

E 870

HÍRADÁS- TECHNIKA



A HÍRADÁS-
TECHNIKAI
TUDOMÁNYOS
EGYESÜLET
LAPJA

4

XXI. ÉVFOLYAM, 4. SZÁM, 97–128 OLDAL, BUDAPEST, 1970. ÁPRILIS HÓ

TARTALOM

Dr. GORDOS GÉZA: AM rendszerek torzításainak transzformációja szorzódemoduláció esetén	97
WAESTERLID, N.: Korszerű, középfrekvenciával modulált televízió adó, félvezetős gerjesztő egységgel	106
BUDINSZKY JÓZSEF: Színmértani számítások módszerei	110
Köszöntjük Állami Díjasainkat	126
Diplomaterv-pályázat	126
Országos Híradástechnikai és Műszeripari Gazdasági Konferencia	126
Egyesületi hír	127
Tartalmi összefoglalások	127
Обобщения	127
Zusammenfassungen	128
Résumés	128
Summaires	128

Szerkesztőség: BOGLÁR GYULA főszerkesztő, SZÖLLŐSI GYÖRGYNÉ szerkesztőségi titkár, BALOGH PÁL, DR. SÁRKÖZY GÉZA kandidátus és MAY PÉTER tudományos szerkesztők, DR. FLESCHE ISTVÁN, DR. RUPPENTHAL PÉTER szerkesztőségi munkatársak. — A szerkesztőség címe: Budapest, V., Szabadság tér 5—6. III. em. 320. Telefon: 183-772 — A Híradástechnikai Tudományos Egyesület címe: Budapest, V., Szabadság tér 17. Telefon: 113-027

Szerkesztő bizottság tagjai: ALMÁSSY GYÖRGY kandidátus, BARTA ISTVÁN akadémikus, BATTISTIG GYÖRGY, BÍRÓ FERENC, BUDAI LAJOS, CZEGLÉDY GYÖRGY, ERDÉLYI JÁNOS kandidátus, GERGELY ÖDÖN, GIBER JÁNOS kandidátus, KATONA JÁNOS, a műszaki tudományok doktora, KÓMÜVES FRIGYES kandidátus, LAJKÓ SÁNDOR, MAGÓ KÁLMÁN, MAKÓ ZOLTÁN, NÁDAS TIBOR, POGÁNY KÁROLY, VALKÓ I. PÉTER, a műszaki tudományok doktora, VÍG ISTVÁN

INDEX: 25.375

HÍRADÁSTECHNIKA

Kiadja a Lapkiadó Vállalat, Budapest, VII., Lenin körút 9—11. Telefon 221-285. Felelős kiadó: SALA SÁNDOR igazgató. Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest, V., József nádor tér 1. Telefon: 180-850) vagy bármely postahivatalnál. Előfizetési díj: félévre 36 Ft, egész évre 72 Ft. Egyes szám ára: 6 Ft. Megjelenik havonta. Csekk számlaszám: egyéni 61,254, közületi 61,066 vagy átutalás MNB 8. sz. folyószámlájára. A folyóirat külföldre előfizethető: „KULTURA” P. O. B. 149 Budapest, 62.

70.4024 Egyetemi Nyomda, Budapest. Felelős vezető: JANKA GYULA igazgató



DR. GORDOS GÉZA

BME Vezetékes Híradástechnikai Tanszék

AM rendszerek torzításainak transzformációja szorzódemoduláció esetén

ETO 621.376.2.018.78

A modulációs rendszerek adott körülmények közötti alkalmazhatóságának, valamint minőségének megítélésében igen sokféle szempont játszik szerepet. Jelen közleményben kísérletet teszünk a rendszerelméleti szempontok három kérdéses csoport köré tömörítésére. E három fő szempont az alábbi: a modulált jelek spektrális tulajdonságai, a modulált jelet ért torzításoknak a hatása a demoduláció után, valamint a modulált jelhez keveredő zajok befolyása a demodulált jelre. Míg az első és harmadik szempontot a hírközlés rendszerelmélete kimerítően tárgyalja, a második szempont szisztematikus tárgyalására szakkönyvekben és folyóiratokban, valamint az oktatásban csak elvétve tettek kísérleteket. Ezért a jelen bevezetést követő első szakaszban rendszerelméleti összefoglalását adjuk a modulációs rendszerek megítélésével kapcsolatos szempontoknak és ezen belül javaslatot teszünk a modulált jelet ért torzítások demodulált jelre gyakorolt hatásával kapcsolatos fogalmak — mint: a torzítások transzformációja, a külső és belső átviteli út, ekvivalens alapsávi rendszer stb. — definíciójára. Ugyanennek a kérdésnek az összeköttetések tervezése szempontjából megvilágított tárgyalása [4] és [5] alatt található.

Részben a fentiek illusztrálására, részben bizonyos eredmények közzétételére a cikk további része a szorzó demodulációval működő AM rendszerek lineáris torzításainak transzformációjával (azaz a modulált jelet ért lineáris torzításoknak a demodulált jelre gyakorolt hatásával) foglalkozik. Hogy azonban erre sor kerülhessen, a második fejezet az AM jelek spektrális tulajdonságait tekinti át. Itt a későbbiek előkészítésén kívül célunk volt egyrészt annak demonstrálása, hogy a determinisztikus és sztochasztikus moduláló jelek esetére teljesen egységes tárgyalás alkalmazható, másrészt igyekeztünk az oldalsávképződés általános — az „átfedés” esetén is érvényes — szabályait lefektetni.

A harmadik szakasz a szorzó demodulátorban felépítő torzításokat tárgyalja. A közismert eredmények származtatása egy új, szemléletes, az oldalsávképző-

dés egyszerű szabályain alapuló módszerrel történik.

A negyedik szakasz tartalmazza a dolgozat második fő mondanivalóját: a modulált jelet lineárisan torzító átviteli úttal rendelkező, szorzó demodulációval működő AM rendszerekkel (mindenféle moduláció nélkül) ekvivalens alapsávi rendszerek meghatározásának módszerét. Az itt bemutatott kétutas alapsávi rendszerből álló helyettesítő kép önálló eredmény. Az általános tárgyalást néhány — a gyakorlatban fontos — speciális eset, továbbá az ideális AM-átvitel szükséges és elégséges, valamint elégséges feltétele illusztrálja. Mindezek alapján a 2., 3. és 4. szakasz az AM rendszerek kimerítő rendszerelméleti tárgyalásának tekinthető, amelyből — a dolgozat céljaival összhangban —, csak a zajok befolyásának ismertetése hiányzik.

1. Modulációs eljárások általános jellemzői

Ahhoz, hogy az egyes modulációs eljárásokat a gyakorlat szempontjából jellemezni tudjuk, összehasonlíthassuk, ismernünk kell a modulált jelek spektrális tulajdonságait, a belső átviteli út torzításainak hatását a modulációs tartalomra, továbbá a zajviszonyok alakulását a vételnél.

1.1 Spektrális tulajdonságok

A jel spektrumán a jel különböző frekvenciájú harmonikus összetevőit meghatározó adatok összességét értjük. Determinisztikus jelek esetén az amplitúdóra vonatkozó adatok összessége az $S(\omega)$ amplitúdó spektrum, míg a fázisra jellemző adatok összessége a $\Phi(\omega)$ fázisspektrum. A kettő együttesen adja az úgynevezett komplex-amplitúdó spektrumot:

$$F(j\omega) \equiv F(\omega) = S(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$$

Stacionárius sztochasztikus jelek spektrális tulajdonságait a $g(\omega)$ teljesítménysűrűség spektrummal adjuk meg. Modulált jelek spektrumának meghatározását ideális modulátor feltételezésével végezzük. A spektrum ismerete elengedhetetlenül szükséges a modulált jel által elfoglalt frekvenciasáv meghatározásához.

Egyrészt megadja, hogy melyek azok a frekvenciatartományok, amelyekben a jelentős komponensek fordulnak elő; másrészt felmérhetők azok a zavarok, amelyeket a vizsgált rendszer más frekvenciasávban működő összeköttetésekben okoz.

A különböző modulációs rendszerek spektrális tulajdonságait a szakirodalom részletesen tárgyalja, de nem ez a helyzet a modulációs rendszerek torzításokat transzformáló tulajdonságaival kapcsolatban.

1.2 Torzítások transzformációja

Ha valamilyen modulált jel kerül egy torzításokkal rendelkező átviteli útra, akkor természetesen ez a modulált jel eltorzulva érkezik a vevőbe. Bennünket azonban nem a modulált jelet ért torzítások érdekelnek elsősorban, hanem azok a torzítások, amelyeket a modulációs tartalom szenvedett, tehát azok a torzítások, amelyeket a demodulált jel mutat fel a moduláló jelhez képest. Ezek a torzítások egy alapsávi rendszer hatásának is felfoghatók. Torzítások transzformációján egy olyan *ekvivalens alapsávi rendszer* meghatározását értjük,

a) amely bármilyen bemeneti jel esetén ugyanolyan kimeneti jellel rendelkezik, mint az ideális modulátort és demodulátort, valamint a modulált jelet továbbító belső átviteli utat tartalmazó külső átviteli út, azaz a teljes modulációs rendszer (1. ábra);

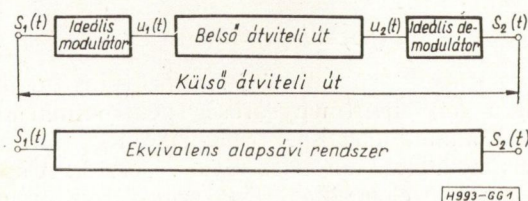
b) amelynek átviteli jellemzői a moduláló jelre ható ún. belső átviteli út jellemzőinek meghatározott transzformációjával nyerhetők.

Ez gyakorlatilag például azt jelenti, hogy a belső átviteli út lineáris torzításait kifejező átviteli karakterisztikából az ekvivalens alapsávi rendszer átviteli karakterisztikáját kell meghatározni. A torzítások transzformációja a moduláció típusának függvénye. Jól ismert például [1], hogy a belső átviteli út fázistorzítása szorzó demodulációt alkalmazó AM rendszerben amplitúdó- és fázis-torzítással rendelkező ekvivalens alapsávi rendszert eredményez, míg frekvenciamodulációnál ugyanilyen belső átviteli út az ekvivalens alapsávi rendszerben a fentiekén kívül nemlineáris torzítást is eredményez.

Úgy tűnik, hogy az a mód, ahogy egy modulációs rendszer a torzításokat transzformálja a szóban forgó modulációs rendszer egyik legfontosabb jellemzője. A szakirodalomban való ritkább előfordulását az magyarázza, hogy tárgyalása bonyolultabb mint akára korábban említett spektrális tulajdonságok, akár pedig a következőkben áttekintett zajok transzformációja.

1.3 Zajok transzformációja

A modulált jeleket a belső átviteli úton a torzításokon kívül zajhatások is befolyásolják. A különböző modulációs rendszereknél a belső átviteli út zajai kü-



1. ábra

lönbözőképpen transzformálódnak a külső átviteli útra. A modulációs rendszerek jellemzésének harmadik eszköze a zajok transzformációja. A zajok transzformációjára jó áttekintést ad a zajcsökkentési tényező, melynek definíciója:

$$T_z = \frac{P_z/N_z}{P/N}$$

ahol P az átvitt sávba eső modulált jelteljesítmény teljes kimodulálás esetén a vevő bemenetén, N a zajteljesítmény a modulált jel sávjában, a vevő bemenetén, (számításokban általában normál eloszlású fehér zajt tételeznek fel, amely korrelálatlan a jellel), P_z a jelteljesítmény demodulálás után — adott típusú demodulátort feltételezve — (egy csatornában) és N_z a zajteljesítmény a demodulálás után azonos típusú demodulátor esetén (egy csatornában) (2. ábra). Ha a moduláló jel többcsatornás multiplex jel, akkor P_z és N_z egyetlen csatornában értendő.

A zajok transzformációja az irodalomban elég kimerítően tárgyalt téma (lásd pl. [2]).

Általános tárgyalásnál célszerűnek látszik a torzítások és zajok transzformációját együttesen a *zavarok transzformációjának* nevezni.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy egy modulációs rendszert akkor tekinthetünk ismertnek, ha ismerjük a spektrális tulajdonságait és a zavaroknak ezen modulációs rendszerhez tartozó transzformációját.

2. AM jelek spektrális tulajdonságai

2.1 Alapfogalmak

Az amplitúdó modulált jelek spektrumának meghatározása előtt néhány jelölést vezetünk be, s fel-elevenítjük a felhasználandó matematikai tételt.

Az $S_1(t)$ moduláló jelet számításainkban saját maximumára normált formában célszerű használni:

$$s_1(t) = \frac{S_1(t)}{|S_1(t)| \max} \quad (1)$$

Szinuszos vivőjű modulációs rendszerek esetében a vivőhullám szokásos alakja a következő:

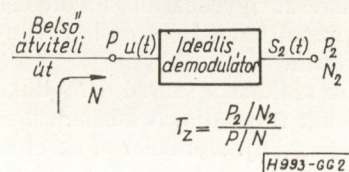
$$u_v(t) = U_v \cos(\omega_v t + \varphi_v)$$

Így az AM jel időfüggvénye:

$$u(t) = U_v[1 + ms_1(t)] \cos(\omega_v t + \varphi_v) = u_v(t) + u_v(t)ms_1(t) \quad (2)$$

formába írható, ahol $m = \frac{|S_1(t)| \max}{U_v}$, az ún. modulációs index (mélység).

Az első sorból „1”-et, a másodikból $u_v(t)$ -t elhagyva az AM-SC jel időfüggvényét kapjuk, melyet a továb-



2. ábra

biakban az oldalsávi tagnak fogunk nevezni. Az oldalsávi tag legcélszerűbb matematikai alakja (2)-ből nyerhető

$$u_{old}(t) = S_1(t) \cdot \cos(\omega_v t + \varphi_v)$$

A (2) alatti $u(t)$ modulált jel spektruma Fourier-transzformációval határozható meg:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\{u_v(t)\} + \mathcal{F}\{u_v(t)ms_1(t)\}$$

Az első tag a vivő spektruma, amelynek ω_v frekvenciájú komponense kiegyenlített modulátoroknál nem jelenik meg (AM-SC jel).

A második tag az oldalsávi spektrum, amely egy szinuszos jel és egy tetszőleges spektrumú jel szorzatának a spektruma. Célunk ennek az információt hordozó oldalsávi spektrumnak a meghatározása. Ehhez felhasználható a konvolúció tétel, amely szerint, ha $f_1(t)$ és $F_1(\omega)$, valamint $f_2(t)$ és $F_2(\omega)$ Fourier-transzformált párok, akkor fennáll:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Azaz szorzat Fourier-transzformáltja a tényezők Fourier-transzformáltjainak konvolúciójával határozható meg. Részletesen:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - z) \cdot F_2(z) dz \quad (3)$$

ahol ω és z frekvencia-jelentésű változók.

2.2 AM jel spektruma determinisztikus moduláló jel esetén

Ebben a szakaszban az AM-SC spektrumot, azaz az oldalsávi spektrumot fogjuk megadni periodikus jel vagy egyszeri folyamat, mint moduláló jel esetén. A közismert AM-spektrumot itt csak azért tárgyaljuk, hogy bemutathassuk a periodikus, valamint egyszeri jelekkel való moduláció, továbbá a véletlen változó jelekkel való moduláció teljesen egységes tárgyalhatóságát. Ehhez először a moduláló jelek $F_1(\omega)$ komplex-amplitúdó spektrumát kell megfelelő alakban felírunk! Közismert, hogy ha az $s_1(t)$ normált moduláló jel periodikus időfüggvény, akkor

$$S_1(t) = d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} D_i e^{j\omega_i t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d_i}{2} e^{j\omega_i t} e^{j\varphi_i}$$

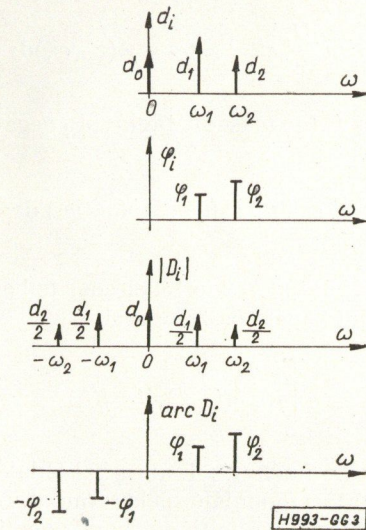
alakok bármelyikével megadható. Itt a jel egy ω_i körfrekvenciájú komponensének valós amplitúdója d_i , fázisa φ_i , komplex amplitúdói pedig $D_i = (d_i/2)e^{j\varphi_i}$, ill. $D_{-i} = D_i^*$. Az egységes tárgyalás érdekében a vonalas spektrumot Fourier-spektrum formájában, a Dirac-függvények szimbolikájával célszerű felírni:

$$\mathcal{F}\{s_1(t)\} = F_1(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{d_i}{2} \delta(\omega - \omega_i) e^{j\varphi_i}$$

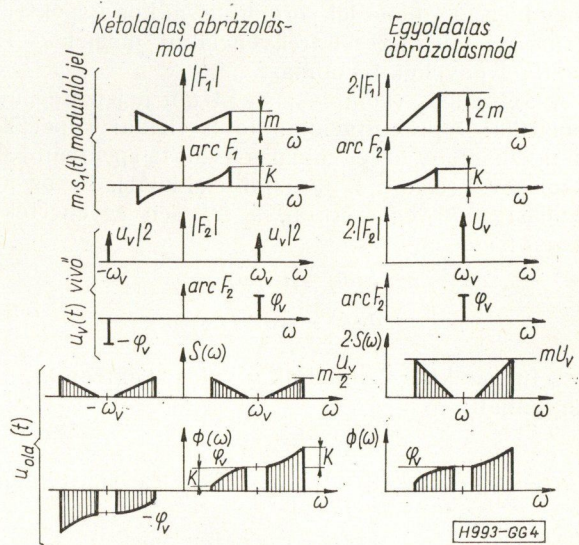
(A Dirac-szimbolika használhatóságára nézve lásd pl. [3].) A 3. ábra bemutatja egy periodikus jel vonalas spektrumát (amplitúdó és fázisspektrumát) egyoldalas (valós) és kétoldalas (komplex) ábrázolással egyaránt.

Ha az $s_1(t)$ normált moduláló jel egyszeri folyamat, akkor folytonos spektrumát — amennyiben létezik — Fourier-integrál segítségével állíthatjuk elő.

$$\mathcal{F}\{s_1(t)\} = F_1(\omega)$$



3. ábra



4. ábra

Ezzel felírtuk a szorzat egyik tényezőjének, a moduláló jelnek spektrumát, egységes (Fourier-transzformáltat, azaz komplex-amplitúdó spektrumot használó) formában. Az $F_1(\omega)$ komplex-amplitúdó spektrum ábrázolása annak abszolút értékével (amplitúdó spektrum) és fázisával (fázisspektrum) történik, ahol az m modulációs mélység is megadásra került (lásd a 4. ábrát).

A szorzat másik tényezője a koszinuszos vivőhullám:

$$u_v(t) = U_v \cos(\omega_v t + \varphi_v)$$

Ennek komplex spektruma két Dirac-függvényből áll (4. ábra)

$$F_v(\omega) = \frac{U_v}{2} \delta(\omega - \omega_v) e^{j\varphi_v} + \frac{U_v}{2} \delta(\omega + \omega_v) e^{-j\varphi_v}$$

Most már megtudjuk határozni a $u_v(t)ms_1(t)$ szorzat Fourier-transzformáltját! A (3) konvolúció integrált felhasználva az $F_v(\omega)$ első tagjával a pozitív ω_v vivőfrekvencia körül elhelyezkedő spektrumrészt kapjuk:

$$m \frac{U_v}{2} e^{j\varphi_v} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - z) \delta(z - \omega_v) dz = m \frac{U_v}{2} e^{j\varphi_v} F_1(\omega - \omega_v) = m \frac{U_v}{2} |F_1(\omega - \omega_v)| e^{j[\varphi_v + \arctan F_1(\omega - \omega_v)]}$$

Ugyanígy az $F_v(\omega)$ második tagjával a negatív ω_v vivőfrekvencia körül elhelyezkedő spektrumrészt kapjuk:

$$m \frac{U_v}{2} e^{-j\varphi_v} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - z) \delta(z - \omega_v) dz = m \frac{U_v}{2} e^{-j\varphi_v} F_1(\omega + \omega_v) = m \frac{U_v}{2} |F_1(\omega + \omega_v)| e^{j[-\varphi_v + \arctan F_1(\omega + \omega_v)]}$$

A konvolúció integrál kiértékelésénél felhasználtuk a következő jól ismert összefüggést:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

A kapott eredményt a 4. ábra bal oldalán ábrázoltuk, szimbolikus moduláló spektrummal. A jól ismert oldalsávi spektrumon feltűnik, hogy azon az ω_v vivőfrekvenciára szimmetrikus amplitúdó- és pontszimmetrikus fázisspektrum jött létre. Megjegyezzük, hogy ha a moduláló jel periodikus, akkor a spektrum természetesen diszkrét frekvenciákon megjelenő Dirac-függvényeket tartalmaz.

A kétoldalas (komplex) spektrum a jelenség matematikai reprezentációja. Jobb fizikai képet kapunk azonban az egyoldalas (valós) spektrum ábrázolásával (lásd a 4. ábra jobb oldalát). Ez az ábrázolási mód egyszerűbb, s teljesen egyenértékű, hiszen ha az

$$S(\omega) = |F(j\omega)|$$

$$\Phi(\omega) = \arctan F(j\omega)$$

összefüggésekkel definiáljuk a valós spektrumot, akkor fennáll:

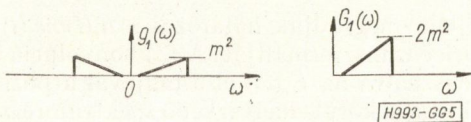
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega \quad (4)$$

Az egyoldalas oldalsávi spektrum szerkesztési szabályai a 2.4 szakaszban foglalkozunk.

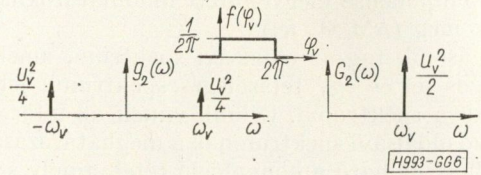
2.3 AM jel teljesítménysűrűség spektruma véletlen moduláló jel esetén

Stacionárius sztochasztikus folyamatok frekvenciatartománybeli leírását a $g(\omega)$ teljesítménysűrűség spektrum adja meg. Határozzuk meg az AM jel teljesítménysűrűség spektrumát véletlen változó moduláló jel esetén!

A véletlen változó moduláló jelet — amelyről felte tesszük, hogy az egy $s_1(t; e)$ stacionárius sztochasztikus folyamat — $g_1(\omega)$ kétoldalas, ill. $G_1(\omega)$ egyoldalas teljesítménysűrűség spektrumával adjuk meg (5. ábra). (Itt „ e ” a folyamat realizációját meghatározó valószínűségi változó.)



5. ábra



6. ábra (g és G indexei helyesen v)

A vivőhullám stacionárius sztochasztikus modellje

$$u_v(t_j; \varphi_v) = U_v \cos(\omega_v t + \varphi_v)$$

ahol φ_v egyenletes $f(\varphi_v)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változó (6. ábra) [3].

