SOKFÉLE.

83. Szám. Béts. October 15-dikén. (31) 1833

Emlékeztető Jegyzetek.

October.

12 Oct. — 1504 † Ditsö Hunyady Mátyásunk hös fia Corvin János. — 1789. Klebeck general meghozza Bétsbe a' hírt, hogy Belgrád megadta magát. — 1814. Gróf Münster ángol minister Bétsben kinyilatkoztatja hogy Hannovera Királyságra emeltetett.

13 Oct. — 1793 † Török, Feldmarschall Lieutenant 's Tulajdonos. — 1805. Soult álgyúztatja Memminget.

14 Oct. — 1596. Eger az ellenség kezébe kerül. — 1619. Bethlen elfoglalja Kassát 's nyomban a' Bányavárosokat, Nagy Szombatot és Posonyt 's ezzel együtt a' szent koronát. — 1758. Nagy Fridrik Hochkirchen mellett 10,000 embert, 100 álgyut 's podjászát veszti.

15 Oct. — 1809. Napoleon felállítja az Illyriai Királyságot 's hozzá kaptsolja Ragusa téreit. — A' Frantziák egy része elhagyja Bétset. — 1813. Napoleon megszemléli hadait 's vezéreit elrendeli.

A' változtatásról.

A' dolgok *másításának* (variatio) két neme van; egyik a' *változtatás* (permutatio), másik az *öszve fogás* (combinatio). Vizsgáljuk meg most tsak a' változtatást, az öszvefogást mászszorra hagyván. Változtatásnak neveztetik több vagy kevesebb dolgok, p. o. betűk, emberek, állatok, pénzdarabok 's a' t. egymás után való helyheztetésének vagy rendének különbözése, mivel az nem egyéb rend- vagy helyváltoztatásnál. A' változtatás végett minden adatott dolgokat együtt veszünk vagy felfogunk, és azokat úgy rakjuk 's rendeljük el sorban egymás után, hogy mindég másmás rendjek legyen, és így helyeket, 's egymás után való következéseket mind annyiszor változtassák, a' mennyiszer tsak lehet. Itt tehát ez a' közönséges feladás: megtalálni, hogy hányszor lehet akárhány különböző dolgokat változtatni egymás között, vagy megváltoztatott renddel tenni egymás után.

Megfejtés. A' természeti számok folyamatjában sokszorozni kell egymással minden tagokat, az 1-től fogva mind addig a' tagig, melly a' változtatandó dolgok számával egyenlő: 's a' műszám meg fogja mutatni a' keresett változások számát, p. o. 4 különböző dolgok változtatásainak száma $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Ezen szabálynak helyes vóltát szemmel láthatóképen meg lehet mutatni. Jelentsenek p. o. az *a*, *b*, *c*, *d*, betűk négy különböző dolgokat. Már ha tsak 1 dolgot veszünk fel, t. i. az *a* betűt: ez tsak 1 módon tétethetik, tsak egy helyet foglal el, ő maga első és utólsó lévén a' rendben egyszersmind, és mivel nintsen társa, helyet mással nem változtathat, és így itt a' változtatás vagy tétel száma $= 1$. Ha pedig egy 2-dik dolgot is veszünk mellé, t. i. a' *b* betűt: ez lehet az *a* mellett első is, második is, ekképen: *ba*, *ab*, és így az elébbeni változások számát 2-vel kell sokszorozni, azaz 2 dolog változtatásainak száma $= 1 \times 2 = 2$. Ha 3-dik dolog is járúl az eddig valókhoz, p. o. a' *c* betű: ez a' fellyebbi 2 változásoknak mindegyikében elfoglalhatja mind az 1-ső, mind a' 2-dik, mind a' 3 dik helyet, ekképen: *cba*, *bca*, *bac*, *cab*, *acb*, *abc*, és így a' fellyebbi változások számát 3-mal kell sokszorozni, úgy hogy 3 dolog változásainak száma lesz $= 1 \times 2 \times 3 = 6$. Ha 4-dik dolog, vagy *d* betű is járúl a' fellyebbiekhez: ez a' közelebbi 6 változások közzűl mindenikben tétethetik az 1-ső, 2-dik, 3-dik és 4-dik helyre, a' mint itt láthatni:

