aszimmetrikus komplex modelljét adja a következő „aszimmetrikus robbantási képlet”:

$$\tilde{x} =^{def} \begin{cases} -\tanh^{-1}\{|x|\} - i\cdot[|x|] & ,ha\ -\infty < x < 0 \\ 0 & ,ha\ x = 0 \\ 2\tanh^{-1}\left\{\left|\frac{x}{2}\right|\right\} + i\cdot 2\cdot\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right] & ,ha\ 0 < x < \infty \end{cases}$$

A robbantott számok halmaza a komplex számok részhalmaza. Az „egyenlőség”-et úgy értelmezzük, hogy az u és v robbantott számok akkor és csakis akkor egyenlők egymással, ha komplex számokként egyenlők. A „kisebb” értelmezése

$$u < v\ ,ha \begin{cases} & Im\,u < Im\,v \\ vagy & \\ & Im\,u = Im\,v \text{ és } Re\,u < Re\,v \end{cases}.$$

Ekkor a negatív diszriminátor $\delta = \widetilde{(-1)} = -i$, a pozitív diszkriminátor $d = \tilde{2} = 2i$. A P. 4. posztulátom megkívánja, hogy az additív egységelem a $\tilde{0} = 0$ legyen. Ugyanakkor a

$$(2i)\overline{\oplus}(-i) = \tilde{2}\overline{\oplus}\widetilde{(-1)} =^{P.4} \tilde{1} = 2\tanh^{-1}\frac{1}{2} \neq 0,$$

azaz, a diszkriminátorok nem egymás szuperadditív inverzei. Az aszimetrikus komplex modellnél nem teljesül a diszkriminátor tétel korolláriumának feltétele. Nem meglepő, hogy az $x = -1$ valós szám esetén $\breve{x} \notin \mathbb{R}$, de a $(-x) = 1$ esetén $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. ■

2. A következő „semi-robbantások” arra mutatnak rá, hogy a diszkriminátor tétel fennállásához az R. 4. követelmény a/ részének teljesülése szükséges. Például az

$$\acute{x} =^{def} \begin{cases} -\tanh^{-1}\{|x|\} - i\cdot[|x|], ha\ -\infty < x < 0 \\ 0 \qquad ,ha\ x = 0 \\ x \qquad , \qquad ha\ 0 < x < \infty \end{cases}$$

„bal-oldali robbantási képlet” esetén a negatív diszkriminátor $(\acute{-1}) = -i$, pozitív diszkriminátor pedig nincs.

Az

$$\grave{x} =^{def} \begin{cases} x \quad , & ha -\infty < x < 0 \\ 0 & , ha\ x = 0 \\ \tanh^{-1}\{x\} + i \cdot [x] \quad , & ha\ 0 < x < \infty \end{cases}$$

„jobb-oldali robbantási képlet' esetén nincs negatív diszkriminátor, pozitív diszkriminátor pedig $\grave{1} = i$.

A robbantási tétel

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor
a/
(a1) $0 < x$
esetben
(a2) $x < \check{x}$,
b/
(b1) $x < 0$
esetben
(b2) $\check{x} < x$
teljesül.

Bizonyítás.

Ad a/.

Az (a1) feltételből a P. 3. miatt adódik $\check{0} < \check{x}$, ahonnan az R. 3. alapján kapjuk, hogy $0 < \check{x}$. A diszkriminátor tétel kimondja a $\check{d}$ pozitív diszkriminátor létezését. Ekkor vagy $0 < \check{x} < \check{d}$, vagy $\check{d} \leq \check{x}$. Az első esetben $\check{x}$ pozitív valós szám, és felülről valós számmal nincs korlátozva, azaz $0 < \check{x} < \infty$. Így az R. 4. követelmény b/ esete szerint (a2) teljesül. A második esetben, a pozitív diszkriminátor definíciója szerint, $\check{x}$ minden valós számnál nagyobb. Mivel x valós szám, teljesül az (a2).