Mivel egy vonalas spektrumú jel teljesítménysűrűség spektruma a D_i komplex együtthatókkal

$$g(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |D_i|^2 \delta(\omega - \omega_i)$$

alakban állítható elő, a sztochasztikus vivőhullám $g_v(\omega)$ teljesítménysűrűség spektruma:

$$g_v(\omega) = \frac{U_v^2}{4} \delta(\omega - \omega_v) + \frac{U_v^2}{4} \delta(\omega + \omega_v)$$

Az egyoldalas teljesítménysűrűség spektrum pedig:

$$G_v(\omega) = \frac{U_v^2}{2} \delta(\omega - \omega_v)$$

Célunk az AM jel teljesítménysűrűség spektrumának a moduláló jel hasonló jellemzőjére történő visszavezetése. Az AM-SC jel, azaz az oldalsávi tag egyenlete:

$$U_{\text{old}}(t_j; e_j; \varphi_v) = m \cdot s_1(t_j; e) \cdot U_v(t_j; \varphi_v)$$

Itt $U_{\text{old}}(t_j; e_j; \varphi_v)$ most egy sztochasztikus folyamat, amely e és φ_v valószínűségi változóktól függ. E két valószínűségi változóra egyenletes sűrűségfüggvényt tételezünk fel, mert csak így kapunk stacionárius folyamatot, amelyre a teljesítménysűrűség spektrum egyáltalán értelmezhető. A keresett $g_{\text{old}}(\omega)$ mennyiséget az $R(\tau)$ autokorrelációs függvényen keresztül fogjuk meghatározni. Az autokorrelációs függvény definíció szerint; ha $\tau = |t_1 - t_2|$

$$R_{\text{old}}(\tau) = \overline{u(t_1) \cdot u(t_2)} = \overline{m^2 \cdot s_1(t_{1j}; e) s_1(t_{2j}; e) u_v(t_{1j}; \varphi_v) u_v(t_{2j}; \varphi_v)}$$

Az e és φ_v sokaságátlagolás egymástól függetlenül végezhető, hisz e és φ_v független valószínűségi változók:

$$R_{\text{old}}(\tau) = \overline{m^2 s_1(t_{1j}; e) s_2(t_{2j}; e) \cdot u_v(t_{1j}; \varphi_v) u_v(t_{2j}; \varphi_v)}$$

Ebben viszont $R_1(\tau)$, ill. $R_v(\tau)$ autokorrelációs függvényekre ismerünk. Tehát:

$$R_{\text{old}}(\tau) = R_1(\tau) R_v(\tau)$$

Ezen összefüggés Fourier-transzformációjával nyerjük a keresett $g_{old}(\omega)$ -t:

$$g_{old}(\omega) = \mathcal{F}\{R_1(\tau) \cdot R_v(\tau)\}$$

Mivel $R_1(\tau)$ és $R_v(\tau)$ Fourier-transzformáltja egyaránt ismert: $g_1(\omega)$ és $g_v(\omega)$; a szorzat Fourier-transzformáltja konvolúcióval képzelhető. Végeredményül (3) alapján azt kapjuk, hogy

$$g_{old}(\omega) = m^2 \frac{U_v^2}{4} [g_1(\omega + \omega_v) + g_1(\omega - \omega_v)]$$

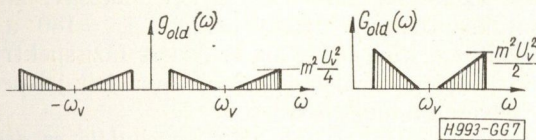
A 7. ábrából látható, hogy véletlen-változó moduláló jel esetén a teljesítménysűrűség spektrumokra is igaz az oldalsávszemlélet.

2.4 Az oldalsávképzés szabályai

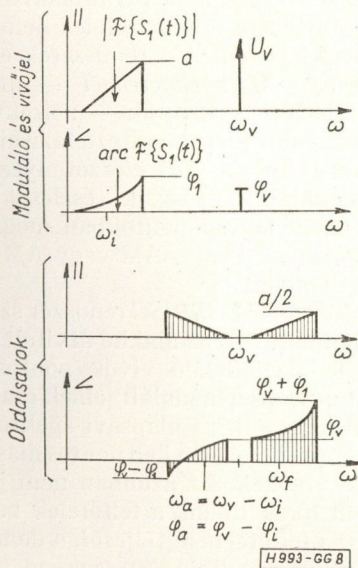
Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy mind determinisztikus, mind véletlen moduláló jelek esetében az AM-SC jel spektruma a moduláló jel segítségével képzett oldalsávokból áll. Itt jegyezzük meg, hogy bármelyik oldalsáv önmagában hordozza a moduláló jel teljes információ-tartalmát. Célszerű ezeket után összefoglalni az AM-SC jel egyoldalas (valós) spektrumának, vagyis az oldalsávoknak a képzési szabályait egyetlen koszinuszos vivő esetén (8. ábra).

1. A moduláló jel valamennyi komponense két komponensre eredményez az oldalsávi spektrumban (alsó és felső oldalsáv). E komponensek frekvenciája ω_v vivőfrekvencia és ω_i moduláló frekvencia esetén $\omega_f = \omega_v + \omega_i$, ill. $\omega_a = |\omega_v - \omega_i|$. (Az abszolútérték jelre azért van szükség, mert előfordulhat, hogy $\omega_i > \omega_v$.)

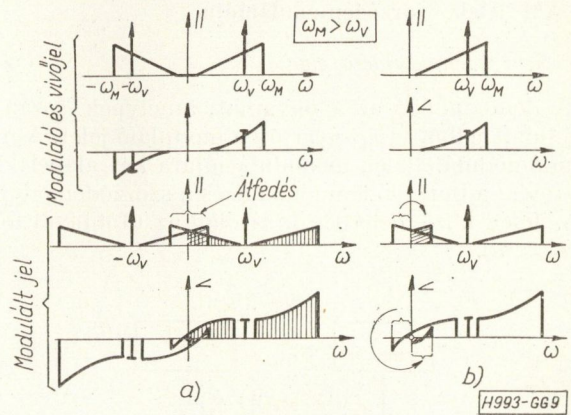
2. Az amplitúdó-spektrum szorzókonstanssal változik, amelynek értéke az alakhű átvitel szempontjából érdektelen.



7. ábra



8. ábra



9. ábra

3. A vivő fázisa és a moduláló jel fázisa a felső oldalsávnál összeadódik, az alsó oldalsávnál pedig kivonódik, mégpedig ugyanolyan értelemben, ahogy a frekvenciák, vagyis:

$$\varphi_f = \varphi_v + \varphi_i \text{ ill. } \varphi_a = [\text{sign}(\omega_v - \omega_i)](\varphi_v - \varphi_i)$$

(Utóbbi egyenlet azt jelenti, hogy $\varphi_a = \varphi_v - \varphi_i$, ha $\omega_v > \omega_i$, de $\varphi_a = \varphi_i - \varphi_v$, ha $\omega_v < \omega_i$.)

A fent rögzített szabályok *spektrumátfedés* esetében is érvényesek. Átfedés akkor jön létre, ha a moduláló jel spektrumának ω_M maximális frekvenciája nagyobb, mint az ω_v vivőfrekvencia, azaz a vivőfrekvencia a moduláló jel frekvenciasávjában helyezkedik el.

Az átfedés szemléltetésére felrajzoljuk erre az esetre is a kétoldalas spektrumokat! (9a ábra). Erről megállapíthatjuk, hogy az oldalsávok átfedik egymást, a moduláló jel különböző frekvenciájú komponensei adódnak össze. Ha áttérünk az egyoldalas spektrumra, akkor a pozitív ω_v körüli oldalsávokból a negatív frekvenciákra átnyúlt spektrumrészt az amplitúdó spektrum esetében *tengelyesen*, a fázisspektrum esetében pedig *középpontosan* kell tükröznünk (9b ábra). Ez a megállapítás mind a 9. ábra, mind a (4) összefüggés alapján következik. Az oldalsávképzés fent említett szabályainak pontos alkalmazásával a tükrözéssel létrehozott spektrum közvetlenül helyesen adódik.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az átfedés egyszer létrejön, már semmilyen módszerrel nem küszöbölhető ki többé, és lehetetlenné teszi a torzításmentes detekciót. A ténylegesen átvihető sáv csupán $\omega_M < \omega_v$ lehet.

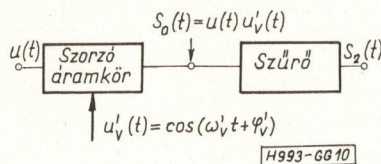
Egy további általánosítást tehetünk. Ha a vivő nem tiszta harmonikus rezgés, akkor könnyen kimutathatóan a vivőfrekvencia minden harmonikusa körül kialakulnak az oldalsávok; esetleg átfedés is létrejöhet az egyes vivőharmonikusokhoz tartozó oldalsávok között.

Az AM jel spektruma az oldalsávokon kívül a vivő spektrumát is tartalmazza, ábrázolásban tehát ezeket a spektrumvonalakat az oldalsávokhoz rajzoljuk. Ha a modulátor a moduláló jelre is kiegyenlített, akkor maga a moduláló jelspektrum is szerepel a modulátor kimenetén. Ilyenkor legfeljebb $\omega_v/2$ frekvenciájú jeleket engedhetünk meg a moduláló jelben az átfedés elkerülése érdekében. A továbbiakban minden AM jelről feltesszük, hogy mindennemű átfedéstől mentes.

3. AM jelek szorzódemodulációja

3.1 Szorzódemoduláció elve

A demoduláció az a folyamat, amelynek során a modulált jeltől visszanyerjük a moduláló jelet. Amplitúdómodulált jelek demodulációjára két alapelv ismeretes: a burkolódemoduláció és a szorzódemoduláció. Jelen közleményben kizárólag az utóbbival foglalkozunk.



10. ábra

Tekintsük először át a szorzódemodulátor elvét (10. ábra). Az ideális szorzódemodulátor a bemenetére érkező jelnek és a vivőhullám pontos másának szorzatát képezi és a szorzáskor keletkező nemkívánatos termékeket egy szűrővel eltávolítja. A szorzódemodulátorok felépítése megegyezik a szorzómodulátorok felépítésével.

3.2 Demodulációs torzítások

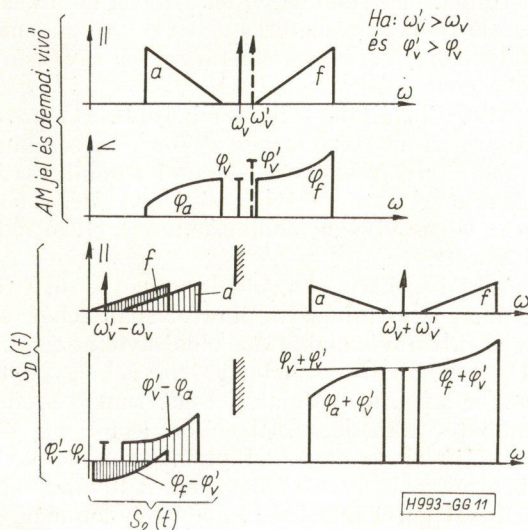
Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy milyen torzítás származik az adó oldali vivő pontatlan leutánzásából. Vizsgáljuk meg az $s_D(t)$ spektrumát, amelyet pontatlanul visszaállított $u_v'(t) = \cos(\omega_v't + \varphi_v')$ vivővel hozunk létre:

$$s_D(t) = u(t)u_v'(t)$$

$s_D(t)$ spektrumát megkapjuk, ha $u(t)$ AM jelet tekintjük „moduláló jelnek” és $u_v'(t)$ -t vivőnek. Képezni kell az oldalsávokat az ismert szabályok segítségével (11. ábra).

A létrejött frekvenciasávok körül a szorzó egységet követő aluláteresztő szűrő leválasztja az $\omega_v + \omega_v'$ frekvenciájú tagot, valamint az e körül elhelyezkedő oldalsávokat.

Az $s_2(t)$ demodulált jelet tekintve látjuk, hogy az eredeti moduláló jel két fekvésben, és átfedve jelenik



11. ábra

meg, tehát az $s_2(t)$ demodulált jel nem lesz alakhű mása az $s_1(t)$ moduláló jelnek. A szorzódemodulátor ilyen esetben teljesen hamis eredményt ad. Továbbá $|\omega_v' - \omega_v|$ frekvenciánál egy Dirac-függvény is létrejön az AM jel vivőfrekvenciás komponenséből.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a demoduláló vivő frekvencia- és fázishibája lehetetlenné teszi a demodulációt. A demodulációs torzítások tárgyalása szemléletes, ha felismerjük, hogy az $s_2(t)$ demodulált jel felfogható mint egy $\Delta\omega_v = |\omega_v' - \omega_v|$ frekvenciájú, $\Delta\varphi_v = [\text{sign}(\omega_v' - \omega_v)](\varphi_v' - \varphi_v)$ kezdőfázisú és U_v amplitúdójú virtuális vivőhullámnak az eredeti $s_1(t)$ moduláló jellel való AM modulációja, hiszen $s_2(t)$ spektruma $\Delta\omega_v$ körül két erősen átfedett oldalsávot (összevetve a 9b ábrával) és egy vivőt tartalmaz. Ezzel

$$s_2(t) = k[1 + s_1(t)] \cos(\Delta\omega_v t + \Delta\varphi_v). \quad (5)$$

Ezt az eredményt, természetesen az alapsávi spektrumok felírásával is megkaphatjuk, de a spektrumképből egyszerűbben származtatható.

Térjünk most vissza a demodulációs torzításokra. Mind a 11. ábra, mind a fenti (5) formula alapján megállapíthatjuk, hogy a torzításmentes demoduláció első feltétele a vivő és a demoduláló vivőfrekvenciáinak pontos megegyezése. Ebben az esetben a két oldalsáv amplitúdó spektruma fedésbe kerül, a Dirac-függvény eltűnik, tehát a demodulált jel (5) kifejezése:

$$s_2(t) = k \cdot s_1(t) \cos \Delta\varphi_v$$

alakra egyszerűsödik.

A demodulált jel láthatóan a fázishiba koszinuszával lesz arányos; amplitúdó csökkenés jön létre a fázishiba következtében. Ha történetesen $|\Delta\varphi_v| = |\varphi_v' - \varphi_v| = 90^\circ$, akkor $s_2(t) = 0$ adódik, tehát egyáltalán nem kapunk jelet a demodulátor kimenetén. Ennek fizikai oka az, hogy a két oldalsáv, mivel fázisuk között minden frekvencián $2 \cdot \Delta\varphi_v = 180^\circ$ a fáziskülönbség, kioltja egymást. A két fázisspektrum $\Delta\varphi_v = 0^\circ$ esetén kerül fedésbe, ekkor a két jelspektrum helyesen adódik össze.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a *moduláló és demoduláló vivőhullámnak frekvenciára és fázisra nézve pontosan meg kell egyeznie*. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy mit jelent ezen feltételek nem teljesítése a gyakorlatban használt AM rendszerek esetében.

Kétoldalsávú AM rendszereknél — amennyiben szorzódemodulációt használunk — a frekvenciahiba úgy tekinthető, mint időben változó fázishiba. Ennek következtében a koszinusz szorzótényező változni fog. Így a demodulált jel „lélegzik”, és $\Delta\omega_v + t\Delta\varphi_v = 90^\circ$, ill. 270° -nak megfelelő időpontokban meg is szűnik. Éppen ezért nagyon kényes AM vagy AM-DSB jelet szorzó elven demodulálni.

Az *egyoldalsávú AM-SSB/SC* rendszer szorzódemodulációra alkalmas, bár az alakhű átvitelt itt is csak a moduláló és demoduláló vivők pontos egyezése biztosítja. Itt ugyanis a modulált jelnek csak az egyik oldalsávjából képződik az alapsávi spektrum; tehát a kioltás szempontjából nem kell pontos másának lenni a demoduláló vivőnek. Ez azonban nem jelenti azt, hogy nem kell törekednünk a feltételek betartására.

Ha az $\omega_v = \omega_v'$ feltétel nem teljesül, a demodulált jel spektruma frekvenciaeltolódást szenved a moduláló jel spektrumához képest. A frekvenciahiba felborítja

az egyes komponensek harmonikus viszonyát, ami már zeneátvitelnél is problémát okozhat (disszonancia), nem beszélve az alakhű átvitel igénylő rendszerekben létrejövő torzításról. (Példaként megemlítjük, hogy a legtöbb vivőfrekvenciás rendszer teljesíti a CCITT frekvenciaeltolódásra maximálisan megengedett ± 2 Hz-es határát, ami már az alakhű átvitt kívánó adatátvitel szempontjából is gyakorlatilag megfelel.)

$$s_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t - \Delta\varphi) + A_3 \sin(3\omega_1 t - \Delta\varphi) = A_1 \sin\left[\omega_1\left(t - \frac{\Delta\varphi}{\omega_1}\right)\right] + A_3 \sin\left[3\omega_1\left(t - \frac{\Delta\varphi}{3\omega_1}\right)\right]$$

Láthatjuk, hogy a demodulált jelben az egyes komponensek különböző időeltolódást szenvednek; tipikus fázistorzított jelet kapunk, ami az alakhű átvitelt lehetetlenné teszi.

A demoduláló vivő pontos előállítására a belső átviteli úton kis szinten átküldött vivő segítségével, vagy egyéb más vivővisszaállítás technikával történhet. A további tárgyaláshoz feltételezzük, hogy a vevőben rendelkezésre áll a vevőbe érkező vivőhullám pontos mása, tehát a demoduláció torzításmentes.

4. Lineáris torzítások transzformációja

Ebben a szakaszban az AM rendszerek lineáris torzításainak transzformációját fogjuk meghatározni szorzódemodulátor esetére.

A torzítások transzformációjának értelmében a belső átviteli út

$$K(j\omega) = A(\omega)e^{-j\Psi(\omega)} \quad (6)$$

átviteli karakterisztikájából az ekvivalens alapsávi rendszer

$$K_a(j\Omega) = A_a(\Omega)e^{-j\Psi_a(\Omega)} \quad (7)$$

átviteli karakterisztikáját kell meghatároznunk ideális modulátort és demodulátort feltételezve.

4.1 Torzítástranszformáció szorzódemoduláció esetén

Vizsgálati módszerünk a következő lesz: egységnyi amplitúdó spektrumú, zérus fázisspektrumú fiktív jellel modulálunk és megvizsgáljuk a demodulált jelet. Ilyen vizsgáló spektrum választásával a demodulált jel magán fogja viselni a belső átviteli út hatását úgy, hogy az ekvivalens rendszer átviteli karakterisztikája kikövetkeztethető lesz.

Ha a fiktív $s_1(t)$ moduláló jelet ideális modulátorba vezetjük az $u_1(t)$ jelet kapjuk (12. ábra). A belső átviteli úton a $K(j\omega)$ átviteli karakterisztikának (6) megfelelően változik az $u_1(t)$ spektruma. Így a belső átviteli út végén az $u_2(t)$ modulált jel amplitúdó spektruma az amplitúdó karakterisztikával lesz arányos, fázisspektruma pedig $\varphi_v - \psi(\omega)$ -val lesz egyenlő (12. ábra).

A vétel helyén a szorzást a *megérkező* vivő pontos másával kell elvégeznünk, tehát figyelembe kell venni a vivő $\psi(\omega_v)$ késését. Így az ideális demoduláló vivő fázisa:

$$\varphi_{v_2} = \varphi_v - \psi(\omega_v).$$

Az $s_2(t)$ demodulált jel spektrumát az oldalsávképzés szabályaival határozzuk meg. Az AM jel két oldalsávjából két összegeződő alapsávi spektrumot

A $\Delta\varphi_v$ fázishiba hangátvitel esetén érdektelen, mivel az emberi fül érzéketlen a fázisviszonyokra. Azonban a létrejövő jelalaktorzulás tv, táviró stb. átvitelénél nem elhanyagolható torzítást hozhat létre. Ha például a moduláló jel:

$$s_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_3 \sin 3\omega_1 t$$

és a fázishiba frekvenciafüggetlenül $\Delta\varphi$, akkor

kapunk. Az $u_0(t)$ -ben levő felső oldalsáv esetében

$$\Omega = \omega - \omega_n$$

frekvencia transzformációval kapjuk az alapsávi amplitúdó spektrumot, tehát a fázisspektrum:

$$\begin{aligned}\Phi_{2f}(\Omega) &= [\varphi_v - \psi(\omega_v + \Omega)] - [\varphi_v - \psi(\omega_v)] = \\ &= \psi(\omega_v) - \psi(\omega_v + \Omega)\end{aligned}$$

Az alsó oldalsávnál

$$\Omega = \omega_n - \omega$$

frekvencia transzformációval képződik pozitív frekvenciájú alapsávi amplitúdó spektrum, így a fázispektrum

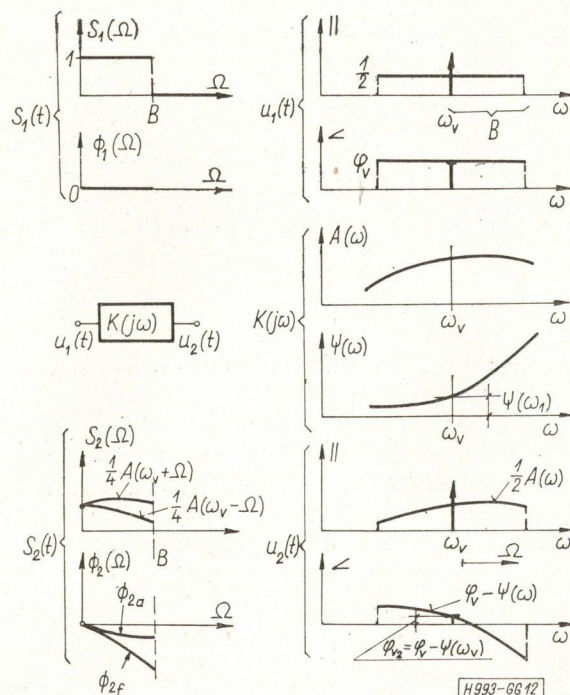
$$\begin{aligned}\Phi_{2a}(\Omega) &= [\varphi_v - \psi(\omega_v)] - [\varphi_v - \psi(\omega_v - \Omega)] = \\ &= \psi(\omega_v - \Omega) - \psi(\omega_v)\end{aligned}$$

alakú lesz.

A demodulált jel spektrumából — a moduláló jel-spektrum ismertében — az ekvivalens alapsávi átviteli karakterisztika (7) már meghatározható. Az amplitúdó karakterisztika definíciója alapján az amplitúdó spektrum

$$A_a(\Omega) = \frac{S_2(\Omega)}{S_1(\Omega)} = S_2(\Omega),$$

mivel $S_1(\Omega)=1$, az átvitt sávban.



12. ábra

A fáziskarakterisztika pedig

$$\Psi_a(\Omega) = -(\Phi_2 - \Phi_1) = \Phi_1 - \Phi_2$$

a (7) definíció alapján. Mivel $\Phi_1(\Omega) = 0$

$$\Psi_a(\Omega) = -\Phi_2(\Omega)$$

Tehát az alapsávi rendszer átviteli karakterisztikáját — speciális bemenő jel választással — a demodulált jel amplitúdó spektruma és fázisspektrumának (-1) -szerese adja meg.

A 12. ábrán látható $S_1(t)$ -hez és $S_2(t)$ -hez tartozó spektrumok alapján kimondhatjuk az alábbi igen fontos tételt: ha egy AM rendszerben csak a belső átviteli út nem ideális, és ennek torzításai lineárisak, akkor egy jel ezen AM rendszeren való áthaladása ekvivalens, két alapsávi rendszer ezen jelre adott válaszainak összegével. Az alapsávi rendszerek amplitúdó és fáziskarakterisztikái a fentiek alapján:

$$A_{a1}(\Omega) = \frac{1}{4} A(\omega_v + \Omega) \text{ és } \Psi_{a1}(\Omega) = \psi(\omega_v + \Omega) - \psi(\omega_v)$$

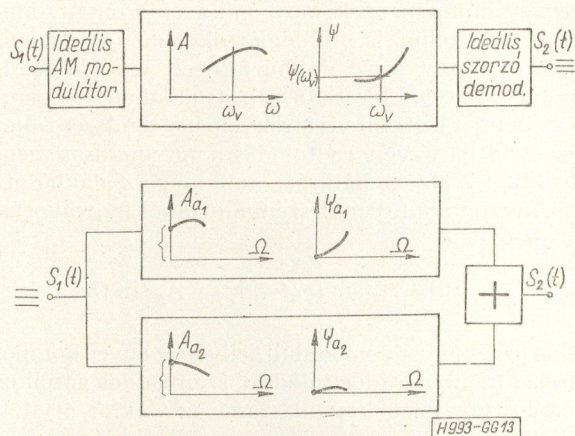
illetve:

$$A_{a2}(\Omega) = \frac{1}{4} A(\omega_v - \Omega) \text{ és } \Psi_{a2}(\Omega) = \psi(\omega_v) - \psi(\omega_v - \Omega)$$

Az 1/4-es szorzónak nincs jelentősége. A fenti feltételek szerinti AM rendszert ekvivalens alapsávi rendszer átviteli karakterisztikája tehát:

$$K_a(j\Omega) = A(\omega_v + \Omega)e^{-j[\psi(\omega_v + \Omega) - \psi(\omega_v)]} + A(\omega_v - \Omega)e^{-j[\psi(\omega_v) - \psi(\omega_v - \Omega)]} \quad (8)$$

A nyert eredményeket a 13. ábra szemlélteti. Ezzel általánosan megoldottuk a szorzó elven demoduláló AM rendszerek lineáris torzításainak transzformációját. Megjegyezzük, hogy a moduláció elve bármilyen lehet.



13. ábra

4.2 Szorzó AM rendszerek ideális átvitelének szükséges és elégséges feltétele

Az előző pontban kapott eredményekből kitűnik, hogy szorzó elven demoduláló AM rendszerek esetében a belső átviteli út lineáris torzításai a transzformáció során lineáris torzításokba mennek át. (Ez a szorzódemodulációnak igen nagy előnye a burkoló demodulációval szemben.) Így a lineáris alapsávi rendszerek ideális átvitelének feltételét kell teljesítenünk.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az AM rendszer átvitele ideális, ha a belőle transzformált két alapsávi rendszer együttesen ideális átvittel rendelkezik. Ez az AM rendszer ideális, alakhi átvitelének szükséges és elégséges feltétele szorzó demoduláció alkalmazása esetén.