dcba	dbca	dbac	dcab	dacb	dabc
cdba	bdca	bdac	cdab	adcb	adbc
cbda	bcda	badc	cadb	acdb	abdc
cbad	bcad	bacd	cabd	acbd	abcd

minthogy tehát négyféleképen foglaltathatik a' 4-dik dolog akármellyik rendéhez a' fellyebbi 3 dolgok változásainak: 4-el kell azokat sokszorozni, és 4 dolgok változtatásainak száma lesz $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Így megyen a' dolog tovább is. Ha tehát a' változtatandó dolgok száma $= n$: lesz a' változtatások száma $= 1 \times 2 \times 3$'s a' t. n. Vagy mivel, ha a' legnagyobbik számon, t. i. az adatott dolgok számán kezdjük a' sokszorozást, és úgy szállunk le az 1-ig, úgy is épen azon művet nyerjük: lesz a' változások száma $= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$'s a' t. 1.

A' változtatandó dolgok elrakását másképen is lehet elrendelni, mint fellyebb említtetett, úgy p. o. hogy *a* legyen első mind addig, míg a' többi betűk helyeket egymás közt változtathatják, azután kerüljön az elsőség a' *b*-re, majd a' *c*-re, 's a' t. Így még könnyebb a' dolgok változásait általlátni, p. o. az *a*, *b*, *c*, *d*, 4 betűk 24 változásai ezek:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Használják a' tudósok az illyen változtatás módját az Anagrammák vagy áltbetűzések készítésére, és az illyen elrakás által gyakran szerentsés találmányokat tesznek itt, azaz valamelly névnek vagy szónak betűiből, a' rendnek változtatása által más értelmes, és a' dologra illő szókat tsinálnak. Ezen elrakás által t. i. könnyű feltalálni minden lehetséges Anagrammákat, p. o. az *amor* szónak 24 változásaiból ezen érthető szók kerülnek elő: *armo*, *maro*, *mora*, *oram*, *ramo*, *roma*.

A' változtatások megtalálásának fellyebb előadott szabályja szerént sok nevezetes kérdéseket és feladásokat meg lehet fejteni. Lássunk némellyeket. — Hét tanúló Ifjak egy vendégfogadósnál fogadtak magoknak asztalt vagy kosztot: de mivel pénzek nem vólt, arra kérték a' fogadóst, hogy tsak addig várakozzék a' fizetésért, míg ők változtathatják az asztalnál az ülés rendjét. A' fogadós - azt gondolván, hogy mivel a' hét személyek közzűl mindegyik tsak hétféleképen változtathatja a' maga űlését, talán rövid idő alatt véghez mehet minden lehetséges helyváltoztatás — megígérte, hogy mindennap ád nékiek ebédet és vatsorát hitelben, mind addig, valamíg tsak másmás renddel ülhetnek az asztalhoz. Kérdés: hány ebédet és vatsorát tartozott a' fogadós adni? és a' hét tanúlók mennyi idő múlva tartoztak megfizetni? — Felelet: 7 dolog változtatásainak száma $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$ 5,040, és így a' 7 tanúlók ennyiszer űlhettek az asztalhoz mindég változtatott renddel, annál fogva 5,040 ebédet és vatsorát tartozott adni nékiek a' fogadós. Minthogy pedig mindennap tsak egy ebéd és egy vatsora szükséges, 2,520 napig, azaz 6 esztendeig és 330 napig érték azokkal meg a' 7 tanúlók, és akkor tartoztak megfizetni.