Ad b/

A (b1) feltételből a P. 3. miatt adódik $\check{x} < \check{0}$, ahonnan az R. 3. alapján kapjuk, hogy $\check{x} < 0$. A diszkriminátor tétel kimondja a $\check{\delta}$ negatív diszkriminátor létezését. Ekkor vagy $\check{x} \leq \check{\delta}$, vagy $\check{\delta} < \check{x} < 0$. Az első esetben, a negatív diszkriminátor definíciója szerint, $\check{x}$ minden valós számnál kisebb. Mivel x valós szám, teljesül a (b2). A második esetben $\check{x}$ negatív valós szám és alulról valós számmal nincs korlátozva, azaz $-\infty < \check{x} < 0$. Így az R. 4. követelmény b/ esete szerint (b2) teljesül. ■

Megjegyzés

A robbantási tétel bizonyításában az „eléggé súlyos", robbantásra vonatkozó követelmény (R. 4.) b/ része lényeges szerepet kapott. Felmerül, hogy elengedhető-e. A tagadó választ – még a módosított szimmetrikus robbantás esetében is – az

$$\hat{x} =^{def} (sgn\, x)\left(\frac{1}{2} \cdot \tanh^{-1}\{|x|\} + i[|x|]\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

„kevert robbantási képlet" szerinti robbantás adja. E robbantás esetében a pozitív diszkriminátor $\hat{1} = i$, a negatív diszkriminátor $\widehat{(-1)} = -i$. Vegyük észre, hogy

$$\widehat{\left(\tfrac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{2} \cdot \tanh^{-1}\tfrac{1}{2} \text{ esetében, bár } 0 < \widehat{\left(\tfrac{1}{2}\right)} < \infty, \text{ mégis } \widehat{\left(\tfrac{1}{2}\right)} < \tfrac{1}{2}$$

és

$$\widehat{\left(-\tfrac{1}{2}\right)} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tanh^{-1}\tfrac{1}{2} \text{ esetében, bár } -\infty < \widehat{\left(-\tfrac{1}{2}\right)} < 0, \text{ mégis } \widehat{\left(-\tfrac{1}{2}\right)} > -\tfrac{1}{2},$$

tehát az R. 4. követelmény b/ részének egyike sem teljesül.

Megállapítjuk, hogy ha a robbantott és zsugorított számok elméletében ragaszkodunk ahhoz, hogy

- a valós számok zsugorítottjainak halmaza a valós számegyenes korlátos (nyitott) intervalluma legyen (ami azt jelenti, hogy érvényes a Diszkriminátor tétel),
- a 0 kivételével minden valós szám robbantottjának abszolút értéke nagyobb legyen a szám abszolút értékénél (ami a Robbantási tétel érvényességét jelenti),

akkor ***a Robbantásra vonatkozó R. 4. követelmény mindkét részének helye van a „Együttes”-ben.***

A zsugorítási tétel

Ha $u \in \breve{\mathbb{R}}$, akkor
a/
(a1) $0 < u$
esetben
(a2) $0 < \underline{u} < u$,
b/
(b1) $u < 0$
esetben
(b2) $u < \underline{u} < 0$
teljesül.
Bizonyítás.
Ad a/
Az (a1) feltétel a P. 1. posztulátum szerint átírva $\overset{\smile}{(\underline{0})} < \overset{\smile}{(\underline{u})}$. Innen a P. 3. szerint $\underline{0} < \underline{u}$ adódik, amiből a „0 zsugorítására vonatkozó következmény” miatt adódik az (a2) bal oldala. A jobb oldal belátásához legyen $u = \breve{x}$ $(x \in \mathbb{R})$. A P. 1. miatt azt is írhatjuk, hogy $\overset{\smile}{(\underline{u})} = \breve{x}$. A P. 2. garantálja, hogy $\underline{u} = x$. Figyelembe véve, hogy az (a2) bal oldalát már igazoltuk, a Robbantási tétel a/ része szerint $x < \breve{x}$, ami éppen az (a2) jobb oldalának teljesülését jelenti.
Ad b/
A (b1) feltétel a P. 1. posztulátum szerint átírva $\overset{\smile}{(\underline{u})} < \overset{\smile}{(\underline{0})}$. Innen a P. 3. szerint $\underline{u} < \underline{0}$ adódik, amiből a „0 zsugorítására vonatkozó következmény” miatt adódik az (b2) jobb oldala.
A bal oldal belátásához legyen $u = \breve{x}$ $(x \in \mathbb{R})$. A P. 1. miatt azt is írhatjuk, hogy $\overset{\smile}{(\underline{u})} = \breve{x}$. A P. 2. garantálja, hogy $\underline{u} = x$. Figyelembe véve, hogy a (b2) jobb oldalát már igazoltuk, a Robbantási tétel a/ része szerint $\breve{x} < x$, ami éppen a (b2) bal oldalának teljesülését jelenti. ■

2. *A robbantott számok néhány alkalmazása*

A „tiszta matematika” számára a robbantott számok „in statu nascendi” állapotban is érdekesek, hiszen egy új számfogalom keletkezésével mindig fellép „természetes” társadalmi ellenállás, ami leginkább az új szám elnevezésében mutatkozik meg.