A teljesség kedvéért megadjuk a két alapsávi rendszer együttes átviteli karakterisztikáját, vagyis az ekvivalens alapsávi rendszer $K_a(j\Omega) = A_a(\Omega)e^{-j\Psi_a(\Omega)}$ átviteli karakterisztikáját. A (8) összefüggésből trigonometrikus átalakítások után:

$$\begin{aligned} A_a(\Omega) &= \sqrt{A_{a1}^2(\Omega) + A_{a2}^2(\Omega) + 2A_{a1}(\Omega)A_{a2}(\Omega)\cos[\Psi_{a1}(\Omega) - \Psi_{a2}(\Omega)]} = \\ &= \sqrt{A^2(\omega_v + \Omega) + A^2(\omega_v - \Omega) + 2A(\omega_v + \Omega)A(\omega_v - \Omega) \cdot \cos[\Psi(\omega_v + \Omega) + \Psi(\omega_v - \Omega) - 2\Psi(\omega_v)]} \\ \Psi_a(\Omega) &= \arctg \frac{A_{a1}(\Omega)\sin\Psi_{a1}(\Omega) + A_{a2}(\Omega)\sin\Psi_{a2}(\Omega)}{A_{a1}(\Omega)\cos\Psi_{a1}(\Omega) + A_{a2}(\Omega)\cos\Psi_{a2}(\Omega)} = \\ &= \arctg \frac{A(\omega_v + \Omega)\sin[\Psi(\omega_v + \Omega) - \Psi(\omega_v)] + A(\omega_v - \Omega)\sin[\Psi(\omega_v) - \Psi(\omega_v - \Omega)]}{A(\omega_v + \Omega)\cos[\Psi(\omega_v + \Omega) - \Psi(\omega_v)] + A(\omega_v - \Omega)\cos[\Psi(\omega_v) - \Psi(\omega_v - \Omega)]} \end{aligned} \quad (9)$$

4.3 Speciális esetek

A továbbiakban sorra veszünk néhány fontos, speciális belső átviteli utat.

1. Első esetben tételezzük fel, hogy a belső átviteli út amplitúdó karakterisztikája szimmetrikus ω_v -re. Ekkor $A_{a1}(\Omega) = A_{a2}(\Omega)$, s az ekvivalens alapsávi rendszer amplitúdó és fáziskarakterisztikája a két alapsávi rendszer jellemzőivel kifejezve (9)-ből:

$$A_a(\Omega) = 2A_{a1} \cos \frac{\Psi_{a1}(\Omega) - \Psi_{a2}(\Omega)}{2}$$

$$\Psi_a(\Omega) = \frac{\Psi_{a1}(\Omega) + \Psi_{a2}(\Omega)}{2}$$

Amennyiben valamely Ω -nál $\Psi_{a1}(\Omega) - \Psi_{a2}(\Omega) = 180^\circ$, nincs átvitel $A_a(\Omega) = 0$.

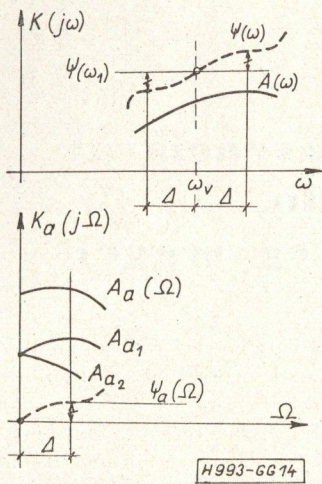
2. Ha a belső átviteli út fáziskarakterisztikája az $[\omega_v; \Psi(\omega_v)]$ középpontú koordináta-rendszerben páratlan függvény, akkor

$$\Psi_{a1}(\Omega) = \Psi_{a2}(\Omega) = \Psi_a(\Omega)$$

tehát az ekvivalens alapsávi rendszer (8)-ból:

$$\begin{aligned} K_a(j\Omega) &= [A_{a1}(\Omega) + A_{a2}(\Omega)]e^{-j\Psi_a(\Omega)} = \\ &= [A(\omega_v + \Omega) + A(\omega_v - \Omega)]e^{-j\Psi(\omega_v + \Omega) - \psi(\omega_v)} \end{aligned} \quad (10)$$

Eredményünket a 14. ábra szemlélteti: az alapsávi amplitúdó karakterisztikát az oldalsávokra ható amplitúdó karakterisztikák összege állítja elő.



14. ábra

Ha a belső átviteli út amplitúdó karakterisztikája még szimmetrikus is ω_v -re: két egyforma alapsávi rendszert kapunk.

4.4 Szorzó AM rendszerek ideális átvitelének elégséges feltétele

Előbbi eredményük birtokában megadhatjuk az AM rendszeren való ideális átvitel elégséges feltételét. Az ideális átvitel feltételei alapsávi rendszerre ismeretek:

$$A_a(\Omega) = K; \quad \Psi_a(\Omega) = \tau_0 \cdot \Omega$$

ahol K és τ_0 tetszőleges pozitív konstansok.

Feladatunk a belső átviteli út karakterisztikájának meghatározása. Feltételezve, hogy a fáziskarakterisztikája páratlan függvény, a fázisfeltétel biztosításához (10) alapján az szükséges, hogy

$$\Psi(\omega_v + \Omega) - \Psi(\omega_v) = \tau_0 \Omega$$

Látható, hogy a belső átviteli út megkövetelt fáziskarakterisztikája lineáris:

$$\Psi(\omega) = (\omega - \omega_v) \tau_0 + \Psi(\omega_v) = \omega \tau_0 + b_0$$

ahol $b_0 = \Psi(\omega = 0)$ tetszőleges konstans és $\Omega = \omega - \omega_v$ (15. ábra).

Ebben az esetben a két alapsávi rendszer amplitúdó karakterisztikája összeadódik (10), így a keresett feltétel ismét (10) alapján

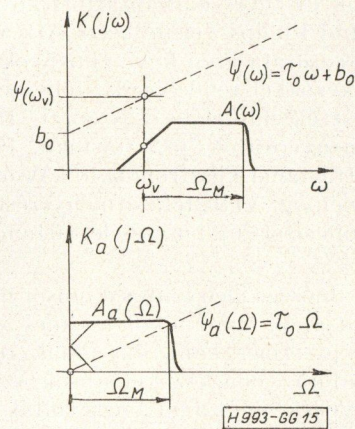
$$A(\omega_v + \Omega) + A(\omega_v - \Omega) = K$$

Tehát a szorzó AM rendszer alakhű átvitelének *elégséges feltétele* az, hogy a belső átviteli út fáziskarakterisztikája lineáris, azaz csoportfutási ideje konstans és a két oldalsávra ható amplitúdó karakterisztikáinak összege szintén konstans legyen. Megjegyezzük, hogy ha az átvendő alapsávi jel az $(\Omega_m \div \Omega_M)$ frekvenciatartományra korlátozott, akkor az amplitúdó feltételnek az $[(\omega_v - \Omega_M) \div (\omega_v - \Omega_m)]$ és $[(\omega_v + \Omega_m) \div (\omega_v + \Omega_M)]$ tartományokra kell teljesülni, a fázisfeltételnek pedig a fenti tartományok azon részére, ahol $A(\omega)$ zérustól különbözik.

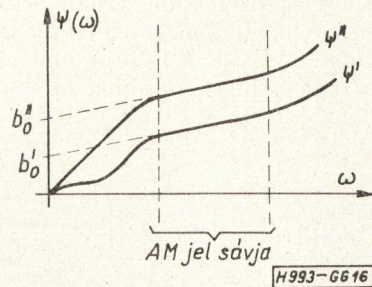
A most kimondott tétel alapján működhetnek szorzódemoduláció esetén ideálisan a csonkaoldalsávós (vestigial sideband) AM rendszerek, amilyen például a tv képcsatornája (15. ábra).

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy AM jeleket átvivő rendszerek esetén az ideális átvitel amplitúdó és fáziskarakterisztikában kifejtett feltétele enyhébb, mint alapsávi rendszerek esetén, hisz az amplitúdó karakterisztikában (az alsó és felső oldalsávra nézve komplementer) hullámosság a fáziskarakterisztikában pedig a konstans eltolás megengedett. Utóbbi feltétel alapján a 16. ábra mindkét tényleges fáziskarakterisztikája megfelelő.

Végezetül köszönetet szeretnék mondani Sallai Gyulának a dolgozatba beépített néhány igen értékes megjegyzéséért, továbbá a kézirat elkészítésében nyújtott sok segítségéért.



15. ábra



16. ábra

IRODALOM

1. Küpfmüller, K.: Die Systemtheorie der Elektrischen Nachrichtenübertragung — Hirzel Verlag, Stuttgart, 1949.
2. Ferenczy P.: Hírközlélmélet — Tankönyvkiadó, egyetemi jegyzet, kézirat, 1966.
3. Gordos G.: A hírközlés rendszerelmélete (statisztikus jel- és átvitelemélet) — A Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa, kézirat, 1969.
4. Gordos G.—Lajtha Gy.: Modulációs módszerek jellemzésének áttekintése — Posta Kísérleti Intézet közleményei, X. kötet, 1969.
5. Gordos G.: On the possibility of united description of modulation systems — Periodica Polytechnica, Electr. Eng., 1970. 1.

Korszerű, középfrekvenciával modulált televízióadó, félvezetős gerjesztő egységgel

ETO 621.39761.

A korszerű televíziós adóktól megkövetelik a jó minőségű színes átvitelt, megfelelő gazdaságos üzemelés mellett. Az adóhálózat gazdaságossága szempontjából fontos, hogy az üzemeltetés évi költsége alacsony legyen. Ebből a szempontból az adóra vonatkozólag a következő tényezők jelentősek: jó hatásfok, nagy megbízhatóság és kevés karbantartási követelmény.

A stockholmi Philips Teleindustri AB által gyártott tv-adók sorozata ezen követelmények kielégítésére a következőkkel rendelkezik: teljesen tranzistorizált gerjesztők, minimális csőszám, UHF-re alkalmas teljesítményerősítők, jó hatásfokú, 10 000 órás garantált élettartamú klisztronok 40 kW-os szinkron csúcsteljesítményig, VHF teljesítményerősítő, a Philips által kifejlesztett új, hosszú élettartamú teljesítménytetróda.

Az adójel minősége igen fontos a műsor nézőközönsége szempontjából. Ma, amikor a színes adást megkövetelik és jó színes kamerák állnak rendelkezésünkre, az adóra vonatkozó előírások szigorúbbak kell hogy legyenek, mint amilyenek voltak monokromatikus adásnál.

A tv-adó elvileg igen egyszerű. Egy frekvencia átalakítóból és egy erősítőből áll. Azonban nehézségek lépnek fel, ha egyidejűleg megköveteljük a jó színes átvitelt és a jó hatásfokot. A Philips adók ezen követelmények közti legjobb kompromisszum elérése cél-

jából középfrekvenciás (IF) modulációt használnak csónkaoldalsávú szűréssel és az IF moduláció utáni szinkronizálásokkal.

Az alábbiakban ismertetjük a korszerű, félvezetős, IF modulációs tv-adósorozat konstrukciós elveit.

A képfrekvenciás jel kialakítása

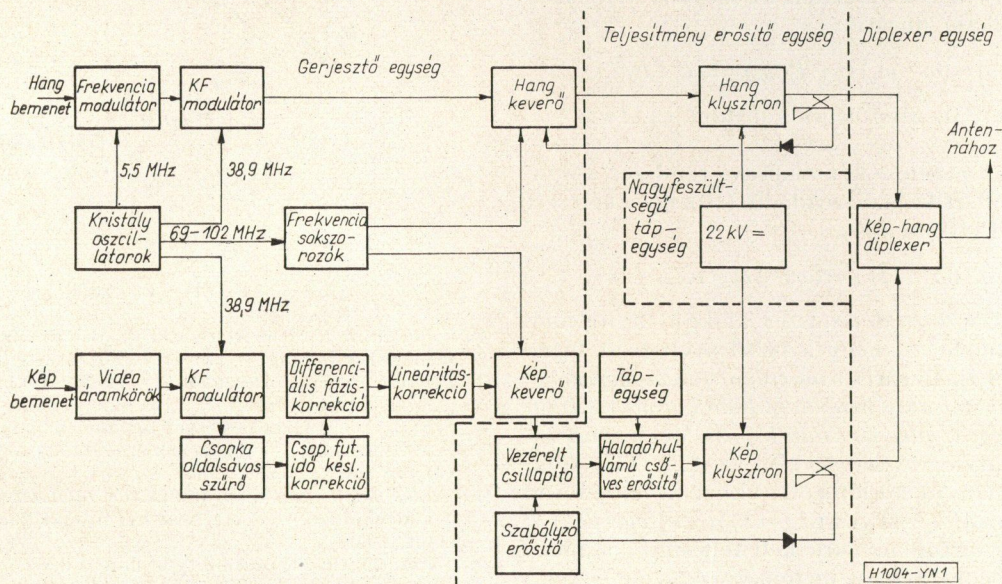
IF moduláció

Az IF modulációs tv-adóban a video jelet egy közepesen magas frekvenciájú, középfrekvenciás vivővel modulálják alacsony szinten (lásd az 1. és 2. ábrák blokkvázatait). A kívánt üzemi frekvenciát megfelelő átalakítóban keveréssel állítják elő.

A középfrekvenciát az I. sávra való tekintettel úgy kell megválasztani, hogy az I. sáv a legalacsonyabb fekvésű csatorna képvivője alatt legyen és második harmonikusa megfelelő mértékben felette legyen a sáv legmagasabb vivőfrekvenciájának.

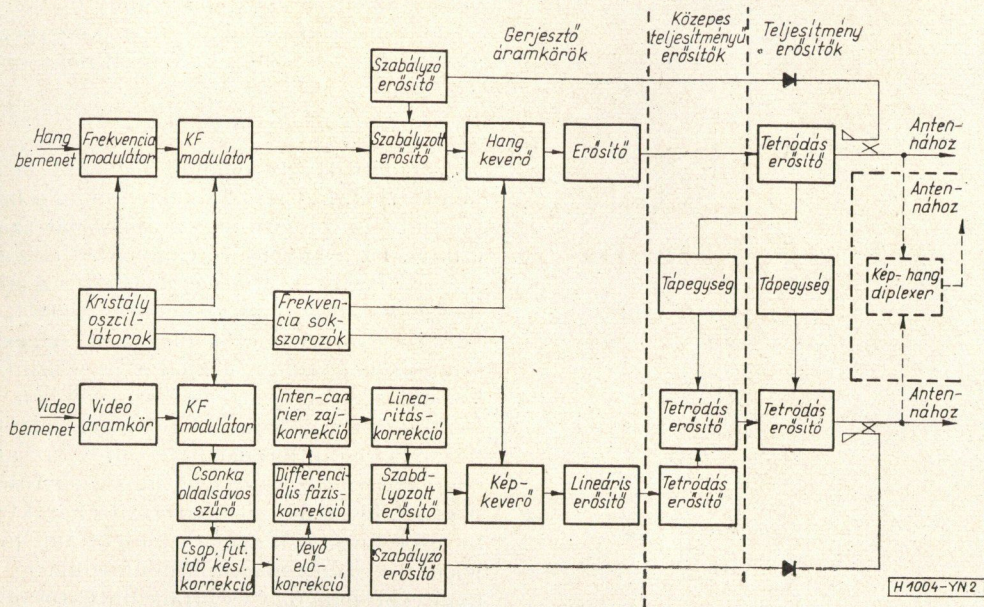
Modulátor

A video jel kialakítása után, ahol a szinkron regenerálás, fehér vágás és jelrögzítés történik, a jelet egy modulátorba táplálják be. Itt ezt szabványosított középfrekvenciával modulálják. A modulátor már áramkörénél fogva jó linearitással és frekvencia átvitellel rendelkezik. Ez lehetővé teszi a nullán átmenő



1. ábra. 5 és 10 kW-os VHF tv-adók blokkvázlata

A Svéd Műszaki Hét keretében elhangzott előadás. Magyarra átdolgozta: Szabó Ilona.
Beérkezett: 1970. I. 28.



2. ábra. 40 kW-os UHF adó blokvázlata

modulációt, nulla és szinkroncsúcs között 0,98-nál jobb szinkronitással. Ezen típusú modulátorok másik fontos tulajdonsága, hogy differenciális fázisforgatásuk elhanyagolható.

Csonkaoldalsávok szűrő

A középfrekvenciás modulátor után a képjelet be- táplálják egy csonkaoldalsávok szűrőbe, amely így a középfrekvencián alacsony teljesítményszinten működik. A szűrő nyomtatott áramkörös kivitelű.

Csoportfutási időkorrekció

A csoportfutási időhibákat, amelyeket főleg a csonkaoldalsávok szűrő okoz néhány más áramkörrel együtt, az adóban korrigálják egy aktív mindent áteresztő szűrővel, amelyet visszacsatolás alkalmazásával a lehető legnagyobb stabilitásúra terveztek.

A középfrekvencián történő szinkronizációk előnyének megvilágítására először vizsgáljuk meg a csonka-

oldalsávok szűrő csoportfutási időkarakterisztikájának következményeit. Ha a csoportfutási idő a vívó környezetében lineárisan változik, nemkívánatos AM—PM átalakítás jön létre (intercarrier zaj). Ha ez a karakterisztika a vívó közelében erősen görbült, amint a 3. ábrán bemutatjuk, egyenetlen csoportfutási időváltozás lép fel az alacsonyfrekvenciás tartományban, ezt Nyquist vevővel megmérve a bemutatott eredményhez jutunk.

A közvetlen modulációnál a csonkaoldalsávok szűrő és egyéb részek csoportfutási időhibájának korrekcióját a video alapjelen végzik, még a jelnek a vívóval történő modulálása előtt.

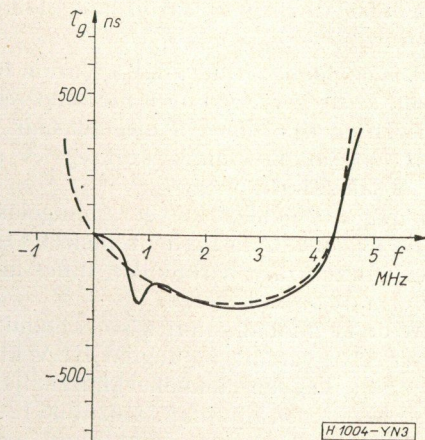
A csonkaoldalsávok szűrő a vívó környezetében mindig fázishibákat hoz be, amelyek a vívó két oldal- sávjában nem szimmetrikusak. Video jelnél a csoportfutási időkorrekció csak szimmetrikus jellegű és így a csonkaoldalsávok szűrő hatása szempontjából csak bizonyos fokig eredményes.

Ha a fáziskorrekciókat modulálás után végezzük el, amely könnyen megoldható az IF modulációs technikában, a csonkaoldalsávok szűrők által okozott csoportfutási időhibákat teljesen korrigáljuk.

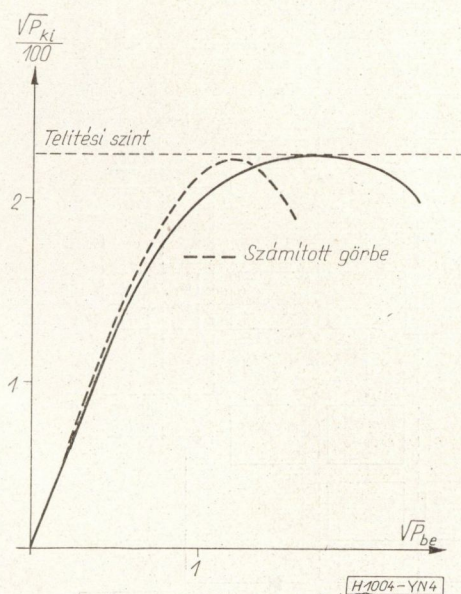
Linearitás és differenciális erősítés

A linearitás és a differenciális erősítés korrekcióját a modulált, csonkaoldalsávok szűrőn átjutó jelen a középfrekvencián végzik.

A jó hatásfokot minden teljesítményerősítőnél meg- követelik. Ez azt jelenti: a csöveket úgy működtet- jük, hogy a jel a csőkarakterisztika nonlineáris tarto- mányára is átnyúlik. Nyilvánvalóan a korrekciós rendszert úgy kell megtervezni, hogy működése a le- hető legjobban megközelítse a maximális hatásfokot egészen a telítésig. Ennek a fontossága világos, ami- kor az üzemeltetés 4000 h/év és a váltóáramú teljesít- mény ára 0,1 SvK/kWh, ez pedig 8000 SvK külön- évi költséget jelent 20 kW-onként (SvK=svéd ko- rona). Körülbelül 4 év alatt, ami a 40 kW-os képszi- tron várható élettartama, a megtakarítás egy új klsztron árát teszi ki.



3. ábra. Szaggatott vonal: csonkaoldalsávok szűrő csoport- futási-idő karakterisztikája egy oldalsávval mérve. Folytonos vonal: csonkaoldalsávok demodulátor utáni csoportfutási-idő karakterisztika kétoldalsávok jellel mérve



4. ábra. A kimenőteljesítmény a bemenőteljesítmény függvényében, UHF klisztronos tv-adóknál

A linearitás korrekció elvileg igen egyszerű. Az IF áramkörökben a teljesítményerősítő karakterisztikájának inverz alakját alkalmazzák. Ebben az esetben nagyon fontos, hogy ne legyen sávszűkítés a korrekció és a korrigált nonlinearitás között. A fázisment szintén lineáris kell, hogy legyen. Ennek egyszerűsített magyarázata a következő: a linearitás korrektorban keletkezett intermodulációs termékek pontosan ki kell hogy oltsák azokat, amelyek a teljesítményerősítőben jönnek létre. Egyébként az a jól ismert jelenség léphet fel, amit „az alsó oldalsáv újrabetéplálásának” neveznek.

Ha másrészt a video jelnél és a csónkaoldalsáv szűrésnél alkalmaztak korrekciókat, a teljesítményerősítő előtt, ami UHF klisztronos adóknál igen általános, a vivő közelében, ahol mindkét oldalsáv jelen van, a korrekciók kétszer olyan nagyok, mint a sáv többi részében. Ilyen esetekben frekvenciafüggő linearitás korrekció szükséges.

IF modulációs rendszerben, ahol a linearitás korrekciót csónkaoldalsáv szűrés után végzik el, az intermodulációs termékek teljes elnyomása érhető el. Itt nincs szükség frekvenciafüggő korrekcióra.

RF keverők

A linearitás korrekció után a jelet RF átalakítóba táplálják be, ahol az alsó oldalsávot használják fel. UHF-en varaktoros keverőt, míg VHF-en tranzistoros keverőt használnak, amelyet lineáris, teljesen félvezetős erősítők követnek. Ezután a jelet csöves teljesítményerősítőbe táplálják be. Az alábbiakban ezeket részletesebben ismertetjük.

Hangfrekvenciás jel

A hangfrekvenciás jel kialakítása oly módon történik, hogy kiváló minőségű és kistorzítású sztereo átvitelt is lehetővé tesz. Közvetlen FM modulációt használnak. A hangfrekvenciás jelet először „interier jcarrellel” modulálják, azután keverik az IF vivő-

vel, így áll elő a képjel alatti, hangfrekvenciának megfelelő, középfrekvencia. Ezután következik a jel átalakítása és betáplálása a teljesítményerősítőbe.

Kimenőteljesítmény stabilitás

Az adóban a kimenőteljesítményt konstans értéken tartják. Ezt mind a képjel, mind a hangjel szempontjából automatikus visszacsatolás szabályozással érik el. Ez a következő előnyökkel jár, amelyek különösen fontosak a színes adásnál: az adó rövid felmelegedési ideje: mind a hőmérséklettől, mind az alkatrészek öregedésétől független színes átvitel; a szinkron/kép arány, a kioltás és a szinkron szintek konstansak, ami a vevőkészülékekben változatlan kontrasztot és színes telítettséget jelent; konstans linearitás és differenciális erősítés; az alsó oldalsáv elnyomás változatlansága; annak lehetősége, hogy az üzemeltetés a teljesítményerősítő karakterisztikájának kevésbé lineáris részén történjék, ami jó hatásfokot jelent; a szinkron amplitúdómoduláció elnyomása; könnyebb hangolás és újrabeteállíthatóság.

