

ÜBER DIE q -MULTIPLIKATIVE FUNKTIONEN DIE DEN MITTELWERT GLEICH NULL HABEN

JÁNOS FEHÉR

*Meinem Freund Professor Árpád Varcza aus Anlass der Vollendung seines 60. Lebensjahres
gewidmet.*

ZUSAMMENFASSUNG. In diesem Beitrag werden die q -multiplikative Funktionen F , die den Mittelwert $M(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) = 0$ haben, charakterisiert.

1. EINLEITUNG

Sei $2 \leq q \in \mathbb{N}$. Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kann eindeutig in der Form

$$(1.1) \quad n = a_0 + a_1q + \cdots + a_sq^s \quad (a_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}, \ a_s = 0 \Rightarrow n = 0)$$

angegeben werden. Die an der Menge $\mathbb{N}_0$ erklärte Funktion f bzw. F heisst q -additiv bzw. q -multiplikativ, falls – angenommen die Herstellung (1.1) von n –

$$(1.2) \quad f(n) = \sum_{j=0}^s f(a_jq^j) \quad \text{bzw.}$$

$$(1.3) \quad F(n) = \prod_{j=0}^s F(a_jq^j) \quad (F \neq 0)$$

gelten ([1], [2]).

Man sagt, dass eine Funktion $g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ den Mittelwert $M(g)$ hat, wenn die Folge $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$ dem endlichen Grenzwert $M(g)$ zustrebt. Es sei (im Weiteren stets) $F: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ q -multiplikativ mit $|F(n)| \leq 1$. H. Delange hat die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz $M(F) \neq 0$ angegeben (vgl. [1], Théorème 2.). Jedoch befasste er sich mit dem Fall $M(F) = 0$ nicht. Das wird sofort verständlich, wenn man darauf hinweist, dass dieser vorliegende Satz beim Beweis eines mit dem Satz von Erdős–Wintner analogen Satzes die Rolle eines Hilfssatzes gespielt hat. Der vorliegende Beitrag befasst sich deshalb mit dem Fall $M(F) = 0$. Z.B. kann dieses Ergebnis von Interesse bei der Verwendung des Weyl-Kriteriums für reelwertige q -additive Funktionen sein.

Satz. Sei $F: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ q -multiplikativ mit $|F(n)| \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$). $M(F)$ existiert und ist gleich Null genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$(1.4) \quad \text{mindestens einmal } 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) = 0,$$

$$(1.5) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \left(q - 1 - \sum_{a=1}^{q-1} \Re F(aq^s) \right) = \infty.$$

2. HILFSSÄTZE

Wir werden bei dem Beweis des Satzes die Methode von H. Delange verwenden. Es sei also

$$\varepsilon_s := \max_{1 \leq a < q} (1 - \Re F(aq^s)).$$

Dann gilt stets $\varepsilon_s \geq 0$ und sind die Bedingungen (1.5) und $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \infty$ äquivalent.

Hilfssatz 2.1. Ist $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s < \infty$, so ist das unendliche Produkt $\prod_{s=0}^{\infty} \frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right|$ konvergent.

Beweis. Sei $B_s := \frac{1}{q} \sum_{a=1}^{q-1} \Im F(aq^s)$. Aus der Bedingung $|F(n)| \leq 1$ folgt

$$2(1 - \Re F(aq^s)) \geq 1 - (\Re F(aq^s))^2 \geq (\Im F(aq^s))^2.$$

Hieraus folgt $2\varepsilon_s \geq \max_{1 \leq a < q} |\Im F(aq^s)|^2$. Ferner gilt es

$$B_s^2 \leq \frac{1}{q^2} \left(\sum_{a=1}^{q-1} |\Im F(aq^s)| \right)^2 \leq \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 \left(\max_{1 \leq a < q} |\Im F(aq^s)| \right)^2.$$

Daraus gewinnt man $B_s^2 \leq 2\varepsilon_s$. Ist also $\sum \varepsilon_s < \infty$, so ist auch $\sum B_s^2 < \infty$.