Más kérdés: nyóltz éneklő gyermekek, ha mindennap négyszer változtatják helyeiket vagy rendjeket a' templomban az éneklő karban, t. i. mind a' reggeli, mind a' déllyesti Isteni tisztelet alatt, még pedig mind a' könyörgés előtti, mind az azutánni énekléskor, mennyi idő alatt végeznek el minden lehetséges rendváltoztatást? — Felelet: 8 dolog minden változásinak száma $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40{,}320$; ennyiszer változtathatják tehát 8 éneklő gyermekek egymás közt helyeiket, melly 40,320 változtatások, mint hogy egy nap tsak négy változtatásnak van helye, 10,080 napig, az az 27 esztendeig és 225 napig fognak tartani, melly hoszszú idő alatt férjfiúi korra jutnak a' gyermekek. — A' Szűz Mária tiszteletére késztittetett ezen versnek 8 szavait is:

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera coelo.

40,320-szor lehet változtatni, ha az ember nem gondol a' vers mértékével; ha pedig a' vers mértékére vigyáz is, mégis 3,276-szor lehet ezen hexametert változtatni.

Még egy példa. Az Úr Jézus 12 Tanítványi vetekedtek vólt egymás közlt arról, hogy ki lenne közöttök jövendőben első vagy legnagyobb? Jézus, *Márk.* 9. 35. ezt mondá nékiek: *a' ki első akar lenni, mindeniteknél utólsóbb légyen.* Tegyük fel, hogy ezen alázatosságra intő letzke után mindenik Apostol által akarta engedni társainak az 1-ső, 2-dik, 3-dik, 's a' t. helyet, és így hogy ők közönségesen arra határozták magokat, hogy mikor együtt lésznek, ne maradjanak soha ugyan azon rendben, hanem mindég változtassák helyeiket, úgy hogy *Mát.* 20. 16. szerént végezetre *az utólsók elsők légyenek, és az elsők utólsók:* kérdés, hány módon tudhatták volna helyeiket változtatni egymás között? — Felelet: 12 dolog minden lehetséges változásainak száma $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 479'\ 001{,}600$. Ennyiszer változtathatták vólna tehát a' 12 Apostolok egymás között a' rendet, melly temérdek változtatásoknak elvégezésére, ha szintén minden pertzben vagy minutumban változtatták vólna is egyszer helyeiket, több kellett vólna nékiek 910 esztendőnél. Ha pedig felteszszük, hogy a' többi Apostolok az 1-ső helyet mindég Péternek engedték vólna: ők mégis 11-enn helyeiket 39' 916,800-szor változtathatták vólna, melly változásoknak elvégezésére, ha minden pertzben másmás rendet formáltak vólna is, több kívántatott vólna 75 esztendőnél.

Másik feladás a' változtatásokra nézve ez lehet: megtalálni, hogy hányszor lehet változtatni a' feltett dolgokat, ha azok között némelly dolgok egyenlők vagy hasonlók.

Megfejtés. A' mennyi mind öszve az adatott dolgok száma, annyi különböző dolgok változásainak számát kell elosztani annyi különböző dolgok változásainak számával, a' hányan vagynak az egyenlő dolgok; és a' részes megmutatja a' keresett változtatások számát. Ha pedig az egyenlő dolgok több rendbeliek: sokszorozni kell először azoknak változásainak számát egymással, és úgy kell az ő művökkel elosztani minden adatott dolgok változásainak számát. Ha tehát a' változandó dolgok tellyes száma = n, az azok között találtató egyenlő dolgok száma pedig = m, másik rendbeli egyenlő dolgoké ismét = r; lesz a' feltett dolgok változtatásainak száma általjában =

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \text{ 's a' t. } 1.}{m \times (m-1) \text{ 's a' t. } 1 \times r\,(r-1) \text{ 's a' t. } 1.}$$

Ha p. o. 5 ollyan dolgok változtatásainak száma kerestetik, mellyek köztt 2 dolog egyenlő, a' többi 3 dolog ismét egyenlő: lesz a' változtatások száma =

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{12} = 10.$$

Vegyük fel p. o. ezen 5 betűket: *aabbb*, ezeknek minden szembetűnő változtatásai tsak 10-re mennek, t. i. *aabbb*, *baabb*, *bbaab*, *bbbaa*, *ababb*, *abbab*, *abbba*, *babba*, *babab*, *bbaba*.