A képcsatorna rádiófrekvenciás kimenőteljesítmény szabályozása a blokkmán bemutatottak szerint történik (1. és 2. ábra). Az iránycsatolóban a kimenőteljesítményből mintákat vesznek és azután detektálják. Az automatikus visszacsatoló hurok a kioltási szintet konstans értéken tartja. A detektált kioltási szint referencia feszültséggel kerül összehasonlításra. A kimenőteljesítményt a szabályozó erősítő tartja konstans értéken, amelyben az erősítés a feszültséggel változik.

Teljesítményerősítők

UHF adók

Az UHF tv-adóknál teljesítményerősítőként klisztronokat használnak. Ennek okai a következők: nagy megbízhatóság és a katasztrofális hiba kis valószínűsége, nagyobb az erősítés és így lehetséges csupán két csöves adókat építeni, egyszerű táplálás, 40 és 25 kW-os adóknál a kimenőteljesítmény szolgáltatására két vagy több teljesítménytetródás erősítő párhuzamos üzemeltetése lenne szükséges.

Két megoldás van egy klisztron hangolóüregének kialakítására:

Az egyik megoldás szerint, amit a Varian használt az USA-ban, az üregek a vákuum burkolat részét képezik (belső üregek). Ennek a megoldásnak előnye, hogy érintkezőcsapokra nincs szükség és erősebb konstrukció valószínűsíthető meg.

A külső üreges megoldás előnyei: a hangolás sokkal flexibilisebb és jobb hatásfokú üzemelést tesz lehetővé, nincs vákuumzáró harmónika, nincs impedancia transzformátor a kimeneten.

A 40 kW-os tv-adóban, amit a stockholmi Philips Teleindustri AB gyártott, az angliai EEV klisztronjait (vagy ezekkel egyenértékűket) használják. Ezek a csövek külső üreges típusúak. Közülük 12-öt szállítottak a Svéd Távközlési Igazgatóságnak a most kiépült második svéd tv-hálózathoz, amely főleg 40 kW-os UHF adókkal rendelkezik. A klisztronok garantált élettartama 10 000 óra.

VHF adók

A VHF tartományban a klisztronok kedvezőtlen méretűek. A szükséges teljesítmény és a frekvencia is kisebb, így lehetséges jó hatásfokú és megbízható hosszú élettartamú tetródák tervezése. A Philips cég modern tetróda csősorozatot fejlesztett ki VHF adókhoz.

A Philips VHF tv-adócsalád a tiszta félvezetős technikát használja a jelenleg lehetséges legnagyobb teljesítményre. Ezután a teljesítményt a tetródás teljesítményerősítők tovább növelik. A tervezésükhöz az UHF-en történő fejlesztés adott új szempontot. Ugyanaz a fejlesztő laboratórium dolgozta ki mind a teljesítményerősítő tetródasorozatot, mind pedig a csatlakozó áramköröket, amelyek üregek formájában vannak beépítve. Így a csövek és az erősítők a következő tulajdonságokkal rendelkeznek: alacsony bűgási szint, B osztályú üzemben jó hatásfok, nagy telítési teljesítmény, jó linearitás és alacsony szinkronjel kompresszió, stabil üzemelés anélkül, hogy a hangolást a hőmérséklet befolyásolná, a földelt rácsú üzemeltetésnél nincs szükség neutralizálásra, nagy teljesítményerősítés, kis méretek, gyors felfűtésű katód típusok, amelyek csak néhány másodperces felfűtési időt igényelnek.

A csőcsere elvégezhető anélkül, hogy az erősítő hangolását befolyásolnánk.

Az I. sávban a teljesítményerősítők előlapján ajtó van a csőcsere elvégzésére. A többi üreget el lehet dönteni, vagy kicsúsztatni úgy, hogy a csövek gyorsan és könnyen cserélhetők felülről.

Felügyeletlen működés és távvezérlés

Napjainkban minden országban hiány van műszaki felkészültséggel rendelkező dolgozókkal, ezért a modern tv-adót úgy kell megépíteni, hogy alkalmas legyen felügyeletlen üzemeltetésre, távvezérlésre és helyi vezérlésre egyaránt. A Philips tv-adók ebből a szempontból magas színvonalat képviselnek. Teljesen automatikus indítási sorrenddel és egy „három lépéses” újraindító logikai áramkörrel rendelkeznek. Indikátorlámpák jelzik a kikapcsolást, ami a hibakeresést megkönnyíti. A lámpák nincsenek kikapcsolva, amikor az adó leáll. A mindenre kiterjedő műszerezettség az ellenőrzésre és a karbantartás megkönnyítésére szolgál.

A redundancia felhasználásával megnövelt megbízhatóság

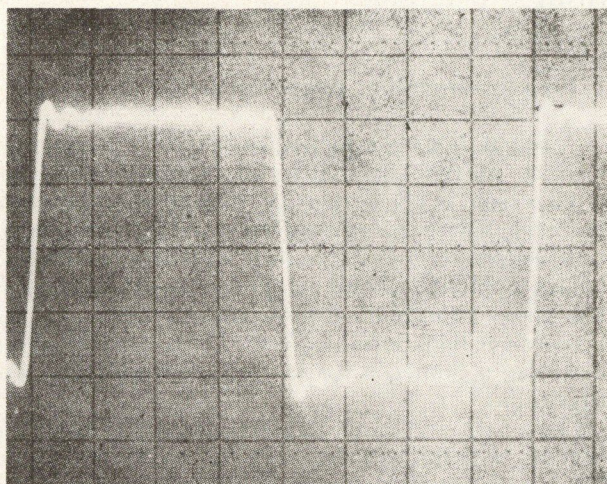
Sok területen, ahol nagy a népsűrűség a tv-adás megszakítása nem megengedhető. A Philips cég a tv-adókat vagy aktív (parallel üzem), vagy passzív tartalékkal készíti.

Parallel üzemeltetésnél automatikus fázis szabályozást alkalmaznak a stabil üzemeltetés és a jó színminőség biztosítására. Ilyen üzemelési módnál kétszeres teljesítményt, teljes redundanciát és maximális sugárzási időt kapunk. Az egyik adó meghibásodása esetén a teljesítmény 6 dB-el csökken, ami a primer ellátási területen alig észrevehető, és nem lép fel adás-kiesés.

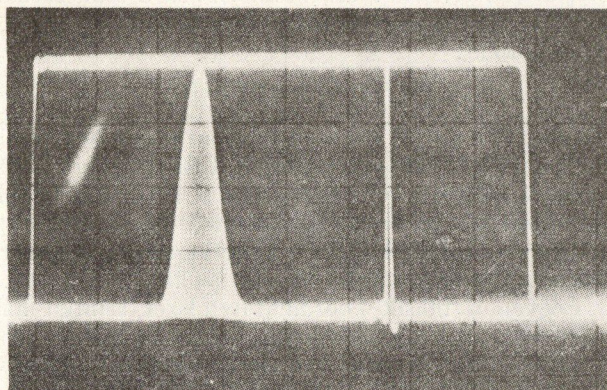
A passzív tartalékadó használata adja a másik redundancia lehetőséget.

Az átkapcsolás lehet teljesen automatikus. A sugárzásból kieső idő függ az katódok felfűtési idejétől. A VHF adókban gyors felfűtésű katódokat használnak, ami néhány másodperces felfűtési időt jelent. A klisztronok felfűtési ideje 2–5 perc között van.

A passzív tartalék előnyei: alacsonyabb csövköltség, egyszerűbb berendezés.



a)



b)

H 1004-YN 5

5. ábra. a) 250 kHz-es négyszögjel átvitel, b) impulzus és színsáv átvitel

Mért működési jellemzők

Az 5. ábra mutatja egy, jelenleg Svédországban a posta kezelésében levő második tv-hálózatban működő 40 kW-os UHF tv-adó mért működési jellemzőit. Bemutatja az impulzus és a színsáv átvitelt és egy 250 kHz-es négyszög hullám átvitelét. Ez a két mérés bemutatja a leglényegesebb működési jellemzőket mind a színes, mind az egyszínű adásnál.

Színmértani számítások módszerei

ETO 535.64

A színes televízió és annak ipari felhasználása a szín-mértani számítások területén is újabb problémákat vet fel. Ezen problémák áttekintéséhez és megoldásához a mátrixkalkulus és az ortogonális színkeverési görbék bevezetése és felhasználása igen előnyösnek látszik.

1. Koordinátarendszer transzformáció

A célból, hogy a színek ábrázolását és a színekkel végzett műveleteket más, tetszőleges koordináta-rendszerben is elvégezhessük, s hogy a koordináta-rendszer váltására egyszerűen áttekinthető eljárásunk legyen, célszerű a vektor- és tenzoralkgebra, valamint a mátrixkalkulus alapján a következőkben az általános koordináta-transzformáció idevonatkozó kérdéseivel foglalkozunk [5, 6, 7, 8]. Természetesen kizárólag a homogén lineáris transzformációkra szorítkozunk.

Legyen az egyik koordinátarendszer háromméretű, egyenes vonalú, általános (tehát nem feltétlenül ortogonális) rendszer, amelynek egységvektorai $[A]$, $[B]$ és $[C]$ -vel jelölt vektorok. Ebben a rendszerben egy $[S]$ vektor következőképp fejezhető ki az egységvektorokkal:

$$[S] = a[A] + b[B] + c[C]$$

ahol a , b , c az $[S]$ vektor koordinátái az adott rendszerben. (A továbbiakban ezt nevezzük „rég” rendszernek.) Mivel a betű feletti vonás a színelméletben az átlagérték jelölésére használatos, így a vektorok jelölésére a továbbiakban is következetesen megtartjuk a szögletes zárójellel történő jelölést.

Legyen a másik koordinátarendszer szintén három méretű, egyenes vonalú, általános (tehát nem feltétlenül ortogonális) rendszer, amelynek egységvektorai $[F]$, $[H]$ és $[N]$ -nel jelölt vektorok. Ebben a rendszerben egy $[S]$ vektor a következőképp írható fel:

$$[S] = f[F] + h[H] + n[N],$$

ahol f , h , n az $[S]$ vektor koordinátái az adott rendszerben. A továbbiakban ezt nevezzük új rendszernek.

Természetesen kizárjuk azt a lehetőséget, hogy akár $[A]$, $[B]$, $[C]$, akár $[F]$, $[H]$, $[N]$ vektorhármass egy síkba essen. Tegyük fel, hogy a két rendszer viszonya meghatározott oly módon, hogy a régi rendszerben az új rendszer egységvektorai adottak, azaz:

$$[F] = m_{fa}[A] + m_{fb}[B] + m_{fc}[C]$$

$$[H] = m_{ha}[A] + m_{hb}[B] + m_{hc}[C]$$

$$[N] = m_{na}[A] + m_{nb}[B] + m_{nc}[C]$$

Az előbbi három egyenletben az indexelt m -ek koordináták, amelyek mint rendezett skalárok mátrix alakban is felírhatók és ha a rendszer egységvektorait is oszlopvektorokként írjuk fel, akkor a fenti három egyenlet mátrixalkja az alábbi lesz:

$$\begin{bmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{bmatrix}, \quad (1)$$

ahol

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{fa} & m_{fb} & m_{fc} \\ m_{ha} & m_{hb} & m_{hc} \\ m_{na} & m_{nb} & m_{nc} \end{bmatrix},$$

azaz kilenc koordinátával adott. Meg kell jegyezni, hogy az oszlopmátrix elemei nem csak skalárok, hanem vektorok is lehetnek. Ez az írásmód ugyan nem elégíti ki azt az általános definíciót, amely szerint a mátrix skalár számok rendezett együttese, elvileg azonban nem kifogásolható és jelen esetben igen praktikus.

A mátrixegyenlet jobb oldalán kijelölt szorzás elvégzése után a két mátrix egyenlőségének kritériuma alapján szétesik az egyenlet három — az új egységvektorokat definiáló — egyenletté. A fenti mátrixegyenlet a homogén lineáris transzformáció egyik szokásos megjelenési formája.

Természetesen a két rendszer viszonyát ugyanígy meghatározhatjuk, ha a régi egységvektorokat fejezzük ki az új rendszer koordinátáival. A két rendszer egységvektorainak előbbi összefüggését ismerve, ez utóbbit egyszerűen nyerhetjük a következő mátrixegyenletből:

$$\begin{bmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{bmatrix} = [M]^{-1} \begin{bmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ahol $[M]^{-1}$ az $[M]$ mátrix inverze.

Miután az egységvektorok összefüggését mátrixegyenletek alakjában felírtuk, vizsgáljuk meg, hogy adott egységvektor-transzformáció esetén egy tetszőleges vektor koordinátái hogyan transzformálódnak. Keressük meg tehát adott $[S]$ vektor koordinátáit az új koordináta rendszerben, ha ismerjük az új egységvektorokat a régi függvényében, valamint ismerjük $[S]$ koordinátáit a régi koordináta rendszerben.

Ismert tehát az

$$\begin{bmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{bmatrix} = [M] \cdot \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletből $[M]$ kilenc eleme, valamint az

$$[S] = a[A] + b[B] + c[C]$$

egyenletből a , b , c vektor-koordináták.

Keressük az

$$[S] = f[F] + h[H] + n[N]$$

egyenletből az f , h , n vektor-koordinátákat; azaz keressük a vektor három adott irányba történő felbontását. Ez a reciprok vektorhármassok bevezetése útján lehetséges.

Definiáljuk az $[F]_r$, $[H]_r$ és $[N]_r$ reciprok vektorhármast, amelynek tulajdonsága, hogy

$$[F] \cdot [F]_r = [H] \cdot [H]_r = [N] \cdot [N]_r = 1$$

skalár szorzat eredményt ad, valamint

$$[F]_r \cdot [H] = [F]_r \cdot [N] = [H]_r \cdot [N] = [H]_r \cdot [F] =$$

$$[N]_r \cdot [F] = [N]_r \cdot [H] = 0.$$

Így az

$$[S] = f[F] + h[H] + n[N]$$

egyenletet egymásután végigsorozva $[F]_r$, $[H]_r$ és $[N]_r$ vektorokkal, megkaphatjuk a keresett koordinátákat, vagyis:

$$f = [S] \cdot [F]_r$$

$$h = [S] \cdot [H]_r$$

$$n = [S] \cdot [N]_r$$

A reciprok vektorhármass képzése az ismert módon $[F]$, $[H]$, $[N]$ vektorhármassból:

$$[F]_r = \frac{[H] \times [N]}{[F][H][N]}$$

$$[H]_r = \frac{[N] \times [F]}{[F][H][N]}$$

$$[N]_r = \frac{[F] \times [H]}{[F][H][N]},$$

ahol a számláló vektorszorzatot és a nevező vegyeszorzatot jelent. Így a keresett koordináták:

$$f = \frac{[S][H][N]}{[F][H][N]}$$

$$h = \frac{[F][S][N]}{[F][H][N]}$$

$$n = \frac{[F][H][S]}{[F][H][N]}$$

amelyek vegyeszorzatok, vagyis determinánsok hányadosai. $[S]$ és $[F]$, $[H]$, $[N]$ is ismert a régi koordinátákban. A fenti műveletek elvégzése teljesen meg egyezik azzal, mintha az $\|M\|$ mátrix transzponáltjának inverzét készítenénk el sorról sorra, azaz írható, hogy

$$\begin{pmatrix} f \\ h \\ n \end{pmatrix} = \|M\|^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \quad (3)$$

A jobb oldali mátrixszorzás elvégzése után a mátrixok egyenlőségének kritériuma alapján három egyenletet kapunk, amelyek most az új koordinátákat adják meg a régi koordináták függvényében.

Míg tehát az egységvektorok $\|M\|$ mátrix alapján transzformálódnak, addig a koordináták $\|M\|^{-1}$ mátrix szerint transzformálódnak. Amennyiben a régi és az új koordinátarendszerünk is derékszögű, azaz ortogonális transzformációkkal van dolgunk, akkor bizonyítható, hogy az $\|M\|$ mátrix transzponáltja és inverze megegyezik, azaz

$$\|M\|^{-1} = \|M\|_t,$$

így

$$\|M\|^{-1} = \|M\|.$$

Tehát a tenzorkalkulus egyik alaptételét nyerjük, amely szerint ortogonális transzformáció esetén a koordináták ugyanúgy transzformálódnak, mint az egységvektorok. Ugyanezen esetben az $\|M\|$ mátrix determinánsa invariáns ad:

$$\det \|M\| = \pm 1$$

(az előjel a koordinátarendszer irányításától függő).

Az eddigiekben megvizsgáltuk azt, hogy a vektorok hogyan írhatók le különböző koordinátarendszerekben. A teljesség kedvéért felírjuk azt is, hogy egy rendszeren belül homogén lineáris vektor-transzformációt nyújtó $\|t\|$ mátrix hogyan írható fel egy másik koordináta rendszerben.

Legyen a régi rendszerben a homogén lineáris vektor-transzformáció mátrixa $\|t\|$.

Legyen ebben a rendszerben $\|u\|$ a független változó vektorának koordinátáiból alkotott oszlop-mátrix és $\|v\|$ a transzformált vektor koordinátáiból alkotott oszlop-mátrix, azaz

$$\|u\| = \|t\| \cdot \|v\|.$$

Legyen $\|M\|$ az egységvektorok transzformációjának mátrixa.

Legyen $\|u\|$ oszlopvektor mátrixa az új rendszerben $\|U\|$ és legyen $\|v\|$ oszlopvektor mátrixa az új rendszerben $\|V\|$.

A transzformált vektorok közt az összefüggést most $\|T\|$ mátrixal jelöljük, azaz

$$\|U\| = \|T\| \cdot \|V\|.$$

Keressük a $\|T\|$ mátrixot a $\|t\|$ mátrix és az $\|M\|$ rendszerváltó mátrix ismeretében.

Felírva a vektorok transzformációs egyenletét, egyszerűen nyerjük, hogy

$$\|T\| = \|M\|^{-1} \cdot \|t\| \cdot \|M\|. \quad (4)$$

Ha nem általános, hanem ortogonális rendszer-transzformáció esete áll fenn, akkor $\|T\|$ következőképp is írható

$$\|T\| = \|M\|_t \cdot \|t\| \cdot \|M\|.$$

Végezetül összefoglaljuk a transzformációs képleteket egységvektorok és koordináták tekintetében, bejelölve az $\|M\|$ mátrixon végzendő műveleteket („-1” inverz mátrix képzést és „t” transzponálást szimbolizál).

$$\begin{pmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{pmatrix} = \|M\| \begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{„-1”, „t”}} \begin{pmatrix} f \\ h \\ n \end{pmatrix} = \|M\|^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \updownarrow \\ - „1” \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \text{„1”} \\ \searrow \text{„1”} \end{array} & \begin{array}{c} \updownarrow \\ - „1” \end{array} \\
 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\|^{-1} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{N} \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\text{„-1”, „1”}} \\ \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\|_t \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} f \\ h \\ n \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \quad (5)$$

2. Színrendszerek vizsgálata

Azonos referencia-fehér szín esetének vizsgálata

Az $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ vektorokra mint alapszínekre épülő koordináta-rendszer, illetve színrendszer és az $[\mathbf{F}]$, $[\mathbf{H}]$, $[\mathbf{N}]$ vektorokra mint alapszínekre épülő koordináta-rendszer, illetve színrendszer között $\|\mathbf{M}\|$ adja meg az összefüggést, definiálva $[\mathbf{F}]$, $[\mathbf{H}]$, $[\mathbf{N}]$ alapvektorokat, illetve alapszíneket, az $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ alapvektorok, illetve alapszínek révén, azaz

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{N} \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\| \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \right]$$

Milyen jellemző, általános tulajdonsága van $\|\mathbf{M}\|$ mátrixnak? Mivel az alapvektorok, alapszínek közti összefüggést foglalja magában, így az ezekre tett kikötések jelentkeznek az $\|\mathbf{M}\|$ mátrixban. Egy eléggé általános és praktikus konvenció, hogy különböző színrendszerek esetében is azonos referencia-fehér szint szokás választani. A klasszikus színmértanból szintén közismert az az általános és praktikus konvenció, mi szerint az alapszínek összege a referencia fehéret adja. Fenti feltételek mellett

$$[\mathbf{F}] + [\mathbf{H}] + [\mathbf{N}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}] + [\mathbf{C}].$$

Ebből következik, hogy az $\|\mathbf{M}\|$ mátrix oszlopainak ki kell elégíteniük az alábbi feltételeket:

$$m_{11} + m_{21} + m_{31} = 1$$

$$m_{12} + m_{22} + m_{32} = 1$$

$$m_{13} + m_{23} + m_{33} = 1.$$

Vagy mátrix alakban

$$\|\mathbf{M}\|_t \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]
 \end{array} \quad (6)$$

Ugyancsak egyszerűen belátható, hogy az

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\|^{-1} \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{N} \end{array} \right]$$

egységvektorok transzformációját megadó egyenletben, az

$$[\mathbf{A}] + [\mathbf{B}] + [\mathbf{C}] = [\mathbf{F}] + [\mathbf{H}] + [\mathbf{N}]$$

feltétel kielégítése miatt, az $\|\mathbf{M}\|^{-1}$ mátrix oszlopain szereplő tagok összegének szintén 1-nek kell lennie.

Ha a (6) egyenlet mindkét oldalát bal oldalról $\|\mathbf{M}\|^{-1}$ mátrixszal szorozzuk, akkor az

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\|_t^{-1} \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

egyenletet nyerjük, ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} f \\ h \\ n \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\|_t^{-1} \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right]$$

koordináta-transzformációt leíró egyenletben szereplő $\|\mathbf{M}\|^{-1}$ mátrix soraiban szereplő tagok összege szintén 1-et ad.

A (6) képlet alapján az is nyilvánvaló, hogy az

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right] \end{array} = \|\mathbf{M}\|_t \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} f \\ h \\ n \end{array} \right]$$

koordináta-transzformáció $\|\mathbf{M}\|_t$ mátrixában a sorokban szereplő tagok összege szintén 1-et ad eredményül.

Kimondhatjuk tehát, hogy azonos referencia-fehérral rendelkező rendszerek közötti transzformáció esetében, az egységvektorok transzformációját megadó mátrix oszlopaiban szereplő tagok összegének és a koordináták transzformációját megadó mátrix soraiban szereplő tagok összegének 1-nek kell lennie.

Meg kell jegyezni, hogy transzformációt megadó mátrixokat különböző okok folytán sokszor egy konstans faktorral megszorozzák, így ezekben az esetekben azt találjuk, hogy az azonos referencia-fehérral rendelkező rendszerek közötti transzformációt megadó mátrixok oszlopaiban (illetve soraiban) szereplő tagok összege azonos konstans ad.

Végezetül nézzük meg az azonos referencia-fehérral rendelkező rendszerek közti transzformációs mátrixra tett megállapításunkat a mátrixok sajátértékeinek és sajátirányainak szemszögéből is. Az, hogy a koordináta-transzformáció mátrix soraiban szereplő tagok összege 1, végeredményben azt biztosítja, hogy

a mátrix az $\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array}$ alapvektort, $\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array}$ alapvektorba viszi át; tehát az $\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array}$ irány sajátirány, sőt az ehhez tartozó

sajátérték is egységnyi ($\lambda_1=1$). A másik két sajátirány nem lehet érdemleges fizikai jelentést tulajdonítani. Nem mond ugyanis lényegeset az, hogy létezik még két olyan (valós vagy képzetes) szín melynek koordinátái a régi és az új rendszerben csak egy λ_2 és λ_3 konstans faktorban különböznek egymástól, tehát színértékük mérőszámai a régi és az új koordináta-rendszerben is azonosak.

A színkeverési görbék meghatározása

Tételezzük fel, hogy az $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ vektorokkal meghatározott rendszerben ismerjük az $\overline{a(\lambda)}$, $\overline{b(\lambda)}$, $\overline{c(\lambda)}$ színkeverési görbéket, azaz az egyenlő teljesítményű spektrumszínek additív kikeveréséhez szük-

séges a , b , c alapszín együtthatókat. Általános $E(\lambda)$ színképi teljesítményeloszlás esetén:

$$a = \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{a(\lambda)} d\lambda$$

$$b = \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{b(\lambda)} d\lambda$$

$$c = \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{c(\lambda)} d\lambda.$$

Keressük most az

$$\begin{bmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{bmatrix} = \|M\| \cdot \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{bmatrix}$$

transzformáció által meghatározott új $[F]$, $[H]$, $[N]$ rendszerben az $\overline{f(\lambda)}$, $\overline{h(\lambda)}$, $\overline{n(\lambda)}$ színkeverési görbéket, amelyekkel az új rendszer alapszín együtthatói, koordinátái az ismert formula szerint közvetlenül meghatározhatók, azaz:

$$f = \int_{380}^{740} E(\lambda) \overline{f(\lambda)} d\lambda$$

$$h = \int_{380}^{740} E(\lambda) \overline{h(\lambda)} d\lambda$$

$$n = \int_{380}^{740} E(\lambda) \overline{n(\lambda)} d\lambda.$$

Ha az a , b , c koordináták ismeretében kívánnánk f , h , n új koordinátákat meghatározni, akkor (3) alapján:

$$\begin{bmatrix} f \\ h \\ n \end{bmatrix} = \|M\|_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve a koordináták helyére a színkeverési görbékkel végrehajtott koordináta-meghatározó képletet,

$$\begin{bmatrix} \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{f(\lambda)} \cdot d\lambda \\ \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{h(\lambda)} \cdot d\lambda \\ \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{n(\lambda)} \cdot d\lambda \end{bmatrix} = \|M\|_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{a(\lambda)} \cdot d\lambda \\ \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{b(\lambda)} \cdot d\lambda \\ \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{c(\lambda)} \cdot d\lambda \end{bmatrix}$$

A fenti egyenlőség tetszőleges $E(\lambda)$ függvény esetére csak akkor teljesülhet minden esetben, ha

$$\begin{bmatrix} \overline{f(\lambda)} \\ \overline{h(\lambda)} \\ \overline{n(\lambda)} \end{bmatrix} = \|M\|_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{a(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \\ \overline{c(\lambda)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Látható tehát, hogy a színkeverési görbék ugyanúgy transzformálódnak mint a koordináták.