- A „nulla” a semmit fejezi ki, azaz nem hordoz tartalmat. „A nulla se nem oszt, se nem szoroz” mondás első része igaz, de a második része hamis.
- A negatív számokat sokáig „hamis” számoknak nevezték.
- Az irracionális (ésszerűtlen) számok valóságos matematikatörténeti forradalmat okoztak.
- A komplex számokat „imaginárius” (képzelt) számokként fogadták.
- A „robbantott szám” (exploded number) sem bizalomgerjesztő.

A továbbiakban a robbantott számokat nem absztrakt értelemben, hanem az (1.1) szimmetrikus robbantási és az (1.2) zsugorítási képletek alapján adott konkrét formában tekintjük, alkalmazva a P. 1. – P. 5. posztulátumokat, R. 1. – R. 6. követelményeket és a K. 1. – K. 6. következményeket, továbbá a robbantási és zsugorítási tételeket.

Fel kell vetnünk a kérdést: Mire jók a robbantott számok? Erre négy példával próbálunk válaszolni.

A multiverzum feltérképezése

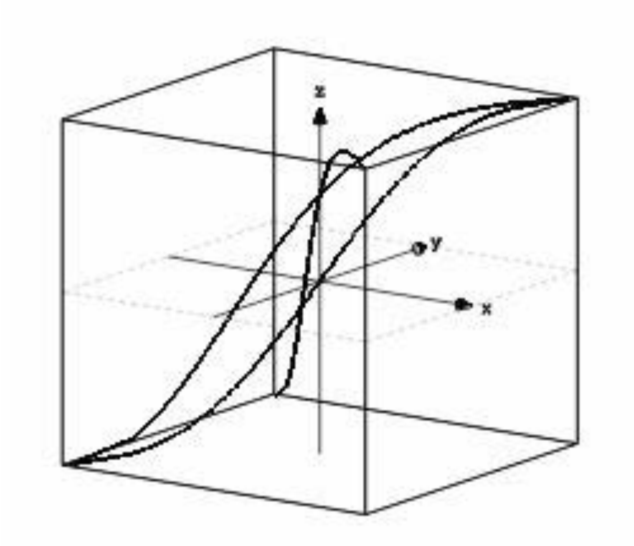
Kiindulunk az $O = (0{,}0{,}0)$ origójú, derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszerrel ellátott háromdimenziós tér $P = (x, y, z)$ rendezett valós számhármas pontjaiból, azaz

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ P = (x, y, z) \middle| \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases} \right\}.$$

Jelölje $\underline{P} = \left(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\right)$ a P pont zsugorítottját. Ekkor az $\mathbb{R}^3$ pontjainak zsugorítottjai az

$$\underline{\mathbb{R}^3} = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} -1 < \xi < 1 \\ -1 < \eta < 1 \\ -1 < \zeta < 1 \end{matrix} \right\}$$

nyitott kockát töltik ki. Természetesen az $\mathbb{R}^3$ részhalmazai is belezsugorodnak a kockába. Például a következő



2.1 ábra

metsző, párhuzamos és kitérő egyenesek zsugorítottjait is mutatja.

Jelölje $\breve{P} = (\breve{x}\,, \breve{y}\,, \breve{z})$ a $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pont robbantottját. A P pont robbantottja akkor, és csakis akkor lesz az $\mathbb{R}^3$ térben, ha a P pont a 2.1 ábrán látható $\underline{\mathbb{R}^3}$ halmazba esik. Különben „kirobban" az

$$\overset{\frown}{\mathbb{R}^3} = \left\{ \breve{P} = (\breve{x}, \breve{y}, \breve{z}) \middle| P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

„Multiverzum"-ba és láthatatlan lesz az $\mathbb{R}^3$ térben.

(2.2) *Gyakorlat*. Jelenítsük meg vizuálisan az $\overset{\frown}{\mathbb{R}^3}$ alábbi részhalmazát!