Schreibt man $\frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right| = 1 - u_s$, so ist $0 \leq u_s \leq 1$. Es genügt also zu

beweisen, dass $\sum u_s$ konvergiert. Mit $A_s := \frac{1}{q} \sum_{a=1}^{q-1} (1 - \Re F(aq^s))$ gilt

$$0 \leq u_s \leq 2u_s - u_s^2 = 2A_s - A_s^2 - B_s^2.$$

So ist es offenbar, dass mit $\sum \varepsilon_s$ auch $\sum u_s$ konvergiert. □

Hilfssatz 2.2. Ist $|z_j| \leq 1$ ($j = 1, \dots, q-1$), so gilt

$$\frac{1}{q} |1 + z_1 + \dots + z_{q-1}| \leq 1 - \frac{1}{2q} \max_{1 \leq a < q} (1 - \Re z_j).$$

Hilfssatz 2.3. Für $N \rightarrow \infty$ gilt mit $t(N) := [\log N / \log q]$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(M) = \prod_{s=0}^{t(N)} \frac{1}{q} \left(1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right) + o(1).$$

Die beide letzte Hilssätze stammen von H. Delange (vgl. [1], Lemme 3. bzw. Théorème 1.).

3. BEWEIS DES SATZES

Laut des Hilfssatzes 2.3. gilt $M(F) = 0$ genau dann, wenn das Produkt

$$\prod_{s=0}^N \frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right|$$

für $N \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Wir bemerken noch, dass ein konvergentes unendliches Produkt den Wert Null nur dann haben kann, wenn es mindestens einen Nullfaktor besitzt.

- (a) Setzen wir $M(F) = 0$ und $1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \neq 0$ ($s = 0, 1, \dots$) voraus. Laut des Hilfssatzes 2.1. gilt dann $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \infty$.
- (b) Ist $1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^b) = 0$, so strebt das Produkt $\prod_{s=0}^N \frac{1}{q} \left(1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right)$ für $N \rightarrow \infty$ gegen Null, weil es für jedes $N \geq b$ verschwindet.
- (c) Setzen wir zuletzt $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s = \infty$. Laut des Hilfssatzes 2.2. gilt

$$\frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right| \leq 1 - \frac{\varepsilon_s}{2q} \leq \exp \left(-\frac{1}{2q} \varepsilon_s \right),$$

folglich gilt stets

$$\prod_{s=0}^N \frac{1}{q} \left| 1 + \sum_{a=1}^{q-1} F(aq^s) \right| \leq \exp \left(-\frac{1}{2q} \sum_{s=0}^N \varepsilon_s \right).$$

Weil da die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, strebt auch das links stehende Produkt gegen Null.

4. ANWENDUNGEN

Die Anwendung des Satzes wird an zwei Beispielen demonstriert.

Beispiel 4.1. Die reelwertige q -additive Funktion f verteilt sich gleichmässig (mod 1) genau dann, wenn für jede positive ganze Zahl k eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$(4.2) \quad \text{es existiert } s(k) \in \mathbb{N}_0 \text{ für das } 1 + \sum_{a=1}^{q-1} \exp(i2\pi k f(aq^{s(k)})) = 0,$$

$$(4.3) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{a=1}^{q-1} \sin^2(k f(aq^s) \cdot \pi) = \infty.$$

Beweis. Weil die Funktionen $F_k(n) := \exp(i2\pi k f(n))$ q -multiplikativ mit $|F_k(n)| = 1$ sind, ist das eine unmittelbare Folgerung des Weyl-Kriteriums und des Satzes. $\square$

Beispiel 4.4. Die reelle Zahl α ist genau dann irrational, falls

$$(4.5) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \sin^2(\pi \cdot 2^s \alpha) = \infty.$$

Beweis. Als es wohl bekannt ist, ist α genau dann irrational, wenn sich die Funktion $f(n) = \alpha n \pmod{1}$ gleichmässig verteilt. Da f für jedes $q \geq 2$ q -additiv ist, genügt es – laut des Beispiels 4.1. ($q = 2$) – zu bemerken, dass die Bedingung (4.2) mit diesem f nie gelten kann. $\square$

LITERATUR

- [1] Delange, H. Sur les fonctions q -additives ou q -multiplicatives. *Acta Arithmetica*, XXI:285–298, 1972.
- [2] Gelfond, A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives données. *Acta Arithmetica*, 13:259–265, 1968.

Received December 4, 2000

E-mail address: feher@math.ttk.pte.hu

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK,
PTE, PÉCS,
IFJÚSÁG ÚT 6,
H-7624 PÉCS,
UNGARN