Vizsgáljuk meg, hogy az új rendszer $[F]$, $[H]$, $[N]$ egységvektorainak nagysága hogyan befolyásolja a koordinátatranszformációt.

Tételezzük fel, hogy az új rendszer $[F]$, $[H]$, $[N]$ alapszíneinek nagyságát megváltoztatjuk $d_1[F]$, $d_2[H]$, $d_3[N]$ nagyságú alapszínekre. Így az egységvektorokat megadó mátrixegyenlet (1)-hez képest a következőképpen módosul:

$$\begin{bmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{bmatrix} = \|D\| \cdot \|M\| \cdot \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \\ [C] \end{bmatrix}, \quad (8)$$

ahol $\|D\|$ az alábbi diagonálmátrix:

$$\|D\| = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

A koordináta-transzformációs mátrixot a $\|D\| \cdot \|M\|$ mátrix transzponált inverz mátrixa adja.

$$(\|D\| \cdot \|M\|)_t = \|M\|_t \cdot \|D\|_t = \|M\|_t \|D\|.$$

Ennek képzendő még az inverze:

$$(\|M\|_t \|D\|)^{-1} = \|D\|^{-1} \cdot \|M\|_t^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} \end{bmatrix} \cdot \|M\|_t^{-1}. \quad (9)$$

(A transzponálás és inverzképzés kommutatív műveletek, elvégzésük sorrendje érdektelen.)

Fenti kifejezésben a diagonálmátrix, az $\|M\|_t^{-1}$ mátrix első sorát $\frac{1}{d_1}$, második sorát $\frac{1}{d_2}$, harmadik sorát $\frac{1}{d_3}$ faktorral megszorozza, így látható, hogy az alapszínek nagyságának megválasztása — mint az várható — az új koordináták nagyságát nem befolyásolja.

Legyenek ezek után az új alapszínek az $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ nemzetközi rendszerhez viszonyítottak, azaz

$$\begin{bmatrix} [F] \\ [H] \\ [N] \end{bmatrix} = \|M\| \cdot \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}.$$

Az $\|M\|$ mátrix soraiban az új egységvektorokat adjuk meg x , y , z színértékeikkel. Láttuk ugyanis, hogy az alapszínek megfelelő nagyságú megválasztása utólag egy diagonálmátrixszal igen egyszerűen figyelembe vehető.

Így

$$\|M\| = \begin{bmatrix} x_F & y_F & z_F \\ x_H & y_H & z_H \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix}$$

A koordináta-transzformációt megadó mátrix a következő lesz:

$$\|\mathbf{M}\|_t^{-1} = \frac{1}{\det \|\mathbf{M}\|} \cdot \begin{vmatrix} (y_H z_N - z_H y_N) & (z_H x_N - x_H z_N) & (x_H y_N - y_H x_N) \\ (z_F y_N - y_F z_N) & (x_F z_N - z_F x_N) & (y_F x_N - x_F y_N) \\ (y_F z_H - z_F y_H) & (x_F z_H - z_F x_H) & (y_F x_H - x_F y_H) \end{vmatrix} \quad (10)$$

A színkeverési görbék teljes készlete a fenti mátrix segítségével az

$$\|\mathbf{M}\|_t^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{vmatrix}$$

formulából nyerhető.

Az emberi szem színkeverési görbéi, ortogonális függvények gondolatának bevezetése

A Young—Helmholtz-féle klasszikus háromreceptoros színlátási elmélet szerint a retinára leképzett optikai kép minden elemét három, különböző spektrális érzékenységi receptor „analizálja” [9, 10, 11].

A háromfajta receptor érzékenységi görbéje végeredményben három színkeverési görbének felel meg, így a szem — ennek megfelelően — egy meghatározott színrendszerben dolgozik. A szem receptorainak függvénymenete teljes bizonyossággal nem ismert, biztos azonban, hogy homogén lineáris transzformáción keresztül függ össze bármelyik ismert színrendszerrel. Ha a receptorok érzékenységeinek függvénymenetét $r_{rec}(\lambda)$, $g_{rec}(\lambda)$, $b_{rec}(\lambda)$ -val jelöljük, biztos, hogy

$$\begin{vmatrix} r_{rec}(\lambda) \\ g_{rec}(\lambda) \\ b_{rec}(\lambda) \end{vmatrix} = \|\mathbf{M}\|_t^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Az $\|\mathbf{M}\|_t^{-1}$ transzformációs mátrix azonban nem ismert. Azok a feltételek, amelyeket a receptorok függvénymenetére feltehetünk nem elégségesek a mátrix 9 elemének egyértelmű kiszámításához.

Tételezzük fel pillanatnyilag ismertnek a receptor függvényeket, azaz az emberi szem színkeverési görbéit. A retinára leképzett optikai kép egy elemének $E(\lambda)$ színeképi teljesítmény-eloszlásából a három receptor három — r_{rec} , g_{rec} , b_{rec} nagyságú — érzetet képez.

$$\begin{aligned} r_{rec} &= \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} \cdot d\lambda \\ g_{rec} &= \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{g_{rec}(\lambda)} \cdot d\lambda \\ b_{rec} &= \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{b_{rec}(\lambda)} \cdot d\lambda. \end{aligned}$$

A szem ilyen módon analizálja az $E(\lambda)$ spektrumot.

A szemnek ez a spektrum-analizáló tulajdonsága messzemenően nem nevezhető matematikailag exaktnak.

Ha a látható fényjullámhosszak közül minden λ -ra fennállna az alábbi összefüggés:

$$E(\lambda) = r' \cdot r_{rec}(\lambda) + g' \cdot \overline{g_{rec}(\lambda)} + b' \cdot \overline{b_{rec}(\lambda)}, \quad (11)$$

akkor a sugárzási teljesítményről pontos, egyértelmű információt tudna adni a szem, s például nem fordul-

hatna elő a metamer színeknek megfelelő, különböző sugárzási teljesítmény-eloszlású függvények azonosnak ítéltése. A (11) egyenlőség viszont két okból nem állhat fenn:

Tetszőleges függvénymenet leírható ugyan adott periodikus függvények megfelelő együtthatóval vett összegeként (Fourier-analízis), azonban az adott függvény tökéletes közelítéséhez nagyszámú függvényre van szükség, kellő nagyfrekvenciás tagok is szükségesek az adott görbe gyorsabb változásainak leírásához. Jelenleg csak három függvényünk van $r_{rec}(\lambda)$, $g_{rec}(\lambda)$, $b_{rec}(\lambda)$ és nyilvánvaló, hogy ezek tetszőleges együtthatóval vett összege nem lehet képes adott $E(\lambda)$ függvény tökéletes leírására.

A Fourier-analízisben a szükséges együtthatók kiszámítása a rendelkezésre álló függvénytörzs ortogonalitására van alapozva. Ez esetben ez sem teljesül. Biztos, hogy az $r_{rec}(\lambda)$, $g_{rec}(\lambda)$, $b_{rec}(\lambda)$ függvények nem lehetnek egymásra kölcsönösen ortogonálisak, mivel negatív függvényszakasza egyiknek sem lehet, így az ortogonalitást megadó integrálok semmiképp sem adhatnak zérust. Tehát a (11) egyenletből pl. r meghatározása nem oldható meg a konvencionális módon. Hiába szorozzuk át az egyenlet mindkét oldalát $r_{rec}(\lambda)$ -val és integráljuk a teljes látható sávra,

$$\begin{aligned} \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} \cdot d\lambda &= r' \int_{380}^{740} r_{rec}(\lambda)^2 d\lambda + \\ &+ g' \int_{380}^{740} \overline{g_{rec}(\lambda)} \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda + b' \int_{380}^{740} \overline{b_{rec}(\lambda)} \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda, \end{aligned}$$

mivel a két utolsó integrál az ortogonalitás hiánya folytán nem zérus, így $\int E(\lambda) \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda$ nem lehet alkalmas az r' Fourier-együttható meghatározására.

A Fourier-közelítés oldaláról nézve tehát a kérdést a (kétszeresen) tökéletlen Fourier-analízis tökéletlen $E(\lambda)$ felismerést ad.

Ennek a tökéletlen analízisnek is vannak a sorban jellemző tulajdonságai. Látásunknak egyik legjellemzőbb sajátága az, hogy több különböző $E(\lambda)$ függvénymenetet azonos színűnek ítélünk (metamer színek).

Tegyük fel pl., hogy $E_1(\lambda)$ és $E_2(\lambda)$ azonos színérzetet keltenek, tehát a színekoordináták mindkét esetben azonosak, azaz

$$\begin{aligned} \int_{380}^{740} E_1(\lambda) \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda &= \int_{380}^{740} E_2(\lambda) \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda \\ \int_{380}^{740} E_1(\lambda) \cdot \overline{g_{rec}(\lambda)} d\lambda &= \int_{380}^{740} E_2(\lambda) \cdot \overline{g_{rec}(\lambda)} d\lambda \\ \int_{380}^{740} E_1(\lambda) \cdot \overline{b_{rec}(\lambda)} d\lambda &= \int_{380}^{740} E_2(\lambda) \cdot \overline{b_{rec}(\lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

Az előbbi három egyenlőség a következő alakban is írható:

$$\int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda = 0$$

$$\int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{g_{rec}(\lambda)} d\lambda = 0$$

$$\int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{b_{rec}(\lambda)} d\lambda = 0$$

Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy $E_1(\lambda) - E_2(\lambda)$ függvény ortogonális $r_{rec}(\lambda)$, $g_{rec}(\lambda)$ és $b_{rec}(\lambda)$ függvényekre, azaz a metamer színek sugárzási teljesítmény-függvényeinek különbsége ortogonális a szem receptor-függvényeire. A metamer színek ilyen jellegű ortogonálisítása a receptor-függvényekre — a színes látás egyik jellemző tulajdonsága. Felvetődik a kérdés, hogy ez az ortogonális tulajdonság változatlanul megvan-e, nem csak a receptor-függvények alkotta színrendszerben, hanem egyéb tetszőleges színrendszerben is?

Az összes létező színrendszer színkeverési görbéi homogén lineáris transzformációval származtathatók a receptor-függvényekből. Legyenek a tetszőleges színrendszer színkeverési görbéi $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $n(\lambda)$, akkor írható, hogy

$$\begin{bmatrix} f(\lambda) \\ h(\lambda) \\ n(\lambda) \end{bmatrix} = \|K\| \cdot \begin{bmatrix} r_{rec}(\lambda) \\ g_{rec}(\lambda) \\ b_{rec}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Ha $E_1(\lambda) - E_2(\lambda)$ függvény ortogonális $r_{rec}(\lambda)$, $g_{rec}(\lambda)$ és $b_{rec}(\lambda)$ függvényekre, akkor ortogonálisnak kell lennie az $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $n(\lambda)$ színkeverési görbékre is. Ugyanis

$$\overline{f(\lambda)} = k_{11}\overline{r_{rec}(\lambda)} + k_{12}\overline{g_{rec}(\lambda)} + k_{13}\overline{b_{rec}(\lambda)}$$

Megszorozva most mindkét oldalt $E_1(\lambda) - E_2(\lambda)$ -val és integrálva látható spektruma,

$$\int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{f(\lambda)} d\lambda = k_{11} \int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{r_{rec}(\lambda)} d\lambda +$$

$$+ \int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{g_{rec}(\lambda)} d\lambda +$$

$$+ k_{13} \int_{380}^{740} \{E_1(\lambda) - E_2(\lambda)\} \cdot \overline{b_{rec}(\lambda)} d\lambda = 0$$

Hasonlóképp bizonyítható $h(\lambda)$ és $n(\lambda)$ színkeverési görbékre is, hogy (fenti feltételek mellett) ortogonálisak az $E_1(\lambda) - E_2(\lambda)$ függvényekre. Ez igen figyelemre méltó tény, mivel ha ez a receptor-függvényekre és a metamer színekre értelmezett ortogonálisítás nem maradna meg teljesen változatlanul minden (homogén lineáris) transzformációval nyert színrendszerben, akkor nem lenne jogunk tetszőleges színrendszert használni, színmértani számítások során.

Ez a megállapítás mellett az ezen fejezet által adott áttekintés az ortogonális tulajdonságok — későbbiekben bevezetendő — gyakorlati alkalmazásának lehetőségeit kívánta bevezetni.

3. Az additív reprodukció általános esete

Tételezzük fel, hogy tetszőleges $E(\lambda)$ színekpi teljesítmény-eloszlásnak megfelelő szín reprodukálásához szükséges koordináták kiértékelése olyan $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$ alapszínekkel jellemzett színrendszerben történik, amely az ICI nemzetközi színrendszerből az $\|A\|$ mátrixszal az alábbi módon származtatható:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{A}_1] \\ [\tilde{A}_2] \\ [\tilde{A}_3] \end{bmatrix} = \|A\| \cdot \begin{bmatrix} [\tilde{X}] \\ [\tilde{Y}] \\ [\tilde{Z}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

A továbbiakban ezt röviden „A” rendszernek fogjuk nevezni.

Ebben a színrendszerben az $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ színkeverési görbék, a (7) kifejezésnek megfelelően az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1(\lambda)} \\ \overline{a_2(\lambda)} \\ \overline{a_3(\lambda)} \end{bmatrix} = \|A\|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{x(\lambda)} \\ \overline{y(\lambda)} \\ \overline{z(\lambda)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

A reprodukáláshoz szükséges a_1 , a_2 , a_3 alapszín-együtthatók, azaz színkoordináták az ismert formula alapján számíthatók:

$$a_1 = \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{a_1(\lambda)} d\lambda$$

$$a_2 = \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{a_2(\lambda)} d\lambda$$

$$a_3 = \int_{380}^{740} E(\lambda) \cdot \overline{a_3(\lambda)} d\lambda$$

Az $E(\lambda)$ által keltett színérzet additív reprodukálása nyilvánvalóan a következő:

$$a_1[A_1] + a_2[A_2] + a_3[A_3] \quad (14)$$

Tegyük fel azonban, hogy fenti színrendszerünk, a kedvező függvényemenetű színkeverési görbék szempontjából vagy más okból, elsősorban a színkoordináták meghatározására, „felvételére” optimális; de reprodukálásra ez a rendszer vagy nem alkalmas, vagy teljesen irreális (pl. ha az alapszínek közül egy vagy több képzetes szín).

Legyen az additív reprodukálás céljára alkalmasnak választott rendszer $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$ alapszínekre építve, ahol az alapszínek az ICI nemzetközi színrendszeréből a $\|V\|$ mátrix segítségével az alábbi módon származtathatók:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{V}_1] \\ [\tilde{V}_2] \\ [\tilde{V}_3] \end{bmatrix} = \|V\| \cdot \begin{bmatrix} [\tilde{X}] \\ [\tilde{Y}] \\ [\tilde{Z}] \end{bmatrix} \quad (15)$$

A továbbiakban ezt röviden „V” rendszernek fogjuk nevezni.

A (14) formula helyett, az $E(\lambda)$ által keltett színérzetet most a

$$v_1[V_1] + v_2[V_2] + v_3[V_3] \quad (16)$$

additív reprodukcióval kívánjuk megvalósítani. $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$ alapszínek minőségében a reprodukció és a realizálás szempontjából optimális alapszínek megválasztását értjük.

Az „A” rendszerben megállapított a_1 , a_2 , a_3 színkoordinátákból, a „V” rendszerben történő reprodukáláshoz szükséges v_1 , v_2 , v_3 színkoordinátákat a következőképp nyerhetjük.

A (15) kifejezésből:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \|V\|_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (17)$$

A (12) kifejezésből:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \|A\|_t \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Így

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \|V\|_t^{-1} \cdot \|A\|_t \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Következésképpen az „A” rendszerben kiszámított, illetve megmért a_1 , a_2 , a_3 koordinátákból $\|V\|_t^{-1} \cdot \|A\|_t$ mátrixnak megfelelő koordináta-transzformációval lehet a „V” rendszer alapszíneinek együtthatóit kiszámítani és ezeket (v_1 , v_2 , v_3) exakt-reprodukcióra felhasználni.

A gyakorlatban a legtöbb esetben azonos felvételi, és a visszatérési színrendszerre törekszenek, azaz

$$\|A\| = \|V\|.$$

Ugyanez a törekvés a színes tv területén is, ahol megkísérlik megközelíteni azt, hogy a felvevőkamerák ugyanabban az $[R]$, $[G]$, $[B]$ színrendszerben dolgozzanak, mint a képvisztaadó tricolor csövek. Ennek folytán elmarad $\|V\|_t^{-1} \cdot \|A\|_t$ koordináta-transzformáció és az ezzel kapcsolatos egy-két káros körülmény.

A felvevőkamera oldalán a tricolor képcsőtől eltérő színrendszer használatát általánosan elvetették mivel megfelelő „A” rendszer választása esetén a $\|V\|_t^{-1} \cdot \|A\|_t$ koordináta-transzformációs mátrix negatív tagokat is tartalmaz ez pedig a jel/zaj viszony romlásához vezet [13, 14].

A kétfajta színrendszer alkalmazásának (az említett hátrányok mellett) lényeges előnyei is vannak. Mind az „A” mind a „V” rendszer saját funkciója szempontjából optimálisra választható, és nem lehet eleve kizárni, hogy ezen előnyök a koordináta-transzformáció hátrányait ellensúlyozzák.

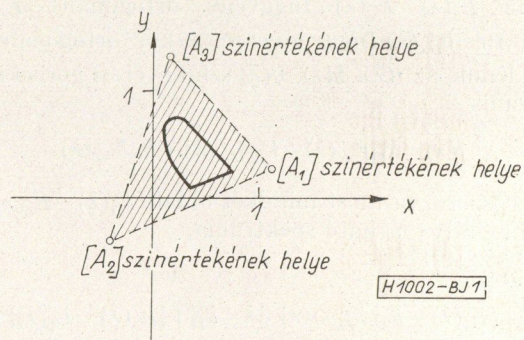
Az „A” rendszer megfelelő megválasztására — színes tv felvevőkamerák területén — a következő alapvető megfontolásokat tehetjük:

Exakt színreprodukció célkitűzése esetén a választott színrendszer színkeverési görbéinek, $a_1(\lambda)$ -nak, $a_2(\lambda)$ -nak és $a_3(\lambda)$ -nak természetesen kizárólag pozitív ordinátái lehetnek, mivel a kamera felvevőcsövei előtt csak negatív szakasztól mentes szűrőkarakterisztika realizálható. Az ICI színértékdiagramon szemléletes és könnyen áttekinthető az „A” színrendszer alapszín-színértékeinek olyan elrendezése, amelyekben az $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$ színkeverési görbék kizárólag pozitív ordinátájúak. Három esetet kell ezek közül megkülönböztetnünk:

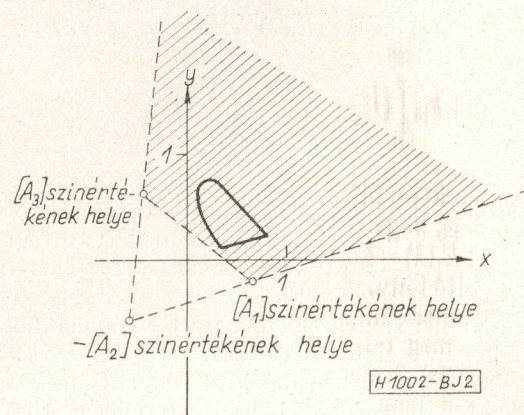
a) Az ICI színérték-síkon az „A” rendszer alapszíneinek pozitív irányai által adott dőféspontok vannak színértékekkel megadva. Ebben az esetben a három alapszín színértéke által meghatározott háromszögnek hiánytalanul be kell zárnia a spektrálszínek patkóját. A háromszögön belül ugyanis minden színérték pozitív alapszínekből reprodukálható, így minden spektrálszín is, amelyet $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ és $a_3(\lambda)$ definiál pontosan. Egy ilyen alapszín-színérték elrendezés az 1. ábrán látható. Maga az ICI rendszer is egy — spektrálszínek patkóját szorosan körülvevő — tiszta pozitív színkeverési görbéket nyújtó rendszer.

b) Az ICI színérték-síkon az „A” színrendszer alapszínei közül kettőnek a pozitív irányja és egy alapszínnek a negatív irányja ad dőféspontot. Egy ilyen esetet a 2. ábra mutat.

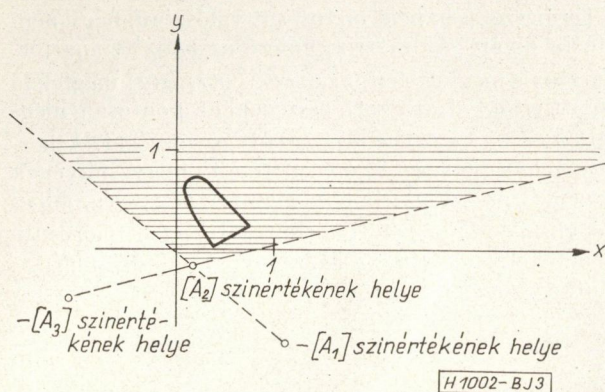
Ilyen elrendezésben a vonalkázott terület minden színérték pontja pozitív együtthatójú alapszínek összegeként reprodukálható. Mivel a spektrálszínek patkója hiánytalanul a vonalkázott színérték-területre esik, az $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$ színkeverési görbék ki-



1. ábra



2. ábra



3. ábra

zárólag pozitív ordinátájúak. Az alapszíneket meghatározó $\|A\|$ mátri megfelelő (jelen példában második) sorában a negatív irányból nyert dőféspontot, a színérték-koordináták -1 -gyel történő átszorzásával vesszük figyelembe a számítások során.

c) Az ICI színérték-síkon az „A” színrendszer alapszínei közül kettőnek a negatív iránya és egy alapszínnek a pozitív iránya ad dőféspontot. Egy ilyen esetet a 3. ábra mutat.

Ilyen elrendezésben a vonalkázott terület minden színértékpontja pozitív együtthatókkal vett alapszínek összegeként reprodukálható. Mivel a spektrálszínek patkója hiánytalanul a vonalkázott színérték területére esik, így az $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$ színkeverési görbék kizárólag pozitív ordinátájúak. Az alapszíneket meghatározó $\|A\|$ mátrix megfelelő (jelen példában első és harmadik) sorában a negatív irányból vett dőféspontot, a színértékkordináták -1 -gyel történő átszorzásával vesszük figyelembe a számítások során.

Látható, hogy az „A” rendszer alapszínei, tiszta pozitív ordinátájú színkeverési görbék követelménye esetén, majdnem kizárólag képzetes alapszínek lehetnek.

Megemlítendő még az „A” rendszer alapszíneinek megválasztásával kapcsolatban egy jellemző tulajdonság, amely szerint ha csak az egyik alapszín változtatjuk és az $\|A\|$ mátrix determinánsát eközben konstansnak tartjuk, akkor csak a másik két alapszínhez tartozó koordináták módosulnak, a változtatott alapszínhez tartozó koordináta állandó marad. Ez a tény a (10) kifejtett koordináta-transzformációs képletből közvetlenül belátható. A determináns konstans értéken tartása fizikailag azt jelenti, hogy az alapszín-vektorokra felhúzott paralelepipedon köbtartalma állandó.

Az „A” rendszer definiálásának elvileg fontos válfaja, amikor három szűrő adott a színkeverési görbék céljára, tehát $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$ ismert. A kérdés az, hogy mi az így megadott rendszer $\|A\|$ transzformációs mátrixa a lehetséges maximális közelítési pontossággal. Fenti kérdés megoldására a 4. fejezetben adunk egy a színmértani számítások területén teljesen új eljárást.