(2.3) $$\mathfrak{M} = \left\{ \mathcal{P} = (u, v, w) \in \overset{\frown}{\mathbb{R}^3} \middle| u \overline{\odot} u \overline{\oplus} v \overline{\odot} v \overline{\oplus} w \overline{\odot} w = \breve{1} \right\}.$$

Használva a

(2.4) $$\begin{cases} u = \breve{x}\,, v = \breve{y}\,, w = \breve{z} \\ \underline{u} = x\,, \underline{v} = y\,, \underline{w} = z \end{cases} \quad , x, y, z \in \mathbb{R}\,; u, v, w \in \breve{\mathbb{R}}$$

jelöléseket, a P. 1. posztulátumban lévő inverziós képletek és a P. 5., P. 4. és P. 2. alapján az

$$u\overline{\odot}u\overline{\oplus}v\overline{\odot}v\overline{\oplus}w\overline{\odot}w = \check{1}$$

egyenlet ekvivalens a

(2.5) $$\left(\underline{u}\right)^2 + \left(\underline{v}\right)^2 + \left(\underline{w}\right)^2 = 1$$

egyenlettel.

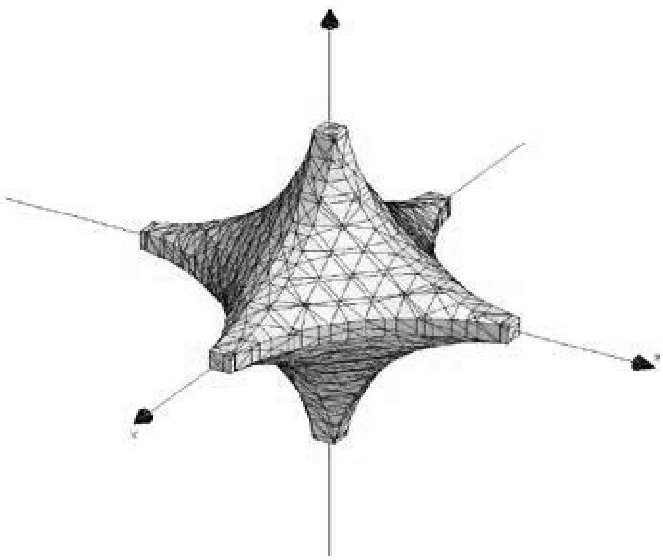
Ha a $\mathcal{P} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, azaz u, v és w valós számok, akkor

$$Im\, u = Im\, v = Im\, w = 0 \; további \; Re\, u = u, Re\, v = v \text{ és } Re\, w = w$$

miatt a (2.5) egyenlet az (1.2) alapján redukálódik:

$$(\tanh u)^2 + (\tanh v)^2 + (\tanh w)^2 = 1,$$

amit a számítógép „hatszorosan sziámi iker Eiffel-torony”-ként érzékeltet:



2.6. ábra

A számítógép képtelen érzékelni az $\mathbb{R}^3$ (számunkra is láthatatlan) határán lévő

$$\mathcal{P} = \left(\check{1}, 0,0\right),\ \mathcal{P} = \left(\widetilde{-1}, 0,0\right),\ \mathcal{P} = \left(0, \check{1}, 0\right),\ \mathcal{P} = \left(0, \widetilde{-1}, 0\right),\ \mathcal{P} = \left(0,0, \check{1}\right),\ \mathcal{P} = \left(0,0, \widetilde{-1}\right)$$

pontokat, amelyek kielégítik a (2.5) egyenletet, azaz elemei az $\mathfrak{M}$ halmaznak. ■

Az $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ multiverzum ellátható $O = (0,0,0)$ origójú

$$u - \text{tengely} = \left\{\mathcal{P} = (u, v, w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| v = 0, w = 0\right\}$$
$$v - \text{tengely} = \left\{\mathcal{P} = (u, v, w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| u = 0, w = 0\right\}$$
$$w - \text{tengely} = \left\{\mathcal{P} = (u, v, w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| u = 0, w = 0\right\}$$

tengelyekből álló „*u, v, w*” koordináta-rendszerrel. A szuper-műveletek közé felvéve

(2.7) $$\check{x} \,\overline{\ominus}\, \check{y} = \widetilde{x - y} \qquad , (x, y \in \mathbb{R}).$$

szuper-kivonást is, és lerögzítve a multiverzum egy tetszőleges $O_0 = (u_0, v_0, w_0)$ pontját a

(2.8) $$\begin{cases} \zeta = u \,\overline{\ominus}\, u_0 \\ \eta = v \,\overline{\ominus}\, v_0 \\ \zeta = w \,\overline{\ominus}\, w_0 \end{cases}, \ \mathcal{P} = (u, v, w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3}$$

*szuper – shift transzformáció*val a multiverzumot új, $\mathcal{O}_0$origójú „ξ,η,ζ” koordináta-rendszerrel látjuk el.