Nevezetes és hasznos megjegyzés az, hogy a' két vagy több tagú algebrai gyökerek hatalmaiban az egyművesek (coëfficientes s. unciae), az ő esmeretes jelentéseiken kivűl megmutatják azon változtatások számát is, a' mellyeken általmehetnek annyi 's ollyan dolgok, a' mennyi 's millyen betűk előtt állanak ők. A' betűk tehát a' változtatandó dolgok számát és mineműségét, az egyművesek pedig azoknak változásainak számát mutatják meg. Vegyük fel p. o. az $a+b$-nek 4-dik hatalmát, melly ez: $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, vagy az elhallgatott egyműveseket, és a' mutatók (exponensek) által jelentett betűket egészen kiírván: $1aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + 1bbbb$. Itt az első tag, melly $1aaaa$, azt jelenti, hogy ha 4 egyenlő dolgot veszünk fel, mint *aaaa*, azokat helyekre nézve nem lehet 1-nél többféle módon valósággal vagy szembetűnőképen változtatni; mivel akármellyik legyen a' 4 egyenlő dolgokközzűl az 1-ső, 2-dik, 's a' t. mindég tsak ezen 1-re megyen ki az ő változások: *aaaa*. A' második tag, melly $4aaab$, azt jelenti, hogy ha 4 dolgok köztt egy dolog háromszor fordúl elő, akkor 4 lesz azoknak szembetűnő változásainak száma, t. i. *aaab*, *aaba*, *abaa*, *baaa*. A' 3-dik tag, melly $6aabb$, azt mutatja, hogy ha 4 dolgok köztt 2 egyenlő, a' másik 2 ismét hasonló: akkor azokat mind öszve 6 módon lehet változtatni, t. i. *aabb*, *abab*, *baab*, *baba*, *bbaa*, *abba*. Így van a' dolog minden hatalmak egyműveseire és betűire nézve, nem tsak a' két, hanem a' három 's több tagú gyökerek hatalmaiban is.

Fejtsünk meg már némelly ide tartozó kérdéseket. Egy embernek van 4 fia és két leánya: kérdés, hányféleképen változtathatják ezek 6-an az asztalnál való űléseiket 's rendjeket, nem személybeli, hanem tsak nembeli különbségeiket tekintvén? — Felelet: 6 dolgok változtatásainak számát el kell osztani 4 és 2 dolgok változtatásai számának művével: a' részes megjelenti a' kérdéses változások számát. Tehát

$$\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1} = \frac{720}{48} = 15,$$

azaz 15 félőképen változtathatják a' hat gyermekek helyeiket. Az $a+b$-nek hatodik hatalmában is a' 3-dik tag, t. i. $15a^4b^2$ azaz $15aaaabb$ ugyanezen változtatások számát megjelenti.

Kérdés: 7 kerek üvegeket, mellyek közzűl 4 borral, 3 savanyú vízzel van megtöltve, hányféle renddel lehet felrakni az asztalra, tsak a' boros és vizes üvegek köztt való két fő különbséget vévén tekintetbe? — Felelet: $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times3\times2\times1}=\frac{5040}{144}=35$ször lehet az említett üvegek rendét változtatni. Az $a+b$ 7-dik hatalmának 4-dik tagja is, t. i. $35a^4b^3$ vagy $35aaaabbb$ ugyanezen változások számát megmutatja.

Sz. J.

A p r ó s á g.

Egy Ángol útazó hazánknak nagy részét beútazván, ezt a' jegyzést tevé rólunk: a' Magyarok nem tsak fekvésekre hanem miveltségekre nézve is tő szomszédai a' Töröknek. Nálok még rabszólgaság uralkodik, mert — úgymond — *minden hívatalbelit páltza külömböztet meg.* — Szegény hazám! pedig ez az ángol tsak az uraságok hajdúit, és tsak a' forspont állító kis bírókat látta; — de látta vólna tsak iskoláidat, és azoknak botos mestereit!

R e j t e t t s z ó.

Gyógyszer vagyok; első tagom
Szereti kend is tsillagom!
A' másikért ha hogy drága
Lészen sujtásos nadrága.

Tündérfy Ándor.

Megfejtés az 82. számban: Ég.