A „V” rendszer optimális megválasztására — a realizálhatósági követelmények következtében — elvi eszmefuttatásokat nemigen végezhetünk; néhány triviális szempontot a következőkben foglalunk össze.

A $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$ alapszínek színértékei csak a spektrálszínek patkóján, illetve azon belül helyezkedhetnek el, mivel képzetes szín itt természetesen nem lehet alapszín. A színértékeket összekötő egyenesekből alkotott háromszög lehetőleg maximális területet foglaljon el a spektrálszínek patkóján belül, mivel csak a pozitív koordinátájú, tehát háromszögön belül eső színek reprodukálhatók. A szűkszerűen kimaradt terület lehetőleg a színérték-diagram azon területe legyen, amely a Mc Adam-tól ismertté vált azonos színérzetváltozásra jellemző, nagyméretű ellipsziseket tartalmazza (tehát a telített zöld és kékeszöld tartomány elhagyása engedhető meg elsősorban).

A színes tv triolor képcsöveihez szükséges megfelelő fényerejű foszforok kifejlesztése problematikus volt, ma már a kérdés végérvényesen eldőlt. 1952–1954 között az NTSC rendszer specifikációjával együtt alakultak ki végérvényesen a fényporok pontos színértékei, amelyeket az FCC rögzített le. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a kialakult szabványokat.

A piros, zöld, kék foszfor sugárzások színekpi eloszlásából amelyet jelöljük sorra $S_R(\lambda)$, $S_G(\lambda)$, $S_B(\lambda)$ függvényekkel, egyszerűen kiszámíthatók az

$$X_R = \int_{380}^{740} S_R(\lambda) \overline{x(\lambda)} d\lambda$$

$$Y_R = \int_{380}^{740} S_R(\lambda) \overline{y(\lambda)} d\lambda$$

$$Z_R = \int_{380}^{740} S_R(\lambda) \overline{z(\lambda)} d\lambda$$

piros színkoordináták, valamint

$$x_R = \frac{X_R}{X_R + Y_R + Z_R}$$

$$y_R = \frac{Y_R}{X_R + Y_R + Z_R},$$

a piros alapszín színértékei.

Hasonlóképpen nyerhetők a zöld és kék alapszínek színértékei.

A szabványosított színértékek a következők:

$[V_1]$ azaz a piros alapszín színértékei:

$$x_R = 0.67 \quad (20)$$

$$y_R = 0.33.$$

$[V_2]$ azaz a zöld alapszín színértékei:

$$x_G = 0.21 \quad (21)$$

$$y_G = 0.71.$$

$[V_3]$ azaz a kék alapszín színértékei:

$$x_B = 0.14 \quad (22)$$

$$y_B = 0.08.$$

A „V” rendszer referencia-fehér színe eltér az ICI színrendszer referencia-fehér színétől. A $\|V\|$ mátrix

oszlopaiban a tagok összege így nem azonos konstans. Színes tv esetében a „C” típusú fehéret definiálták referencia-fehérnek. Fentiek figyelembevételével az alapszíneket meghatározó $\|\mathbf{V}\|$ mátrix:

$$\|\mathbf{V}\| = \begin{bmatrix} +0.6080, & +0.2990, & +0.0000 \\ +0.1740, & +0.5870, & +0.0662 \\ +0.2000, & +0.1140, & +1.1120 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A koordináta-transzformációt szolgáltató $\|\mathbf{V}\|_t^{-1}$ mátrix:

$$\|\mathbf{V}\|_t^{-1} = \begin{bmatrix} +1.9100, & -0.5320, & -0.2880 \\ -0.9820, & +2.0000, & -0.0283 \\ +0.0585, & -0.1190, & +0.9000 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

A (23) kifejezés középső oszlopa megadja az új FCC alapszín egységek világosságát, illetve világosságviszonyait:

$$L_R: L_G: L_B = 0.2990: 0.5870: 0.1140.$$

Egy bizonyos szín additív reprodukálása esetén, amikor az alapszín egységek r , g , b együtthatóval szerepelnek, a világosság:

$$Y = 0.2990r + 0.5870g + 0.1140b. \quad (25)$$

Ez egyébként rögtön adódik úgy is, ha $\|\mathbf{V}\|_t$ mátrixot képezzük a (23) kifejezésből, az $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ ICI koordináták meghatározása céljából, amikor is a $\|\mathbf{V}\|_t$ mátrixban az Y koordinátát meghatározó második sornak a (23) kifejezés $\|\mathbf{V}\|$ mátrix második oszlopával kell azonosnak lennie.

4. Ortogonális színkeverési görbék, Fourier-analízis a színmértanban

Additív reprodukció adott színkeverési görbék esetében

A 3. fejezetben az „A” rendszerben történik a reprodukálendő színek koordinátáinak megállapítása. Az „A” rendszert az $\|\mathbf{A}\|$ mátrix megadása révén definiáltuk. Ennek ismeretében az „A” rendszer színkeverési görbéi (az $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ függvények) az alábbi kifejezésből nyerhetők:

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1(\lambda)} \\ \overline{a_2(\lambda)} \\ \overline{a_3(\lambda)} \end{bmatrix} = \|\mathbf{A}\|_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{x(\lambda)} \\ \overline{y(\lambda)} \\ \overline{z(\lambda)} \end{bmatrix}.$$

Színes tv esetében, a három felvevőcső elé $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$ áteresztési függvénymenetű szűrőket helyezve, a felvevőcsövek „elvégezik” az integrálást és a kimenetek az a_1 , a_2 , a_3 koordinátákat adják.

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, mikor az „A” rendszer nem az $\|\mathbf{A}\|$ mátrixszal, hanem három — színkeverési görbe céljára felhasználandó — $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ függvénymenettel van adva. Ebben az esetben is feltétlen ismernünk kell az $\|\mathbf{A}\|$ mátrixot, mivel a reprodukáláshoz szükséges koordinátákat a (19) képlet alapján a $\|\mathbf{V}\|_t^{-1} \cdot \|\mathbf{A}\|_t$ koordináta-transzformáció segítségével nyerhetjük.

Természetesen nem biztos, sőt valószínű, hogy nem létezik olyan $\|\mathbf{A}\|$ mátrix, amely az $\|\mathbf{A}\|_t^{-1}$ transzformációnak megfelelően, azaz $\overline{x(\lambda)}$, $\overline{y(\lambda)}$, $\overline{z(\lambda)}$ megfelelő együtthatókkal szorzott összegeként pontosan megadja az adott $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ függvényeket. A kérdést tehát helyesebb úgy feltenni, hogy milyenek legyenek az $\|\mathbf{A}\|_t^{-1}$ mátrix elemei, hogy legjobban megközelítsük az adott $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ függvénymeneteket. Jelöljük az $\|\mathbf{A}\|_t^{-1}$ mátrixot $\|\mathbf{M}\|$ mátrixként, azaz

$$\|\mathbf{A}\|_t^{-1} = \|\mathbf{M}\| = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Az $\|\mathbf{M}\|$ mátrix meghatározása után $\|\mathbf{A}\|$, illetve a szükséges $\|\mathbf{A}\|_t$ mátrix máregyszerűen meghatározható. Keressük tehát az

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1(\lambda)} \\ \overline{a_2(\lambda)} \\ \overline{a_3(\lambda)} \end{bmatrix} = \|\mathbf{M}\| \cdot \begin{bmatrix} \overline{x(\lambda)} \\ \overline{y(\lambda)} \\ \overline{z(\lambda)} \end{bmatrix}$$

egyenletből $\|\mathbf{M}\|$ mátrixot, azaz az $\|\mathbf{M}\|$ mátrix kilenc elemét. Fenti mátrixegyenlet három egyenletnek felel meg:

$$\overline{a_1(\lambda)} = m_{11}\overline{x(\lambda)} + m_{12}\overline{y(\lambda)} + m_{13}\overline{z(\lambda)} \quad (27)$$

$$\overline{a_2(\lambda)} = m_{21}\overline{x(\lambda)} + m_{22}\overline{y(\lambda)} + m_{23}\overline{z(\lambda)} \quad (28)$$

$$\overline{a_3(\lambda)} = m_{31}\overline{x(\lambda)} + m_{32}\overline{y(\lambda)} + m_{33}\overline{z(\lambda)}. \quad (29)$$

Mindegyik egyenlet három ismeretlent tartalmaz, így három tetszőleges λ értéknél lehet mindegyik esetben az egyenlőség exakt fennállását biztosítani. A (27) egyenlet így felírható egy alsó (λ_a), középső (λ_k) és felső (λ_f) hullámhosszra:

$$\overline{a_1(\lambda_a)} = m_{11}\overline{x(\lambda_a)} + m_{12}\overline{y(\lambda_a)} + m_{13}\overline{z(\lambda_a)}$$

$$\overline{a_1(\lambda_k)} = m_{11}\overline{x(\lambda_k)} + m_{12}\overline{y(\lambda_k)} + m_{13}\overline{z(\lambda_k)}$$

$$\overline{a_3(\lambda_f)} = m_{11}\overline{x(\lambda_f)} + m_{12}\overline{y(\lambda_f)} + m_{13}\overline{z(\lambda_f)}.$$

m_{11} , m_{12} , m_{13} kivételével fenti egyenletekben minden ismert, így m_{11} , m_{12} , m_{13} egyszerűen meghatározható. Ugyanígy meghatározhatók az $\overline{a_2(\lambda)}$ függvényt megadó m_{21} , m_{22} , m_{23} és az $\overline{a_3(\lambda)}$ függvényt megadó m_{31} , m_{32} , m_{33} értékei, természetesen mindegyik esetben különböző λ_a , λ_k , λ_f hullámhosszak is felhasználhatók. Egyéb λ értékeken általában — a λ_a , λ_k , λ_f bármely megválasztása esetén is — különbség van a kiszámított mátrixelemek segítségével nyert függvény és az adott függvények között.

Legyen $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, $h_3(\lambda)$ a hibafüggvény, így ennek segítségével minden λ hullámhosszra kielégítő a (27), (28) és (29) egyenlet, azaz

$$\overline{a_1(\lambda)} - h_1(\lambda) = m_{11}\overline{x(\lambda)} + m_{12}\overline{y(\lambda)} + m_{13}\overline{z(\lambda)} \quad (30)$$

$$\overline{a_2(\lambda)} - h_2(\lambda) = m_{21}\overline{x(\lambda)} + m_{22}\overline{y(\lambda)} + m_{23}\overline{z(\lambda)} \quad (31)$$

$$\overline{a_3(\lambda)} - h_3(\lambda) = m_{31}\overline{x(\lambda)} + m_{32}\overline{y(\lambda)} + m_{33}\overline{z(\lambda)}. \quad (32)$$

A $h(\lambda)$ hibafüggvények legalább három helyen (λ_a , λ_k , λ_f hullámhosszokon) zérus értékűek. A $h(\lambda)$ függvények (amennyiben nem azonos zérus értékűek) a színek reprodukcióját némileg meghamisítják. Nyilvánvaló, hogy a színek torzulása — ilyen körülmé-

nyek folytán — a színértékdiaagramon egyértelműen nem adható meg, mivel az az illető szín színképi teljesítményeloszlásától is függ.

Az $\|\mathbf{M}\|$ mátrix elemeinek meghatározására — némileg megfelelőbbnek látszik — egy olyan módszer, amely a színkeverési görbék hullámhosszra történő — az előbbieken vázolt — egyeztetése helyett, három-

fajta előre meghatározott sugárzási teljesítményeloszlásra ($E_a(\lambda)$, $E_k(\lambda)$ és $E_f(\lambda)$ függvényekre) kiköti, hogy a hibafüggvény hatása zérus legyen, és ennek alapján határozza meg az ismeretleneket. A (30) egyenletet $E_a(\lambda)$ -val átszorozva és az egészet integrálva a teljes látható spektrumra, a következőt kapjuk:

$$\int_{380}^{740} E_a(\lambda) \overline{a_1(\lambda)} d\lambda - \int_{380}^{740} E_a(\lambda) h_1(\lambda) d\lambda = m_{11} \int_{380}^{740} E_a(\lambda) \overline{x(\lambda)} d\lambda + m_{12} \int_{380}^{740} E_a(\lambda) \overline{y(\lambda)} d\lambda + m_{13} \int_{380}^{740} E_a(\lambda) \overline{z(\lambda)} d\lambda. \quad (33)$$

Ha feltesszük, hogy a bal oldal második tagjának integrálja zérus, ad, úgy a fenti egyenlet csak m_{11} , m_{12} , m_{13} ismeretleneket tartalmazza. A (30) egyenlet $E_k(\lambda)$ -val és $E_f(\lambda)$ -val történő átszorozása és integrálás után, hasonló feltétellel újabb két egyenletet nyerünk, s így m_{11} , m_{12} , m_{13} egyértelműen kiszámítható. Ugyanígy határozható meg a még hiányzó három-három mátrixelem.

Legyen $E_a(\lambda)=1$, vagyis az egyenlő energiájú fehér szín esetében biztosítsunk hibátlan reprodukciót. A (33) kifejezésből ekkor a következő egyenletet nyerjük:

$$m_{11} + m_{12} + m_{13} = \int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} d\lambda. \quad (34)$$

Hasonlóképp nyerhető:

$$m_{21} + m_{22} + m_{23} = \int_{380}^{740} \overline{a_2(\lambda)} d\lambda \quad (35)$$

$$m_{31} + m_{32} + m_{33} = \int_{380}^{740} \overline{a_3(\lambda)} d\lambda. \quad (36)$$

Az $\|\mathbf{M}\|$ mátrix meghatározására vázolt két módszer vegyesen is alkalmazható. Megtehetjük például, hogy kikötjük az egyenlő energiájú fehér hibátlan reprodukcióját, és minden színkeverési görbére λ_a és λ_f hullámhosszakon felírjuk a pontos ordináta-egyezős feltételét.

Annak ellenére, hogy a fenti gondolatmenettel, adott színkeverési görbékhez kiszámíthatunk olyan mátrixot, amely meghatározza a színrendszert, a közelítés pontosságára nincs megfelelő információ. Nagyszámú próbálkozás és a $h(\lambda)$ függvények vizsgálatával talán megközelíthetnénk a lehetséges optimumot, de egy ilyen módszer sem praktikusnak, sem elegánsnak nem mondható. Így az e tárgyról eddig vázoltakat csak mint probléma felvetést érdemes figyelembe venni. Az adott színkeverési görbékhez tartozó, maximális közelítést biztosító $\|\mathbf{M}\|$ mátrix meghatározására megfelelőbb módszert fogunk kidolgozni. Ennek egyik előfeltétele az ortogonális színkeverési görbék bevezetése.

Ortogonalis színkeverési görbék előállítás

Célunk olyan színrendszert (vagy színrendszereket) keresni, amelyben a színkeverési görbék egymásra kölcsönösen ortogonálisak. Jelöljük egy ilyen rendszer „K” rendszernek, amelyeket a $\|\mathbf{K}\|$ mátrix definiál.

A színkeverési görbék az alábbi, ismert kifejezés adja:

$$\begin{bmatrix} \overline{k_1(\lambda)} \\ \overline{k_2(\lambda)} \\ \overline{k_3(\lambda)} \end{bmatrix} = \|\mathbf{K}\|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \overline{y(\lambda)} \\ \overline{y(\lambda)} \\ \overline{z(\lambda)} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

E színkeverési görbék most kielégítik az ortogonalitás kritériumát, azaz:

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} \cdot \overline{k_2(\lambda)} d\lambda = 0 \quad (38)$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} \cdot \overline{k_3(\lambda)} d\lambda = 0 \quad (39)$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_2(\lambda)} \cdot \overline{k_3(\lambda)} d\lambda = 0. \quad (40)$$

Kérdés az, hogy létezik e ilyen „K” rendszer és ha igen, mik a $\|\mathbf{K}\|^{-1}$ koordináta-transzformációs mátrix elemei. Jelöljük a $\|\mathbf{K}\|^{-1}$ mátrixot $\|\mathbf{P}\|$ mátrixként, azaz:

$$\|\mathbf{K}\|^{-1} = \|\mathbf{P}\| = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Az ortogonalis színkeverési görbék meghatározására így az alábbi három egyenlet áll rendelkezésünkre:

$$\begin{aligned} \overline{k_1(\lambda)} &= p_{11} \overline{x(\lambda)} + p_{12} \overline{y(\lambda)} + p_{13} \overline{z(\lambda)} \\ \overline{k_2(\lambda)} &= p_{21} \overline{x(\lambda)} + p_{22} \overline{y(\lambda)} + p_{23} \overline{z(\lambda)} \\ \overline{k_3(\lambda)} &= p_{31} \overline{x(\lambda)} + p_{32} \overline{y(\lambda)} + p_{33} \overline{z(\lambda)}. \end{aligned} \quad (42)$$

A $\|\mathbf{P}\|$ mátrix kilenc elemének egyértelmű meghatározásához kilenc egyenlet kell. Az ortogonalitás feltétele három egyenletet ad, így további célszerű kikötéseket is módunkban van tenni. További három egyenletet jelent, ha kikötjük, hogy a színkeverési görbék egységre normáltak legyenek. Praktikus továbbá a $p_{21}=0$ és $p_{23}=0$ kikötés is, mivel így $\overline{k_2(\lambda)}$ csak egy konstans faktorban fog $\overline{y(\lambda)}$ -től különbözni. Fentiekkel összesen nyolc egyenletünk van, ezek tehát a következők:

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} \cdot \overline{k_2(\lambda)} d\lambda = 0$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} \cdot \overline{k_2(\lambda)} d\lambda = 0$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_2(\lambda)} \cdot \overline{k_3(\lambda)} d\lambda = 0$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)}^2 d\lambda = 1$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_2(\lambda)}^2 d\lambda = 1$$

(43)

$$\int_{380}^{740} \overline{k_3(\lambda)}^2 d\lambda = 1$$

$$p_{21} = 0$$

$$p_{23} = 0$$

Mivel egy kilencedik feltételt még mindig szabhatnánk, ezért nyilvánvaló, hogy ortogonális, normált és olyan színrendszer, amelynek egyik színkeverési görbéje $\overline{y(\lambda)}$ -val arányos végtelen sok van.

Az első hat egyenlet, $p_{21} = p_{23} = 0$ figyelembevételével, valamint a (42) kifejezések behelyettesítése után az alábbi lesz:

$$\begin{aligned} & p_{11} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \cdot \overline{y(\lambda)} d\lambda + p_{12} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)}^2 d\lambda + \int_{380}^{740} \overline{z(\lambda)} \cdot \overline{y(\lambda)} d\lambda = 0 \\ & p_{11} p_{31} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)}^2 d\lambda + p_{12} p_{32} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)}^2 d\lambda + p_{13} p_{33} \int_{380}^{740} \overline{z(\lambda)}^2 d\lambda + (p_{12} p_{31} + p_{11} p_{32}) \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \cdot \overline{y(\lambda)} d\lambda + \\ & + (p_{13} p_{31} + p_{11} p_{33}) \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \cdot \overline{z(\lambda)} d\lambda + (p_{32} p_{13} + p_{12} p_{33}) \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)} \cdot \overline{z(\lambda)} d\lambda = 0 \\ & p_{31} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \overline{y(\lambda)} d\lambda + p_{32} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)}^2 d\lambda + p_{33} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)} \overline{z(\lambda)} d\lambda = 0 \\ & p_{11}^2 \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)}^2 d\lambda + p_{12}^2 \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)}^2 d\lambda + p_{13}^2 \int_{380}^{740} \overline{z(\lambda)}^2 d\lambda + 2p_{11} p_{12} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \overline{y(\lambda)} d\lambda + 2p_{11} p_{13} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \overline{z(\lambda)} d\lambda + \\ & + 2p_{12} p_{13} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)} \overline{z(\lambda)} d\lambda = 1 \\ & p_{22} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)}^2 d\lambda = 1 \\ & p_{31}^2 \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)}^2 d\lambda + p_{32}^2 \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)}^2 d\lambda + p_{33}^2 \int_{380}^{740} \overline{z(\lambda)}^2 d\lambda + 2p_{31} p_{32} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \overline{y(\lambda)} d\lambda + 2p_{31} p_{33} \int_{380}^{740} \overline{x(\lambda)} \overline{z(\lambda)} d\lambda + \\ & + 2p_{32} p_{33} \int_{380}^{740} \overline{y(\lambda)} \overline{z(\lambda)} d\lambda = 1. \end{aligned} \quad (44)$$

Az egyenletekben szereplő integrálok értékei ismertek. Fenti feltételeket kielégítő (egyik) megoldás az alábbi mátrix:

$$\|\mathbf{P}\| = \begin{bmatrix} +0.5657, & -0.3965, & -0.1691 \\ 0.0000, & +0.3598, & 0.0000 \\ +0.2032, & -0.1738, & +0.2239 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Az ortogonális színkeverési görbék előállítását 1953-ban Mc Adam [15] vetette fel először. Szín-mértani felhasználásra vonatkozó lehetőségek vizsgálata e tárgykörből nem jelent meg az irodalomban.

A (45) kifejezés alatt megadott $\|\mathbf{P}\|$ mátrix segítségével kiszámított $k_1(\lambda)$, $k_2(\lambda)$, $k_3(\lambda)$ ortogonális és nor-

mált színkeverési görbéket az 1. táblázatban adtuk meg.

A numerikus számításokat asztali számológéppel végeztük, az utolsó számjegyek az első elhagyott számjegynek megfelelően kerekített értékek.

A számítások ellenőrzéseképpen megvizsgáltuk az 1. táblázatban adott görbék ortogonalitását és normáltságát úgy, hogy az ezekre jellemző függvény-sorozatok integrálját, $\Delta\lambda = 5$ mμ. lépésekben elvégeztük. Az így nyert értékek a következők:

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} \cdot \overline{k_2(\lambda)} d\lambda = 0.000 \ 20 \ 395$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} \cdot \overline{k_3(\lambda)} d\lambda = 0.000\ 12\ 065$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_2(\lambda)} \cdot \overline{k_3(\lambda)} d\lambda = -0.0000\ 1930$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)}^2 d\lambda = 1.00020975$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_2(\lambda)}^2 d\lambda = 0.99947185$$

$$\int_{380}^{740} \overline{k_3(\lambda)}^2 d\lambda = 1.00088030.$$

Látható, hogy az ortogonalitás és normáltság feltételét, az 1. táblázatban adott színkeverési görbéink igen jól közelítéssel teljesítik.