$$W_{\mathcal{O}_0} = \left\{ \mathcal{P} = (u,v,w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| \begin{pmatrix} \widetilde{-1}\overline{\oplus}u_0 < u < \check{1}\overline{\oplus}u_0 \\ \widetilde{-1}\overline{\oplus}v < v < \check{1}\overline{\oplus}v_0 \\ \widetilde{-1}\overline{\oplus}w_0 < w < \check{1}\overline{\oplus}w_0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.9}$$

A (2.8) alapján, (2.9) szerint

$$W_{\mathcal{O}_0} = \left\{ \mathcal{P} = (\xi,\eta,\zeta) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| \begin{pmatrix} \widetilde{-1} < \xi < \check{1} \\ \widetilde{-1} < \eta < \check{1} \\ \widetilde{-1} < \xi < \check{1} \end{pmatrix} \right\}$$

a multiverzumnak az $\mathbb{R}^3$ térrel „egyenlő terjedelmű” részhalmaza. Ezek szerint ***a szuper-shift transzformáció segítségével a multiverzum bármely háromdimenziós térnyi részhalmazát láthatjuk.***

■

(2.10.) *gyakorlat.* Vizsgáljuk meg a (2.3) alatti $\mathfrak{M}$ halmaz $\mathcal{P}_\infty = (0,0,\check{1})$ pontjának „környékét”! Előzetesen megállapítjuk, hogy az $\mathfrak{M}$ halmaz $\mathcal{P}_\infty$ „környéki” pontjai az $\mathbb{R}^3$ térben vannak, kivéve magát a $\mathcal{P}_\infty$ pontot. Legyen $\mathcal{O}_0 = \mathcal{P}_\infty$. Ekkor (2.8)

$$\begin{cases} \xi = u \\ \eta = v \\ \zeta = w \overline{\ominus} \check{1} \end{cases}, \ \mathcal{P} = (u,v,w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3},$$

a (2.9) pedig

$$W_{\mathcal{P}_\infty} = \left\{ \mathcal{P} = (u,v,w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| \begin{pmatrix} \widetilde{-1} < u < \check{1} \\ \widetilde{-1} < v < \check{1} \\ 0 < w < \check{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Az $u\overline{\odot}u\overline{\oplus}v\overline{\odot}v\overline{\oplus}w\overline{\odot}w = \check{1}$ egyenlet alakja a transzformációval

$$\xi\overline{\odot}\xi\overline{\oplus}\eta\overline{\odot}\eta\overline{\oplus}\zeta\overline{\odot}\zeta\overline{\oplus}\check{2}\overline{\odot}\zeta = 0,$$

ami a valós „ξ,η,ζ” számhármas esetén a

$$(\tanh\xi)^2 + (\tanh\eta)^2 + (\tanh\zeta)^2 + 2\tanh\eta = 1,$$

amire a számítógép rajza:

2.11 Abra

A $\mathcal{P}_\infty = \left(0,0,\breve{1}\right)$ pont a 2.11 ábra „tetőpontján” van. Ellentétben a (2.6) ábra sejtetésével a „hatszorosan sziámi iker Eiffel-torony” nem csúcsos, hanem szép, simogatható felület.
(2.12) g*yakorlat*. Mi a „hatszorosan sziámi iker Eiffel-torony” zsugorítottja?
A (2.3)-ból kiindulva és használva a (2.4) jelöléseket

$$\underline{\mathfrak{M}} = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

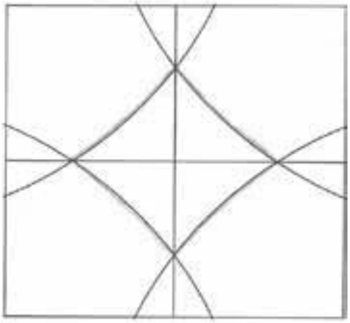
ami a 2.1 ábrán látható kockába beírható gömböt jelenti.

A háromdimenziós tér nem korlátos alakzatainak leírása

Már a (2.3) alatt definiált és a (2.6) ábrán érzékelt „hatszorosan sziámi iker Eiffel-torony” is a háromdimenziós térben nem korlátos alakzat, ami robbantott számokkal írható le. Ennél meggyőzőbb az „égbe nyúló Bábel-torony”, amelynek alapja az „*u, v”* koordinátasíkon fekvő

$$\mathfrak{A} = \left\{\mathcal{P} = (u, v, w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| |u| \overline{\oplus} |v| \le \widetilde{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \text{ és } w = 0\right\},$$

szuper-négyzet

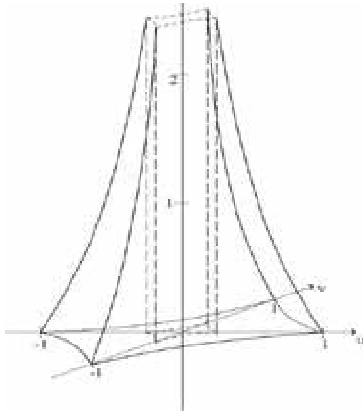


2.13 ábra.