1. táblázat

$[m\mu]$ λ	$\overline{k_1(\lambda)}$	$\overline{k_2(\lambda)}$	$\overline{k_3(\lambda)}$	$[m\mu]$ λ	$\overline{k_1(\lambda)}$	$\overline{k_2(\lambda)}$	$\overline{k_3(\lambda)}$
380	-0,00031	+0,00000	+0,00173	565	-0,00451	+0,35210	-0,03163
385	-0,00057	+0,00003	+0,00278	570	+0,05330	+0,34253	-0,01013
390	-0,00107	+0,00003	+0,00533	575	+0,11334	+0,32936	+0,01250
395	-0,00190	+0,00007	+0,00961	580	+0,17311	+0,31303	+0,03536
				585	+0,22969	+0,29370	+0,05729
400	-0,00355	+0,00014	+0,01803	590	+0,28024	+0,27237	+0,07722
405	-0,00575	+0,00021	+0,02928	595	+0,32207	+0,25002	+0,09417
410	-0,01090	+0,00043	+0,05507				
415	-0,01976	+0,00079	+0,09852	600	+0,35057	+0,22703	+0,10630
420	-0,03473	+0,00144	+0,17117	605	+0,36665	+0,20393	+0,11408
425	-0,05709	+0,00263	+0,27503	610	+0,36768	+0,18098	+0,11638
430	-0,07830	+0,00417	+0,36590	615	+0,35589	+0,15874	+0,11404
435	-0,09528	+0,00604	+0,42722	620	+0,33223	+0,13708	+0,10743
440	-0,10752	+0,00827	+0,45794	625	+0,29777	+0,11549	+0,09691
445	-0,11633	+0,01072	+0,46467	630	+0,25833	+0,09535	+0,08447
450	-0,12434	+0,01367	+0,45848	635	+0,22051	+0,07808	+0,07240
455	-0,13367	+0,01727	+0,44692	640	+0,18399	+0,06296	+0,06060
460	-0,14155	+0,02159	+0,42239	645	+0,14930	+0,04972	+0,04929
465	-0,14565	+0,02659	+0,38032	650	+0,11795	+0,03850	+0,03901
470	-0,14327	+0,03274	+0,31218	655	+0,09137	+0,02936	+0,03026
475	-0,14044	+0,04051	+0,24259	660	+0,06909	+0,02195	+0,02291
480	-0,13851	+0,05001	+0,17729	665	+0,05088	+0,01605	+0,01688
485	-0,13852	+0,06091	+0,12033	670	+0,03675	+0,01151	+0,01220
490	-0,14303	+0,07484	+0,07451	675	+0,02678	+0,00835	+0,00889
495	-0,15396	+0,09304	+0,03715	680	+0,01973	+0,00612	+0,00656
				685	+0,01389	+0,00428	+0,00461
500	-0,17129	+0,11621	+0,00575	690	+0,00959	+0,00295	+0,00319
505	-0,19603	+0,14655	-0,02277	695	+0,00668	+0,00205	+0,00222
510	-0,22093	+0,18098	-0,05011				
515	-0,24358	+0,21883	-0,07478	700	+0,00483	+0,00147	+0,00161
520	-0,25892	+0,25546	-0,09303	705	+0,00343	+0,00104	+0,00114
525	-0,26219	+0,28339	-0,10276	710	+0,00245	+0,00075	+0,00082
530	-0,25530	+0,31015	-0,10673	715	+0,00173	+0,00054	+0,00057
535	-0,24012	+0,32918	-0,10648	720	+0,00125	+0,00036	+0,00042
540	-0,21741	+0,34325	-0,10225	725	+0,00085	+0,00025	+0,00029
545	-0,18747	+0,35271	-0,09429	730	+0,00059	+0,00018	+0,00019
550	-0,15082	+0,35800	-0,08291	735	+0,00040	+0,00014	+0,00013
555	-0,10785	+0,35987	-0,06849	740	+0,00027	+0,00011	+0,00009
560	-0,05887	+0,35800	-0,05126				

A transzformációs mátrix meghatározása adott színkeverési görbékhez, ortogonális színkeverési görbék segítségével

Bizonyítani fogjuk, hogy adott színkeverési görbék közelítése ortogonális színkeverési görbék megfelelő együtthatóval vett összegeként, a hibanégyzet minimális értékének feltételével, praktikusán kiszámítható. Ortogonális rendszerünk az előző pontban definiált „K” rendszer lesz. Így az adott színkeverési görbék által definiált rendszer és a „K” rendszer között fennálló koordináta-transzformációs mátrixot fogjuk megkapni. Ennek ismeretében az adott színkeverési görbék által definiált rendszer és az ICI rendszer között fennálló transzformációs mátrixok egyszerűen nyerhetők, mivel a „K” rendszer és az

ICI rendszer viszonya ismert. A (45) kifejezésben adott mátrix ugyanis a koordináta-transzformációs mátrix, azaz a „K” rendszer k_1 , k_2 , k_3 koordinátái az X, Y, Z koordináták ismeretében:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \|\mathbf{P}\| \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.5657, & -0.3965, & -0.1691 \\ 0.0000, & +0.3598, & 0.0000 \\ +0.2032, & -0.1738, & +0.2239 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Fenti mátrix transzponáltja (az 1. fejezet képletei szerint) az ICI rendszer alapszíneit adja meg a „K” rendszerben, azaz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.5657, & 0.0000, & +0.2032 \\ -0.3965, & +0.3598, & -0.1738 \\ -0.1691, & 0.0000, & +0.2239 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Fenti mátrix inverze a „K” rendszer alapszíneit

definiálja az ICI rendszerben. (Az $\frac{1}{\det \|\mathbf{P}\|}$ konstans szorzótól — mivel az a felhasználás folyamán teljesen érdektelen — eltekintettünk.)

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{K}_1] \\ [\mathbf{K}_2] \\ [\mathbf{K}_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0860, & 0.0000, & -0.0731 \\ +0.1182, & +0.1611, & +0.0177 \\ +0.0608, & 0.0000, & +0.2035 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{X}] \\ [\mathbf{Y}] \\ [\mathbf{Z}] \end{pmatrix} \quad (48)$$

Fenti mátrix transzponáltja az ICI rendszerben koordinátáit adja meg a „K” rendszer koordinátáinak ismeretében.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0806, & +0.1182, & +0.0608 \\ 0.0000, & +0.1611, & 0.0000 \\ -0.0731, & +0.0177, & +0.2035 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (49)$$

A fenti mátrixok, az ICI és a „K” rendszer közötti minden összefüggést megadnak. Így ha adott színkeverési görbéknek a „K” rendszerre vonatkoztatva ismert a koordináta-transzformációs mátrixa, azaz az

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1(\lambda)} \\ \overline{a_2(\lambda)} \\ \overline{a_3(\lambda)} \end{pmatrix} = \|\mathbf{M}\| \cdot \begin{pmatrix} \overline{k_1(\lambda)} \\ \overline{k_2(\lambda)} \\ \overline{k_3(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (50)$$

összefüggésből ismerjük az $\|\mathbf{M}\|$ mátrixot, egyszerűen megkapjuk az ICI rendszerrel való összefüggés koordináta-transzformáció mátrixát:

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1(\lambda)} \\ \overline{a_2(\lambda)} \\ \overline{a_3(\lambda)} \end{pmatrix} = \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{P}\| \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} \quad (51)$$

A $\|\mathbf{P}\|$ mátrix a (45) kifejezésből ismert.

Ezek után meghatározzuk az (50) egyenletben szereplő $\|\mathbf{M}\|$ mátrix elemeit oly módon, hogy a megfelelő együtthatóval vett $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ függvények legjobban közelítsék meg az adott színkeverési görbéket.

Elvégezve először az m_{11} szerinti parciális differenciálást:

$$\frac{\partial H}{\partial m_{11}} = \frac{1}{A} \int_{380}^{740} 2\{\overline{a_1(\lambda)} - m_{11}\overline{k_1(\lambda)} - m_{12}\overline{k_2(\lambda)} - m_{13}\overline{k_3(\lambda)}\} \cdot (-\overline{k_1(\lambda)}) d\lambda = 0 = \quad (60)$$

$$= \frac{2}{A} \left\{ \int_{380}^{740} -\overline{a_1(\lambda)}\overline{k_1(\lambda)} d\lambda + m_{11} \int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)} d\lambda + m_{12} \int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)}\overline{k_2(\lambda)} d\lambda + m_{13} \int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)}\overline{k_3(\lambda)} d\lambda \right\} \quad (61)$$

A három utolsó integrál ortogonális normált függvények szorzatának integrálja, így [a (43) kifejezésnek megfelelően] az első értéke egy, a két utolsó értéke zérus.

Így a következő egyenlet marad:

$$m_{11} = \int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} \cdot \overline{k_1(\lambda)} d\lambda \quad (62)$$

Az (50) mátrixegyenlet három egyenletre bontható:

$$\overline{a_1(\lambda)} = m_{11}\overline{k_1(\lambda)} + m_{12}\overline{k_2(\lambda)} + m_{13}\overline{k_3(\lambda)} \quad (52)$$

$$\overline{a_2(\lambda)} = m_{21}\overline{k_1(\lambda)} + m_{22}\overline{k_2(\lambda)} + m_{23}\overline{k_3(\lambda)} \quad (53)$$

$$\overline{a_3(\lambda)} = m_{31}\overline{k_1(\lambda)} + m_{32}\overline{k_2(\lambda)} + m_{33}\overline{k_3(\lambda)} \quad (54)$$

Vizsgáljuk először az (52) egyenletet.

Általános esetben az egyenlőség tetszőleges λ esetben, csak bizonyos hibával állhat fenn. A hibafüggvény, mint azt már 4. fejezetben a (30) kifejezés alatt definiáltuk:

$$h_1(\lambda) = \overline{a_1(\lambda)} - \{m_{11}\overline{k_1(\lambda)} + m_{12}\overline{k_2(\lambda)} + m_{13}\overline{k_3(\lambda)}\}.$$

Az m_{11} , m_{12} , m_{13} együtthatókat úgy kell megválasztanunk, hogy az átlagos hibanégyzet minimumot adjon.

Az átlagos hibanégyzet a

$$H = \frac{1}{A} \int_{380}^{740} h_1(\lambda)^2 d\lambda \quad (55)$$

kifejezés adja, ahol A az integrálási intervallumot jelöli (azaz $740 - 380 = 360 \text{ m}\mu$).

Az a kikötésünk, hogy az (55) kifejezés alatti átlagos hibanégyzet — az együtthatók megfelelő megválasztásával — minimumot adjon, azaz behelyettesítve a

$$H = \frac{1}{A} \int_{380}^{740} \{\overline{a_1(\lambda)} - m_{11}\overline{k_1(\lambda)} - m_{12}\overline{k_2(\lambda)} - m_{13}\overline{k_3(\lambda)}\}^2 d\lambda \quad (56)$$

kifejezés adjon minimumot.

H függvénye az m_{11} , m_{12} , m_{13} együtthatóknak, vagyis

$$H = H(m_{11}, m_{12}, m_{13}),$$

tehát az (56) átlagos hibanégyzetet megadó kifejezés akkor lesz minimális, ha

$$\frac{\partial H}{\partial m_{11}} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{\partial H}{\partial m_{12}} = 0, \quad (58)$$

$$\frac{\partial H}{\partial m_{13}} = 0. \quad (59)$$

A (62) képlet megadja m_{11} keresett értékét, amely esetén $\frac{\partial H}{\partial m_{11}} = 0$, azaz az átlagos hibanégyzet minimumának egyik kritériuma biztosítva van.

A $\frac{\partial H}{\partial m_{12}} = 0$ egyenlet megoldása — hasonló módon — megadja m_{12} keresett értékét. Ugyanígy nyerhető m_{13} és az összes többi mátrixelem értéke is, amely most már az adott görbék legjobb közelítését biztosítja.

A keresett $\|\mathbf{M}\|$ mátrixelemeket adó kifejezések az alábbiak:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} \overline{k_1(\lambda)} d\lambda, & m_{12} &= \int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} \overline{k_2(\lambda)} d\lambda, & m_{13} &= \int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} \overline{k_3(\lambda)} d\lambda \\ m_{21} &= \int_{380}^{740} \overline{a_2(\lambda)} \overline{k_1(\lambda)} d\lambda, & m_{22} &= \int_{380}^{740} \overline{a_2(\lambda)} \cdot \overline{k_2(\lambda)} d\lambda, & m_{23} &= \int_{380}^{740} \overline{a_2(\lambda)} \overline{k_3(\lambda)} d\lambda \\ m_{31} &= \int_{380}^{740} \overline{a_3(\lambda)} \overline{k_1(\lambda)} d\lambda, & m_{32} &= \int_{380}^{740} \overline{a_3(\lambda)} \cdot \overline{k_2(\lambda)} d\lambda, & m_{33} &= \int_{380}^{740} \overline{a_3(\lambda)} \overline{k_3(\lambda)} d\lambda \end{aligned} \quad (63)$$

Fenti együtthatókról megállapíthatjuk, hogy a Fourier-együtthatókat megadó képletekkel analóg kifejezések. A 2. fejezet eszmefuttatásában ismertetett Fourier-analízis kiaknázhatóságának gondolata a fenti levezetéssel realizálódott.

A Fourier-analízis nézőpontjából a következő gondolatmenettel is megkaphatjuk a fenti együtthatókat megadó képleteket:

Keressük az $\overline{a_1(\lambda)}$ függvény megközelítését $\overline{k_1(\lambda)}$,

$\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ ortogonális, normált függvényekkel kifejezve, azaz az

$$\overline{a_1(\lambda)} = m_{11} \overline{k_1(\lambda)} + m_{12} \overline{k_2(\lambda)} + m_{13} \overline{k_3(\lambda)}$$

„csonka sor” Fourier-együtthatóit. Az ismert módszer szerint m_{11} meghatározásához mindkét oldalt megszorozzuk a $\overline{k_1(\lambda)}$ függvénnyel, és az egész kifejezést integráljuk a teljes sávra, vagyis:

$$\int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} \overline{k_1(\lambda)} d\lambda = m_{11} \int_{380}^{740} \overline{k_1(\lambda)}^2 d\lambda + m_{12} \int_{380}^{740} \overline{k_2(\lambda)} \cdot \overline{k_1(\lambda)} d\lambda + m_{13} \int_{380}^{740} \overline{k_3(\lambda)} \overline{k_1(\lambda)} d\lambda.$$

A jobb oldali utolsó két integrál az ortogonálisítás folytán zérust ad, a jobb oldal első integrálja a normálás folytán egyet ad, így

$$m_{11} = \int_{380}^{740} \overline{a_1(\lambda)} \cdot \overline{k_1(\lambda)} d\lambda.$$

Ezzel a gondolatmenettel minden m együtthatóra a (63) kifejezés alatt összefoglalt képlettel megegyező képletet kapunk. Nem lenne jogunk azonban felhasználni a formulákat az együtthatók meghatározására, mivel fizikailag egyáltalán nem látható be, hogy egy csonka és „frekvenciában” nem növekvő sor esetében is a Fourier-formulákkal analóg kifejezések adják a lehető legjobb közelítést, azaz azt az esetet, amikor az átlagos hibanégyzet minimum.

Az előző levezetés tehát biztosítja, hogy adott görbék közelítéséhez olyan m együtthatókat nyerjünk amelyekkel az átlagos hibanégyzet minimum, vagyis a $h(\lambda)$ hibafüggvények a teljes sávban a lehető legkisebbek legyenek.

Általános esetben így is marad egy hibafüggvény, amely $\overline{a_1(\lambda)}$ esetében

$$h_1(\lambda) = \overline{a_1(\lambda)} - \{m_{11} \overline{k_1(\lambda)} + m_{12} \overline{k_2(\lambda)} + m_{13} \overline{k_3(\lambda)}\}. \quad (64)$$

A fenti, Fourier-módszerrel kiszámított m együtthatók esetében a $h_1(\lambda)$ függvénynek egy igen jellegzetes tulajdonsága lesz, nevezetesen az, hogy a $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ ortogonális függvények mellé „bevonul” negyedik ortogonális függvénynek.

A (64) egyenlet $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$ és $\overline{k_3(\lambda)}$ -val történő beszorozása és integrálása után azonnal belátható, hogy

$$\int_{380}^{740} h_1(\lambda) \overline{k_1(\lambda)} d\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{380}^{740} h_1(\lambda) \overline{k_2(\lambda)} d\lambda &= 0 \\ \int_{380}^{740} h_1(\lambda) \overline{k_3(\lambda)} d\lambda &= 0, \end{aligned} \quad (65)$$

tehát $h_1(\lambda)$ ortogonális a $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ függvényekre. Így $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$, $h_1(\lambda)$ ortogonális rendszert alkot. Hasonlóképpen ortogonális rendszer a $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$, $h_2(\lambda)$ és a $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$, $h_3(\lambda)$ függvénynégyes is. A hibafüggvények ortogonalitása fizikailag azt fejezi ki, hogy a hibafüggvényekből színrendszer már nem nyerhető, illetve hogy elvileg a $\|\mathbf{O}\|$ mátrix adja az optimális közelítő koordináta-transzformációs mátrixot.

Az eljárás újszerűsége — az általános bizonyítás ellenére is — kíváncsossá teszi, hogy numerikus példákon szemléljük a közelítés jóságát. E célból két numerikus példát fogunk bemutatni.

Legyenek az adott színkeverési görbék, amelyeknek a $\|\mathbf{K}\|$ rendszerre vonatkozó koordináta-transzformációs mátrixát keressük, maguk az ICI $\overline{x(\lambda)}$, $\overline{y(\lambda)}$, $\overline{z(\lambda)}$ színkeverési görbék. Elvileg ez „maradék nélkül” kifejezhető a $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ ortogonális függvényekkel, azaz elvileg $h_1(\lambda) = h_2(\lambda) = h_3(\lambda) = 0$ -nak kellene adódnia. Az integrálást $\Delta\lambda = 10$ mμ lépésekben végeztük, a 700—400 mμ hullámhossz-intervallumban. A (63) kifejezésekkel nyert transzformációs mátrix az alábbiak adódott:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{x(\lambda)} \\ \overline{y(\lambda)} \\ \overline{z(\lambda)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +1.39056, & +2.03864, & +1.04927 \\ +0.00011, & +2.77810, & +0.00852 \\ -1.25921, & +0.30574, & +3.50762 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{k_1(\lambda)} \\ \overline{k_2(\lambda)} \\ \overline{k_3(\lambda)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (66)$$

$\overline{x(\lambda)}$, $\overline{y(\lambda)}$, $\overline{z(\lambda)}$ jelöléseket használunk az eredeti ICI szabványosított értékektől való kismértvű várható eltérés megkülönböztetése végett.

Ha az 1. táblázatban adott $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ értékeivel és a fenti mátrixszal számítjuk ki az $\overline{x(\lambda)}$, $\overline{y(\lambda)}$,

$\overline{z(\lambda)}$ színkeverési görbékét, akkor azt találjuk, hogy az eltérés az eredeti ICI szabványosított értékhez képest 1—3‰, tehát a várakozásnak megfelelő igen jó egyezést kapunk. A (66) mátrixegyenlettel visszanyert ICI színkeverési görbék a 2. táblázatban találhatók.

2. táblázat

$[m\mu] \lambda$	$\overline{x(\lambda)}$	$\overline{x(\lambda)'} $	$\overline{y(\lambda)}$	$\overline{y(\lambda)'} $	$\overline{z(\lambda)}$	$\overline{z(\lambda)'} $
400	0,0143	+0,01427	0,0004	+0,00039	0,0679	+0,06775
410	0,0435	+0,04346	0,0012	+0,00119	0,2074	+0,20705
420	0,1344	+0,13425	0,0040	+0,00400	0,6456	+0,64457
430	0,2839	+0,28355	0,0116	+0,01158	1,3856	+1,38331
440	0,3483	+0,34785	0,0230	+0,02297	1,7471	+1,74420
450	0,3362	+0,33576	0,0380	+0,03798	1,7721	+1,76917
460	0,2908	+0,29038	0,0600	+0,05998	1,6692	+1,66642
470	0,1954	+0,19508	0,0910	+0,09095	1,2876	+1,28543
480	0,0956	+0,09537	0,1390	+0,13893	0,8130	+0,81157
490	0,0320	+0,03186	0,2080	+0,20791	0,4652	+0,46433
500	0,0049	+0,00475	0,3230	+0,32284	0,2720	+0,27139
510	0,0093	+0,00915	0,5030	+0,50278	0,1582	+0,15776
520	0,0633	+0,06313	0,7100	+0,70969	0,0782	+0,06865
530	0,1655	+0,16528	0,8620	+0,86162	0,0422	+0,04194
540	0,2904	+0,29015	0,9540	+0,95358	0,0203	+0,02006
550	0,4334	+0,43312	0,9950	+0,99456	0,0087	+0,00854
560	0,5945	+0,59418	0,9950	+0,99456	0,0039	+0,00378
570	0,7621	+0,76179	0,9520	+0,95158	0,0021	+0,00208
580	0,9163	+0,91598	0,8700	+0,86963	0,0017	+0,00176
590	1,0263	+1,02597	0,7570	+0,75667	0,0011	+0,00121
600	1,0622	+1,06186	0,6310	+0,63071	0,0008	+0,00083
610	1,0026	+1,00234	0,5030	+0,50278	0,0003	+0,00056
620	0,8544	+0,85417	0,3810	+0,38082	0,0002	+0,00038
630	0,6424	+0,64223	0,2650	+0,26489	0,0000	+0,00015
640	0,4479	+0,44779	0,1750	+0,17491	0,0000	+0,00013
650	0,2835	+0,28344	0,1070	+0,10696	0,0000	+0,00008
660	0,1649	+0,16486	0,0610	+0,06098	0,0000	+0,00007
670	0,0874	+0,08736	0,0320	+0,03198	0,0000	+0,00003
680	0,0468	+0,04680	0,0170	+0,01700	0,0000	+0,00004
690	0,0227	+0,02270	0,0082	+0,00820	0,0000	+0,00001
700	0,0114	+0,01140	0,0041	+0,00408	0,0000	+0,00002

3. táblázat

$[m\mu] \lambda$	$\overline{a_1(\lambda)}$	$\overline{a_1(\lambda)'} $	$\overline{a_2(\lambda)}$	$\overline{a_2(\lambda)'} $	$\overline{a_3(\lambda)}$	$\overline{a_3(\lambda)'} $
400	+0,00000	+0,00245	+0,00000	—0,00423	+0,00000	+0,04405
410	+0,00000	+0,00739	+0,00000	—0,01283	+0,33333	+0,13463
420	+0,00000	+0,02222	+0,00000	—0,03980	+0,66666	+0,41905
430	+0,00000	+0,04374	+0,00000	+0,07849	+1,00000	+0,89903
440	+0,00000	+0,04608	+0,00000	—0,12213	+1,00000	+1,13286
450	+0,00000	+0,03077	+0,00000	—0,06181	+1,00000	+1,14783
460	+0,00000	+0,00413	+0,00000	—0,01891	+1,00000	+1,07917
470	+0,00000	—0,03047	+0,00000	+0,04929	+1,00000	+0,82939
480	+0,00000	—0,06442	+0,00000	+0,13659	+0,66666	+0,51895
490	+0,00000	—0,09437	+0,00000	+0,23461	+0,33333	+0,29026
500	+0,00000	—0,13122	+0,00000	+0,37250	+0,00000	+0,15995
510	+0,00000	—0,17710	+0,33333	+0,57219	+0,00000	+0,07882
520	+0,00000	—0,20311	+0,66666	+0,78091	+0,00000	+0,01975
530	+0,00000	—0,18389	+1,00000	+0,90636	+0,00000	—0,00676
540	+0,00000	—0,13135	+1,00000	+0,95360	+0,00000	—0,02074
550	+0,00000	—0,05110	+1,00000	+0,93489	+0,00000	—0,02508
560	+0,00000	+0,05389	+1,00000	+0,86150	+0,00000	—0,02259
570	+0,00000	+0,12789	+1,00000	+0,73631	+0,00000	—0,01594
580	+0,00000	+0,30381	+0,66666	+0,57290	+0,00000	—0,00708
590	+0,00000	+0,39029	+0,33333	+0,39432	+0,00000	+0,00156
600	+0,00000	+0,47886	+0,00000	+0,23467	+0,00000	+0,00829
610	+0,33333	+0,48288	+0,00000	+0,11616	+0,00000	+0,01193
620	+0,66666	+0,42737	+0,00000	+0,04479	+0,00000	+0,01229
630	+1,00000	+0,32849	+0,00000	+0,00926	+0,00000	+0,01013
640	+1,00000	+0,23228	+0,00000	—0,00466	+0,00000	+0,00752
650	+1,00000	+0,14828	+0,00000	—0,00722	+0,00000	+0,00493
660	+1,00000	+0,08665	+0,00000	—0,00561	+0,00000	+0,00295
670	+1,00000	+0,04604	+0,00000	—0,00336	+0,00000	+0,00158
680	+0,66666	+0,02470	+0,00000	—0,00194	+0,00000	+0,00086
690	+0,33333	+0,01199	+0,00000	—0,00100	+0,00000	+0,00041
700	+0,00000	+0,00604	+0,00000	—0,00055	+0,00000	+0,00021

Ellenőrzésül szolgál az is, hogy a (66) egyenlet mátrixa a $\|\mathbf{K}\|$ rendszert defináló mátrixok közül a (49) koordináta-transzformációs mátrixtól csak egy konstans faktorban különbözik (17, 25), mint az logikusnak várható.

Második példaként, az adott $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ színkeverési görbék a 4. ábrán láthatók.

Keressük a $\|\mathbf{K}\|$ rendszerre vonatkozó koordináta-transzformációs mátrixot vagy más megfogalmazásban, keressük az adott $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ függvények kifejezését, a $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ ortogonális függvények megfelelő együtthatókkal vett összegeként. A (63) integrálok segítségével nyerhetők a keresett együtthatók amelyek számítása a 3. táblázatban található. Az integrálás 700–400 mμ hullámhossz-intervallumra történt, Δλ=10 mμ lépésekben. A transzformációs mátrix az alábbi:

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1(\lambda)} \\ \overline{a_2(\lambda)} \\ \overline{a_3(\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.02649, & +0.36727, & +0.33503 \\ -0.66648, & +2.24203, & -0.38269 \\ -0.76199, & +0.13983, & +2.29240 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{k_1(\lambda)} \\ \overline{k_2(\lambda)} \\ \overline{k_3(\lambda)} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ jelölést használunk az adott görbék várhatóan nem exakt közelítésének kifejezésére. A 3. táblázat tartalmazza a (67) alapján számított $\overline{a_1(\lambda)}$, $\overline{a_2(\lambda)}$, $\overline{a_3(\lambda)}$ színkeverési görbéket. Ezek a görbék és az eredetileg adott görbék az 5. ábrán láthatók.

Ha figyelembe vesszük, hogy csak három függvény $\overline{k_1(\lambda)}$, $\overline{k_2(\lambda)}$, $\overline{k_3(\lambda)}$ állt rendelkezésünkre a Fourier-

analízishez és hogy ezek „frekvenciában” nem növekvő függvénytörzsek tagjai, akkor az önkényesen adott görbék közelítését meglepően jónak kell ítélnünk.

Az ismertetett eljárás tehát alkalmas adott szín-szűrők által definiált színrendszer meghatározására, optimális közelítéssel. A koordináta-transzformációs mátrix az (51) kifejezésben definiált mátrix, tehát:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{P}\| \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

ahol $\|\mathbf{M}\|$ a (63) alatt összefoglalt kilenc integrállal határozható meg; $\|\mathbf{P}\|$ a (47) végképletben közölt konstans mátrix. Az ily módon meghatározott „A” rendszer alapszínei ICI rendszerben [az (5) alatt összefoglalt eredményeknek megfelelően] az alábbi mátrixegyenlettel adhatók meg:

$$\begin{bmatrix} [A_1] \\ [A_2] \\ [A_3] \end{bmatrix} = (\|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{P}\|)^{-1} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix} = \|\mathbf{M}\|^{-1} \|\mathbf{P}\|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}.$$

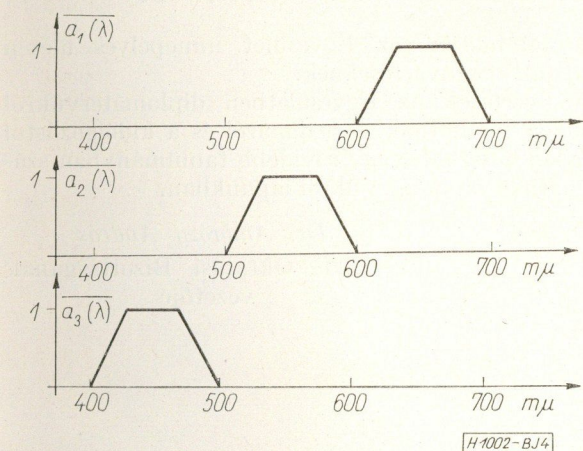
Természetesen az új „A” rendszer alapszíneinek nagyságát jogunkban áll praktikus szempontok alapján módosítani. Így az $\|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{P}\|$ mátrix helyett mindenütt a $\|\mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{P}\|$ mátrixszal számolhatunk. $\|\mathbf{D}\|$ megfelelő diagonál mátrix, amint azt a 2. fejezetben tárgyaltuk.

Az additív reprodukció általános esetében szükséges [lásd (19) kifejezés] $\|\mathbf{V}\|^{-1} \|\mathbf{A}\|$ koordináta-transzformációs mátrixhoz így $\|\mathbf{A}\|$ mátrix is ismert, a két rendszer közötti „illesztést” biztosító mátrix meghatározott.

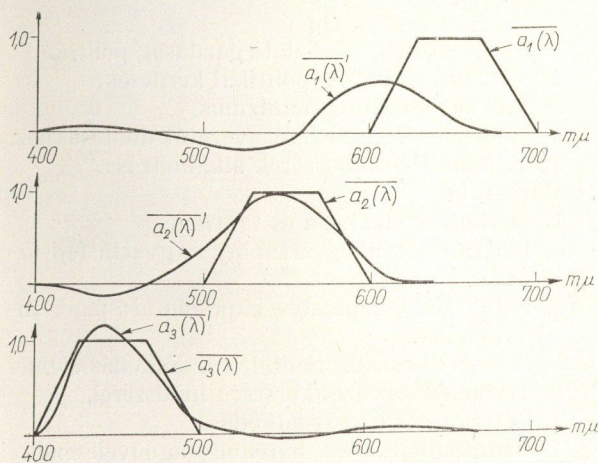
Meg kell említeni, hogy a fenti szemlélet és eljárás, elektronikus „maszkolás” (masking) méretezési módszereként is előnyösen alkalmazható, jelen cikkben azonban erre a felhasználásra nem térünk ki.

IRODALOM

1. W. T. Wintringham: Color Television and Colorimetry. Proc. of the I. R. E. 1951. okt. pp. 1135–1172.
2. John W. Wentworth: Color Television Engineering. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1955.
3. Knox Mc Ilwain—Charles E. Dean: Principles of Color Television. John Wiley New York, Chapman Hall LTD London 1956.
4. Simon Gyula: A színes televízió színmérési alapjai. Kép- és Hangtechnika 1961. 2. sz. pp. 33–40.
5. Fenyő—Frey: Matematika Villamosmérnököknek. I. IV. fejezet pp. 247–368. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964.
6. R. Zurmühl: Matrizen, und ihre technischen Anwendungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer 1964.
7. F. R. Gantmaher: Teorija Matric. izd. Moszkva Nauka, 1966.
8. Maurice Laboureur: Cours de calcul mathématique moderne. Livre I. Calcul matriciel. pp. 39–154. Librairie Polytechnique Béranger, 1963.
9. Dr. Bárány Nándor: A látás. MTI Jegyzet, 1963.
10. H. Schober: Das Sehen. Leipzig Fachbuchverl. 1954.
11. E. H. Jusztova: Novoje opredelenije szpektrálnüh karakterisztik cvetnovo zrenija. Tom LXV, No 5. pp. 661–664. Doklady Akademii Nauk SZSSZR, 1949.
12. R. G. W. Hunt: The Reproduction of Colour. London Fountain Pr. 1957.
13. D. W. Epstein: Colorimetric Analysis of RCA Color Television System. RCA Review, 1953. jún. pp. 227–258.
14. G. Möll—A. Kaufmann—G. Högel—G. Holoch: Die Farbfernsehen-Aufnahmeinrichtungen. Rundfunktechnische Mitteilungen, 1966. No 6. pp. 285–303.
15. D. L. Mac Adam: Dependence of Color Mixture Functions on Choice of Primaries. Journal of the Optical Society of America, 1953. jún. pp. 533–540.
16. D. B. Judd: Color in Business, Science and Industry. John Wiley New York, Chapman Hall LTD London, 1963.



4. ábra



5. ábra

Köszöntjük Állami Díjasainkat

Millner Tivadar Kossuth-díjas akadémikust, az MTA Műszaki Fizikai Kutatóintézetének tudományos főmunkatársát, akit a wolframfém-izzószál fontos alapkutatói problémáinak megoldásáért és az eredmények gyakorlatba való átültetése terén végzett életművéért az Állami Díj I. fokozatával tüntettek ki.

Holló Imrét, az EIVRT Vákuumtechnikai Gépgyárának főmérnökét, aki a vákuumtechnikai gépek, gépsorok és gyárak létrehozásában kifejtett munkájáért az Állami Díj II. fokozatával tüntettek ki.

Kerpel Róbertet, a Magyar Rádió és Televízió műszaki igazgatóját, akit a Magyar Rádió és Televízió

műszaki bázisának létrehozásában és fejlesztésében végzett munkásságáért az Állami Díj II. fokozatával tüntettek ki.

Dr. Csibi Sándort, a műszaki tudományok kandidátusát, a TKI tudományos főosztályvezetőjét,

Erdélyi Jánost, a műszaki tudományok kandidátusát, az EIVRT főkonstruktőrét,

Battiszig Györgyöt, a TKI tudományos főosztályvezetőjét, akik a mikrohullámú rádióösszeköttetések kutatása, fejlesztése és gyártása terén végzett tudományos és műszaki munkásságukért az Állami Díj II. fokozatát kapták.

Diplomaterv-pályázat

A Híradástechnikai Tudományos Egyesület pályázatot hirdet a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar Híradástechnikai Szakán 1970-ben végző nappali hallgatók részére az alábbi feltételekkel:

1. A PÁLYÁZATON azok a hallgatók vehetnek részt, akik államvizsgájukat legkésőbb 1970. október 31-ig jeles, vagy jó eredménnyel leteszik.
2. A PÁLYÁZATON való részvétel feltétele az egyesületi tagság.

A PÁLYÁZAT célja a legjobb diplomatervet kidolgozó és jó tanulmányi eredményt elért fiatal szakemberek megbecsülése és munkájuk külön jutalmazása.

A PÁLYÁZATON való részvételi szándékot a hallgató az államvizsga alkalmával a vizsgáztató bizottságnak jelenti be.

Az illetékes tanszék a diplomaterveket a Híradástechnikai Tudományos Egyesületnek 1970. november 15-ig megküldi.

Az elbírálás határideje: 1970. december 15.

A bírálóbizottság tagjai: elnökét és két tagját a HTE, további két tagját a BME Villamosmérnöki Kara jelöli ki.

PÁLYADÍJAK:	I. díj	1500,— Ft
	II. díj	1000,— Ft
	III. díj	800,— Ft

A jutalmakat az Egyesület ünnepélyes ülésén nyújtják át a nyerteseknek.

A nyertesek az Egyesületben diplomatervükről előadást tarthatnak, és a témától és a kidolgozástól függően hosszabb vagy rövidebb tanulmányban számolhatnak be munkájukról lapunkban.

Dr. Ambrózy András
a HTE Oktatási Bizottságának vezetője

Országos Híradástechnikai és Műszeripari Gazdasági Konferencia

A Méréstechnikai és Automatizálási Tudományos Egyesület és a Híradástechnikai Tudományos Egyesület Ipargazdasági Szakosztályai 1970. május 5—8 között Országos Híradásiipari és Műszeripari Gazdasági Konferenciát rendeznek a Technika Házában, Budapesten.

A Konferenciára az 1967. májusában a MATE által rendezett „Műszeripari Gazdasági Konferencia” folytatásaként kerül sor.

A Konferencia célja az azóta elért eredmények megvitatása, az új gazdaságirányítási rendszerből adódó vállalati gyakorlati problémák, új fejlődési irányok vizsgálata.

A Konferenciát plenáris előadás vezeti be és a következő témakörök a beérkezett előadások szerint 3 szekcióban kerülnek vitára:

- I. Vezetés—döntés—vállalati gazdaság-politika
 1. Vállalati gazdaság-politikai kérdések,
 2. Vállalati belső mechanizmus,
 3. Információs rendszerek vezetői döntésekhez,
 4. Matematikai módszerek alkalmazása.
- II. Marketing
 1. Marketing stratégia és taktika,
 2. Piacra orientált gyártmány és gyártásfejlesztés,
 3. Értékesítés, fejlesztés kapcsolatai: piaci információk.
- III. Nyereség- és eszközorientált gazdálkodás elemei
 1. Termelés-szervezés korszerű módszerei,
 2. Létszám- és bér-gazdálkodás,
 3. Kutatás-fejlesztés hatékonyságnövelésének vizsgálata.

Egyesületi hír

A HÍRADÁSTECHNIKAI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET KONSTRUKCIÓS SZAKOSZTÁLYA klubdelutánt tartott 1970. február 12-én, melynek tárgya az 1970. évi munkaterv megbeszélése volt.

Bevezető előadást a szakosztály elnöke: Dr. Almásy György tartott, az: „Elektronikus ipar időszerű szerkezeti, konstrukciós kérdései” címen.

Ezután összefoglalta a szakosztály munkáját, értékelte a munkabizottságok tevékenységét és rámutatott a jövő feladataira.

Kocsis Miklós, a félvezető szakosztály titkára bejelentette, hogy a félvezető és konstrukciós szakosztály rendezésében kívánatos volna egy ankétot szervezni az integrált áramkörök alkalmazásával kapcsolatos konstrukciós kérdésekről. — Már egy külföldi előadó is jelentkezett.

Dr. Molnár István, a „Magyar Elektrotechnikai Tudományos Egyesület Kisfeszültségű Készülékek Munkabizottsága” részéről közölte, hogy a Híradástechnikai Tudományos Egyesülettel közösen, 1971-ben „Elektromechanikus és elektronikus relék” címmel nemzetközi résztvevőkkel konferenciát óhajtának rendezni.

A tématerv megvitatása során arra vonatkozó igény merült fel, hogy szakosztályuk keretében új

munkabizottság alakuljon, amely a Magyar Elektrotechnikai Egyesülettel együttműködve foglalkozzon az elektronikus iparban alkalmazott erősáramú szerelvények konstrukciós kérdésével. A munkabizottság megszervezése folyamatban van.

Az 1972. évi nemzetközi konstrukciós konferencia előkészítése céljából kívánatos volna egy újabb munkabizottságot felállítani, amely a számítógépeknek az elektronikus iparban felmerülő konstrukciós kérdések megoldására történő közvetlen felhasználásával foglalkozik. Ennek a munkabizottságnak a megszervezése is folyamatban van.

Több hozzászóló felvetette annak a szükségességét, hogy a magyar ipar által vásárolt újabb elektronikus licencek kiértékelésekor nyert konstrukciós tapasztalatokat a szakosztály értékelje és vitassa meg. Ennek érdekében fel kell venni a kapcsolatot az érintett vállalatok igazgatójával.

A szakosztály a konstruktőr-képzés kérdésének megvitatását is napirendre tűzte.

A szakosztály vezetősége és tagsága teljes egyetértését fejezte ki arra vonatkozólag, hogy a jövőben a szakosztálynak a rokontémákkal foglalkozó többi METESZ egyesülettel a legszorosabban együtt kell működnie.

Tartalmi összefoglalások

ETO 621.376.2.018.78

Dr. Gordos G.:

AM rendszerek torzításainak transzformációja szorzó-demoduláció esetén

HÍRADÁSTECHNIKA XXI. (1970) 4. sz.

E dolgozat először rendszerbe foglalja azokat a szempontokat, amelyek szerint a különböző modulációs rendszerek adott körülmények közötti alkalmazhatóságának, valamint minőségének megítélése történik. Értelmezi a torzítások transzformációját, mint a modulált jelet ért torzításoknak a demoduláció utáni hatását és definiálja az ezzel kapcsolatos fogalmakat. A dolgozat második fő témája a szorzó-elven demoduláló AM rendszerek torzításainak transzformációja, amelyre — lineáris torzítások esetén — általános módszert közöl. Bemutatja az AM jelek spektrumának meghatározásánál a determinisztikus és sztochasztikus moduláló jel esetén mutatkozó egységesítést, az oldalsávkepződés általános szabályait és a szorzódemoduláció torzításait.

ETO 621.397.61

Waesterlid, N.:

Korszerű, középfrekvenciával modulált televízióadó félvezetős gerjesztő egységgel

HÍRADÁSTECHNIKA XXI. (1970) 4. sz.

A szerző ismerteti a svéd Philips Teleindustri AB cég új típusú televízióadóját, amely a VHF vagy UHF sávban működik és 38,9 MHz-es középfrekvenciával van modulálva. A gerjesztő egység tiszta félvezetős kivitelű és külső üreges klisztront alkalmaz az UHF adó 40 kW-os végfokában, a VHF adó végfokában pedig tetroda van. Az adók mind fekete-fehér, mind színes műsor sugárzására alkalmasak.

ETO 535.64

Budinszky J.:

Színmértani számítások módszerei

HÍRADÁSTECHNIKA XXI. (1970) 4. sz.

Ezen cikk a mátrixkalkulus alapjaira támaszkodva a színkoordináták és színegységvektorok transzformációját igyekszik átfogóbb apparátussal leírni. Részletesen vizsgálja az additív reprodukció általános esetét is. Egy módszer kerül továbbá ismertetésre, mely az ortogonális színkeverési görbék felhasználásaként a Fourier analízissel analóg módon, adott szűrőfüggvények színrendszerének meghatározását teszi lehetővé.

Обобщения

ДК 621.376.2.018.78

Д-р Г. Гордош:

Трансформация искажений систем АМ в случае умножительной демодуляции

НÍRADÁSTECHNIKA (ХИРАДАШТЕХНИКА, Будапешт) XXI. (1970) №4

Статья в первую очередь систематизирует точки зрения по которым можно оценивать применимость в данных условиях и качество различных модуляционных систем. Дано объяснение трансформации искажений как влияние, после демодуляции, искажений модулированных сигналов и определены относительные понятия. Второй основной темой статьи является трансформация искажений систем АМ работающих на принципе умножительной демодуляции. По этой дан общий метод в случае линейных искажений. Показываются единообразность в определении спектра сигналов АМ в случае детерминистических и стохастических модулирующих сигналов, общие законы генерирования боковых полос и искажения умножительных демодуляторов.

ДК 621.397.61

Вестерлид, Н.:

Современный телевизионный передатчик, модулированный промежуточной частотой с возбудителем на полупроводниковых приборах

НÍRADÁSTECHNIKA (ХИРАДАШТЕХНИКА, Будапешт) XXI. (1970) № 4.

Автор излагает новый тип телевизионного передатчика шведской фирмы Филипс Телеиндустри АБ, работающего в диапазонах очень высоких и ультравысоких частот (VHF и UHF), модулированный промежуточной частотой 38,9 МГц. Возбудитель является конструкцией, выполненной полностью на полупроводниковых приборах, применяемый клистрон с внешними резонаторами в окончательном каскаде 40 кВт передатчика ультравысоких частот, а тетрод в окончательном каскаде передатчика очень высоких частот. Передатчики пригодны для излучения и черно-белой и цветной программы.

(ДК 535.64

Й. Будински:

Методы цветогеометрических расчетов

НÍRADÁSTECHNIKA (ХИРАДАШТЕХНИКА, Будапешт) XXI. 1970) № 4.

Статья старается описать трансформацию цветовых координат и цветных единичных векторов охватывающим способом на основе расчета матрицами. Подробно рассматривается общий случай репродукции сложения. Дальше излагается метод, обеспечивающий определение цветовой системы данных функций фильтров, применяя кривые смешивания цветов, аналогично с анализом Фурье.

UDC 621.376.2.018.78

Dr. G. Gordos:

Transformation of the Distortion of AM Systems in the Case of Multiplicative Demodulation

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) N° 4.

First those aspects are systematized, according to which the applicability of different modulation systems under given conditions and the assessment of their quality is made. The transformation of the distortions is explained as the effect of the distortions to which the signals are submitted after demodulation and the concepts relating thereto are defined. The second important item of the paper is the transformation of the distortion of AM systems in the case of multiplicative demodulation. For this transformation a general method is given in case of linear distortions. For uniformity manifesting itself in the course of the determination of the spectrum of AM signals modulated by either deterministic or stochastic signals, the general laws of the side band generation and the distortions of the multiplicative demodulation are presented finally.

UDC 621.397.61

Waesterlid, N.:

Modern Intermediate Frequency Modulated Television Transmitter with Semiconductor Driver Unit

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) № 4.

The author presents the new type television transmitter developed by the Swedish Philips Teleindustri AB. This TV transmitter operates either in the VHF band, or in the UHF band and is modulated by an intermediate frequency of 38.9 MHz. The driver unit is of solid state construction and external cavity klystron is applied in the 40 kW final stage of the UHF transmitter. There is tetrode in the final stage of the VHF transmitter. The transmitters are suitable both for the radiation of monochrome and colour programme.

UDC 535.64

Budinszky, J.:

Some Analytical Methods for Colorimetry

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) № 4.

The transformation of colour co-ordinates is described as well as the transformation of colour unit vectors (primaries), applying the comprehensive apparatus of matrix calculus. The general case of additive colour reproductions is discussed in details. In the last section of the article a procedure is presented, a tool for the investigator to the exact definition of a colour system of given colour filters by employing the orthogonal colour mixture curves and an analogue process of Fourier analysis.

DK 621.376.2.018.78

Dr. G. Gordos:

Verzerrungstransformation der AM Systeme im Falle von Multiplikationsdemodulation

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) Nr 4.

In diesem Artikel werden erst jene Gesichtspunkte systematisiert, gemäss welcher die Anwendbarkeit der verschiedenen Modulationssysteme unter gegebenen Umständen und die Qualität derselben Systeme beurteilt wird. Die Verzerrungstransformation wird als der Effekt der Verzerrungen, welche das modulierte Signal nach der Demodulation erlitten hat, aufgefasst und die bezüglichen Begriffe werden definiert. Das zweite Hauptthema des Artikels ist die Transformation der Verzerrungen im AM Systeme die mit Multiplikations-demodulation arbeiten und bezüglich dieser Transformation im Falle von linearen Verzerrungen eine allgemeine Methode dargestellt wird. Bei der Bestimmung des Spektrums der AM Signale werden die bei der deterministischen und stochastischen Modulation erscheinende Einheitlichkeit, die allgemeinen Regeln der Seitenbandbildung und die Verzerrungen der Multiplikationsdemodulation erörtert.

DK 621.397.61

Waesterlid, N.:

Moderne Zwischenfrequenzmodulierte Fernsender mit Halbleitertreiber-Einheit

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) Nr 4.

In dem Artikel wird der in der schwedischen Firma Philips Teleindustri AB hergestellte Fernsender neuen Typs erörtert. Dieser Sender funktioniert im VHF oder UHF Band und wird mit 38,9 MHz Zwischenfrequenz moduliert. Die Treibereinheit wurde vollständig mit Halbleitern ausgeführt und in der 40 kW Endstufe des UHF Senders wurde ein Klystron mit äusseren Hohlräumen und in der Endstufe des VHF-Senders eine Tetrode angewendet. Diese Sender sind für die Ausstrahlung von sowohl schwarz-weißer, als auch für Farb-Programme geeignet.

DK 535.64

Budinszky, J.:

Über die Methoden der kolorimetrischen Berechnungen

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) Nr 4.

Auf Grund des Matrizenkalküls erörtert diese Arbeit eingehend die Transformation der Farbartkoordinaten und der Primäreinheitsvektoren. Sie prüft in einzelnen den allgemeinen Fall der additiven Reproduktion. Ferner wird eine Methode beschrieben, die mit Verwendung der orthogonalen Spektralwertkurven und analog mit der Fourier-Analyse die Bestimmung des Farbsystems in Abhängigkeit von den gegebenen Filterfunktionen ermöglicht.

Résumés

CDU 621.376.2.018.78

Dr. G. Gordos:

Transformation des distorsions des systèmes AM en cas de démodulation multiplicative

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) No 4.

Pour commencer l'article systématise les points de vue pour apprécier l'applicabilité dans conditions données et la qualité des systèmes à modulation différentes. La transformation des distorsions est interprétée comme l'effet après la démodulation des distorsions subies des signaux modulés et les concepts relatifs à celle-ci sont définis. Le deuxième thème principal est la transformation des distorsions des systèmes AM réalisants la démodulation selon le principe du multiplicateur. Une méthode est donnée pour l'application de ce principe en cas des distorsions linéaires. L'uniformité qui se manifeste en cas des signaux déterministiques et stochastiques en déterminant le spectre des signaux AM, les règles générales de la génération des bandes latérales et les distorsions de la démodulation multiplicative sont présentées.

CDU 535.64

J. Budinszky:

Des méthodes de procédé en colorimétrie

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) № 4.

Cette enquête essaie de décrire — d'une manière plus concise — la transformation des coordonnées tristimuli et des unités des vecteurs

de couleur à l'aide du calcul matriciel. L'article développe en détails le cas général de la reproduction additive. Par la suite, l'article fait connaître un moyen lequel — en utilisant les fonctions tristimuli orthogonales et d'une manière analogue à la série de Fourier — permet de déterminer le système de couleur appartenant à des filtres chromatiques accordés.

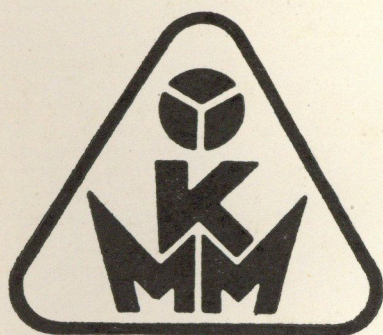
CDU 621.397.61

Waesterlid, N.:

Émetteurs de télévision modernes modulés par une fréquence moyenne, ayant une unité excitatrice à semi-conducteurs

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) XXI. (1970) № 4.

L'auteur expose les nouveaux types d'émetteurs de télévision de la compagnie suédoise Philips Teleindustri AB travaillants dans les bandes VHF et UHF et modulés par la fréquence moyenne de 38,9 MHz. L'unité excitatrice comprend seulement semi-conducteurs et un klystron à cavités externes est employé dans l'étage final de l'émetteur UHF, alors que l'étage final de l'émetteur VHF comprend un tetrode. Les émetteurs sont aptes à rayonner des programmes blancs-noirs ou bien en couleurs.



MAGYAR KÁBEL MŰVEK

VEZÉRIGAZGATÓSÁGA

Budapest, XI., Budafoki út 60 • Telefon: 453-590

GYÁRTMÁNYOK:

Jelző-, mérő-, működtetőkábelek

Erősáramú szigetelt vezetékek

Erősáramú kábelek 1–35 kV-ig

Alumínium és acél-alumínium
szabadvezetékek

Tekercselőhuzalok

Switch-kábelek

Gumitömlő vezetékek

Híradástechnikai vezetékek

Távkábelek

Hírközlő kábelek

Hajókábelek

Zománchuzalok

Zárt-acélkötelek