A megvizsgálandó „Bábel torony” leírása:

$$\widetilde{\Delta_a^m} = \left\{\mathcal{P} = (u, v, w) \in \widetilde{\mathbb{R}^3} \middle| \begin{cases} (u, v) \in \mathfrak{A} \\ 0 \le w \le \breve{m} \;\overline{\odot}\; \left(\breve{1} \;\overline{\ominus}\; \left(\left(|u| \overline{\oplus}\; |v|\right) \overline{\odot}\; \widetilde{\left(\sqrt{2}\right)}\;\right)\right), 1 < m < \infty \end{cases}\right\},$$

amelynek $\mathcal{P}_* = (0,0,\breve{m})$ csúcsa már a multiverzumban van. A „mi” háromdimenziós terünkben csak a



2.14 ábra

„doboz” jelenség érzékelhető. A további taglalás az [5]-ben megtalálható.

Extra-egyenes a háromdimenziós térben

Legyen $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \underline{\mathbb{R}^3}$ és $E = \left(e_x, e_y, e_z\right) \in \mathbb{R}^3$. A P_0 ponton áthaladó át haladó E irányú

$$\mathbb{L}_{P_0,E}: \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + te_x \\ y_t = y_0 + te_y \\ z_t = z_0 + te_z \end{cases} \qquad , -\infty < t < \infty,$$

egyenes robbantásával a $\breve{P_0} = (\breve{x_0}, \breve{y_0}, \breve{z_0}) \in \mathbb{R}^3$ ponton át haladó szuper-egyeneshez jutunk, amelyet az

$$\breve{\mathbb{L}_{P_0,E}}: \qquad \begin{cases} \breve{x}_t = \breve{x_0} \overline{\oplus} \left(\check{t} \,\overline{\odot}\, \breve{e_x}\right) \\ \breve{y}_t = \breve{y_0} \overline{\oplus} \left(\check{t} \,\overline{\odot}\, \breve{e_y}\right) \\ \breve{z}_t = \breve{z_0} \overline{\oplus} \left(\check{t} \,\overline{\odot}\, \breve{e_z}\right) \end{cases} \qquad , -\infty < t < \infty$$

egyenletrendszer ír le. A szuper-egyenesnek a háromdimenziós terünkbe eső része az extra-egyenes

$$\mathbb{L}_{P_0,E}^{extra} = \breve{\mathbb{L}_{P_0,E}} \cap \mathbb{R}^3.$$

Röviden: az extra-egyenes a szuper-egyenesnek a háromdimenziós terünkbe eső nyitott szakasza.

Például, $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $E = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ esetén

$$\mathbb{L}_{P_0,E}: \qquad \begin{cases} x_t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ y_t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ z_t = 0 \end{cases} \qquad , \quad -\infty < t < \infty,$$

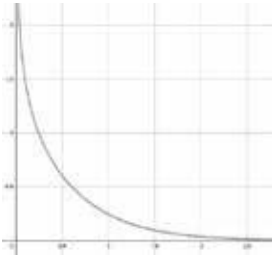
és

$$(2.15) \qquad \breve{\mathbb{L}_{P_0,E}}: \qquad \begin{cases} \breve{x}_t = \breve{\left(\frac{1}{2}\right)} \,\overline{\ominus}\, \left(\check{t} \,\overline{\odot}\, \breve{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right) \\ \breve{y}_t = \breve{\left(\frac{1}{2}\right)} \,\overline{\oplus}\, \left(\check{t} \,\overline{\odot}\, \breve{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right) \\ \breve{z}_t = 0 \end{cases} \qquad , -\infty < t < \infty.$$

Az $\mathbb{L}_{P_{0},E}^{extra}$ extra-egyenes háromdimenziós terünk extra-geometriájának egyik alapeleme, amely általában eltér az $\mathbb{R}^3$-ban ismert euklideszi, Bolyai–Lobacsevszkij és gömbi geometriáktól. Egyik legfontosabb eltérés, hogy az extra-egyenes két pontban metszi a háromdimenziós terünk (számunkra láthatatlan) határát, amit úgy is mondhatunk, hogy ***az extra-egyenesnek két végtelen távoli pontja van.*** Például a (2.15) esetében

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \mathcal{P}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\check{1}, 0{,}0\right) \text{ és } t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \mathcal{P}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(0, \check{1}, 0\right)$$

az $\mathbb{L}_{P_{0},E}^{extra}$ extra-egyenesnek vételen távoli pontjai:



2.16 ábra
Matematikusi filozófia a táguló Univerzumról

Dolgozatunkban eddig szándékosan nem használtuk az „univerzum" szót, ellentétben a „multiverzum" szóval, amelyet a 2. (A robbantott számok néhány alkalmazása) részben rendszeresen használtunk. Most megvilágítjuk ennek matematikai, majd filozófiai okát.
Az (1.1) és (1.2) robbantási, illetve zsugorítási képleteket egy „titokzatos" pozitív, valós σ paraméterrel (ami változik, de nem tisztázott, hogyan és milyen adatoktól függően) kiegészítve a

$$\check{x}^{\sigma} = \sigma(sgn\, x)\left(\tanh^{-1}\left\{\left|\frac{x}{\sigma}\right|\right\} + i\left[\left|\frac{x}{\sigma}\right|\right]\right),\ x \in \mathbb{R},$$

illetve az

$$\underline{u}_{\sigma} = Im\, u + \sigma \cdot \tanh\frac{Re\, u}{\sigma} \quad ,\ u \in \check{\mathbb{R}}^{\sigma}$$

képletekhez jutunk. Utóbbi, $u \in \mathbb{R}$, azaz valós u esetén az

$$\underline{u}_{\sigma} = \sigma \cdot \tanh\frac{u}{\sigma}$$

képletre redukálódik. Az $\underline{\mathbb{R}^3}$ helyébe

$$\underline{\mathbb{R}^3}_{\sigma} = \left\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ \begin{matrix} -\sigma < \xi < \sigma \\ -\sigma < \eta < \sigma \\ -\sigma < \zeta < \sigma \end{matrix}\right\}$$

lép, ami egy 2σ oldalélű kocka belseje (a 2.1 ábrán $\sigma = 1$). Bármely pozitív, valós σ esetén
(2.17) $\underline{\mathbb{R}^3}_{\sigma} \subset \mathbb{R}^3 \quad ,0 < \sigma < \infty.$
Mi az $\underline{\mathbb{R}^3}_{\sigma}$ „nagy σ esetén nagy" kockát nevezzük $\sigma -$ *univerzumnak*, amely a σ növekedésével a háromdimenziós térben korlátlanul tágulhat, de belőle ki nem léphet. Ugyanakkor a háromdimenziós térben végtelenül sok $\sigma -$ univerzum fér el (Lásd (2.17)). Ebből a szempontból ***akár a háromdimenziós tér is lehet a multiverzum***. Másrészt, matematikailag tény, hogy bármely pozitív, valós σ esetén a háromdimenziós tér része minden egyes

$$\widecheck{\mathbb{R}^3}^{\sigma} = \left\{\check{P}^{\sigma} = (\check{x}^{\sigma}, \check{y}^{\sigma}, \check{z}^{\sigma}) | P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

multiverzumnak, amelyek mindegyikében végtelenül sok háromdimenziós tér fér el:
(2.18) $\mathbb{R}^3 \subset \widecheck{\mathbb{R}^3}^{\sigma} \quad ,0 < \sigma < \infty.$
Ebből a szempontból ***akár $\widecheck{\mathbb{R}^3}^{\sigma}$ is lehet a multiverzum***.

Megjegyezzük, hogy a σ változásakor $\lim\limits_{\substack{\sigma\to 0\\ 0<\sigma}} \sigma\cdot\tanh\frac{u}{\sigma}=0$ jelenti a Big Bang (ma általában elfogadott időbeli kezdetét) és a $\lim\limits_{\substack{\sigma\to \infty\\ 0<\sigma}} \sigma\cdot\tanh\frac{u}{\sigma}=u$ megengedi a „fagyhalál"-hoz közeli állapotot. Ha a σ hol nő (mint jelenleg), hol csökken (amint esetleg volt már, vagy lesz), akkor bekövetkezhet a Big Crash de lehet, hogy a $\sigma-$ Univerzum pulzál. Egy általunk felvetett hipotézisre majd a filozofálás után térünk vissza.
Descartes „Cogito ergo sum" kijelentése nyomán mondjuk, hogy a $\boldsymbol{\sigma-}$ **univerzum létezik** és a jelenleg általában elfogadott $\sigma\approx 13{,}8$ milliárd fényév. Ez a tény *objektív valóság,* azaz tudatunktól független. A ***háromdimenziós tér*** az emberi (esetleg egyéb?) gondolkodás terméke, ezért *szubjektív valóság.* Mi egy véges $\sigma-$ univerzumban élünk, de egy végtelennek tekintett háromdimenziós térben számolunk (amit, a $\lim\limits_{\substack{\sigma\to \infty\\ 0<\sigma}} \sigma\cdot\tanh\frac{u}{\sigma}=u$ miatt kis hibával megtehetünk, mivel σ már „elég nagy"). Ezen az alapon (jelenleg) a $\sigma-$ univerzumunk egy képzeletbeli háromdimenziós térben tágul.
Az $\widetilde{\mathbb{R}^3}^{\boldsymbol{\sigma}}$ **létezésére nincs kísérleti bizonyítékunk**, de létezése a (2.18) szerint nem kizárt. Az $\widetilde{\mathbb{R}^3}^{\sigma}$ természetesen nem a Nicolaus Cusanus (De ludo globi, 1372), sem Giordano Bruno (De l'infinito universo et mundi, 1584) által említett „számtalan világ", mert ezek még a (2.17) „hatálya" alá esnek. Cusanus vélekedése, ami szerint „A világnak nincs pereme, Mert, ha középpontja lenne és pereme is, és így lenne (térbeli Sz. I.) kezdete és vége, a világ határolt volna valami máshoz viszonyítva és a világon kívül volna valami más is" – nagyon elgondolkodtató (lásd [6], 135. oldal).
A multiverzum létezésére bizonyítékot szolgáltathat az extra-egyenes mentén haladó objektum (részecske, sugárzás, hullám stb.) felfedezése, hiszen az a multiverzumból „jön", vagy oda „megy". (Például, a 2.16 ábrán látható görbe mentén haladó objektum, ami nem hiperbolaág, bár annak látszik.)
Végül az általunk felvetett hipotézis, amelyet a $\boldsymbol{\sigma-}$ **univerzum manapság tapasztalt rohamos tágulása** táplál, az, hogy ***megtörténhet, vagy már meg is történt a Second Big Bang, amelynek során a háromdimenziós tér pontonként (nem biztos, hogy egyszerre) való felrobbanásával is létrejöhet a multiverzum***.
Legvégül arról, hogy miért érdemes erről a témáról matematikusként (nem kozmológusként) gondolkodni. Egyrészt a matematikai gondolkodás fontosságát az Európai Bizottság is hangsúlyozza (Memorandum on lifelong learning, lásd [7], 227. és 233. oldalak). Másrészt a [7] 228. oldalán javasolt „szakirányú továbbképzés" mellé jelen tanulmányt önképzésként javaslom azon szerbiai magyarok számára, akiknek a magyar nyelven való olvasás megkönnyíti a témában való elmélyülést.

Irodalomjegyzék

[1] Sain Márton: Matematika-történeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest (ötödik és átdolgozott kiadás) 1987.
[2] Szalay István: Matematika (tanító szakos hallgatók számára), Szegedi Egyetemi Kiadó, Juhász Gyula Felsőoktatási Kiadó, Szeged, 2010.
[3] Szalay István, A tanító és a matematika tanári szak párosítása a bolognai folyamat keretei között, A tanítóképzés jövőképe (a II. Nemzetközi tudományos konferencián elhangzott munkák gyűjteménye, Szabadka, 2008. szeptember 18–20.) 424–432. Forum Könyvkiadó, Újvidék és Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka, 2009.
[4] Szalay István: Robbantott számok (Exploded numbers), Nemzeti Értékek Könyvkiadó, Szeged, 2021
[5] István Szalay: Beyond real numbers, Az esélyegyenlőség és a felzárkóztatás vetületei az oktatásban. II. A tehetséggondozástól az élethosszig tartó tanulásig. 74–83. Forum Könyvkiadó,

Újvidék és Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka, 2009.
[6] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete (2. bővített kiadás), Gondolat Kiadó, Budapest, 1981.
[7] T. Molnár Gizella: A továbbképzés lehetőségei az esélyegyenlőség erősítésében, Az esélyegyenlőség és a felzárkóztatás vetületei az oktatásban II. A tehetséggondozástól az élethosszig tartó tanulásig. 225–234. Forum Könyvkiadó, Újvidék és Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka, 2009.